Емельянов В.М.

Стандартная модель и ее расширения

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 530.1,539.18
ББК 22.31
Е 60

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 07-02-07022д

Емельянов В. М. **Стандартная модель и ее расширения.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 584 с. — ISBN 978-5-9221-0830-0.

В 2007 г. в ЦЕРН начнет свою работу крупнейший современный ускоритель — Большой адронный коллайдер. Как ожидается, его энергии и светимости будет достаточно для обнаружения хиггсовского бозона — последней частицы, необходимой для завершения построения стандартной модели элементарных частиц и объяснения механизма электрослабого нарушения симметрии. Но уже сейчас имеется множество как экспериментальных, так и теоретических предпосылок существования в ТэВ-ной области энергий «новой физики», не описываемой стандартной моделью.

В первой части книги рассмотрены идеи симметрии и основанные на них квантовая хромодинамика и электрослабая теория. Этот материал основан на курсе лекций, читаемых автором на кафедре «Физика элементарных частиц» для студентов 4-х и 5-х курсов, специализирующихся по физике элементарных частиц и космомикрофизике.

Вторая часть посвящена расширению стандартной модели: суперсимметрии, техницвету, маленькому хиггсу, дополнительным измерениям, Большому объединению, проблемам темной энергии и темной материи, струнам, и ориентирована на аспирантов и специалистов, занимающихся каким-либо направлением в физике элементарных частиц и желающих получить представление об идеях и проблемах в смежных областях.

Научное издание

ЕМЕЛЬЯНОВ Валерий Михайлович

СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ РАСШИРЕНИЯ

Редактор *В.С. Ярунин*
Оригинал-макет: *А.А. Пярнпуу*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 06.04.07. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 47,4. Уч.-изд. л. 49,5. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

© ФИЗМАТЛИТ, 2007
ISBN 978-5-9221-0830-0
© В. М. Емельянов, 2007

Оглавление

Предисловие 11

Часть I. **Стандартная модель**

Введение 16

Глава 1. **Симметрии и группы симметрий в физике частиц** 23

1.1. Введение. Типы симметрий 23

1.2. Группы симметрии 25

1.2.1. Теоремы Ли (26). 1.2.2. Классификация алгебр Ли (28). 1.2.3. $SU(2)$-симметрия (29). 1.2.4. $SU(3)$-симметрия (31). 1.2.5. Тензорные представления группы $SU(n)$ (32). 1.2.6. Размерность представлений группы $SU(3)$ (33).

1.3. Октет барионов $\frac{1}{2}^+$ 34

1.4. Квантовые числа кварков 36

1.5. Калибровочный принцип для калибровочных теорий 38

1.6. Квантовая электродинамика как пример калибровочной теории 38

Глава 2. **Калибровочная теория сильных взаимодействий — квантовая хромодинамика** 40

2.1. Введение. Партонная модель 40

2.2. Цвет 41

2.3. Выбор калибровочной группы 42

2.4. Лагранжиан КХД 44

2.5. Симметрии КХД 47

2.6. Безмассовая КХД и масштабная инвариантность 49

2.7. Ренормгрупповой анализ 51

2.8. Основные свойства КХД 57

2.8.1. Асимптотическая свобода (57). 2.8.2. Конфайнмент (58). 2.8.3. Нарушение киральной симметрии (59).

2.9. Облака, струи и эксперимент 60

2.10. Жесткие процессы в КХД 61

2.10.1. Струи (61). 2.10.2. Рождение адронов в e^+e^--аннигиляции (62). 2.10.3. Отношение $R = \sigma(e^+e^- \to \text{адроны})/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ (63). 2.10.4. Радиационные поправки (64). 2.10.5. Струи в e^+e^--аннигиляции (67). 2.10.6. N-струйные события (72). 2.10.7. Судаковские форм-факторы (73).

2.11. Глубоконеупругое рассеяние 77

2.11.1. Партонные распределения и бьеркеновский скейлинг (79). 2.11.2. Заряженные и нейтральные токи в глубоконеупругом рассеянии (81).

2.11.3. Правила сумм для структурных функций (82). 2.11.4. Рождение лептонов и фотонов в адронных взаимодействиях (83). 2.11.5. Высшие поправки к глубоконеупругому рассеянию (84). 2.11.6. DGLAP эволюционные уравнения (87).

2.12. Непертурбативные методы в КХД 91

2.12.1. Решеточные калибровочные теории (91). 2.12.2. Нарушение киральной симметрии (93). 2.12.3. Инстантонный вакуум (95). 2.12.4. Правила сумм и вакуумные конденсаты в КХД (95).

2.13. Квантовая хромодинамика при высоких плотностях энергии 96

2.13.1. Что такое кварк-глюонная плазма? (97). 2.13.2. Что такое конденсат цветового стекла (CGC)? (101). 2.13.3. Почему CGC важен? (102). 2.13.4. Ультрарелятивистские ядерные столкновения (102). 2.13.5. Глюонные распределения и насыщение (106). 2.13.6. Столкновения адронов (107). 2.13.7. Экспериментальные свидетельства в пользу существования конденсата цветового стекла (109).

Приложение 1. Сечение трехструйных событий в e^+e^--аннигиляции в адроны 110

Приложение 2. Инстантоны и их роль в КХД 113

1. Инстантоны (113). 2. Нулевые моды и $U(1)_A$-аномалия (118). 3. Эффективное взаимодействие кварков (118). 4. Кварковый конденсат в приближении среднего поля (119). 5. Структура адронов и КХД корреляционные функции (120).

Приложение 3. Правила сумм КХД 122

1. Дисперсионные соотношения (122). 2. Правила сумм (123).

Приложение 4. Сильное CP-нарушение 126

1. Введение (126). 2. Двумерный случай (128). 2.1. Аномалии в двух измерениях (128). 2.2. CP^N-модель: асимптотически свободная теория (129). 2.3. Предел больших N (130). 2.4. Роль инстантонов (131). 3. Пример КХД (132). 4. Проблема сильного CP-нарушения (135).

Глава 3. **Калибровочная теория электрослабых взаимодействий** 138

3.1. Введение 138

3.2. Токи. Структура слабых токов. Матрица Кобаяши–Маскава 139

3.3. Теория Ферми слабых взаимодействий 145

3.4. Нарушение четности и $V-A$-форма заряженных слабых токов 145

3.5. $V-A$-теория заряженных слабых взаимодействий 146

3.6. Теория промежуточного векторного бозона 147

3.7. Построение электрослабой теории 148

3.7.1. Выбор калибровочной группы симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (148). 3.7.2. Калибровочная теория электрослабых взаимодействий (151). 3.7.3. Лагранжиан электрослабой теории (I) (152).

3.8. Спонтанное нарушение симметрии и механизм Хиггса 153

3.8.1. Введение (153). 3.8.2. Явление спонтанного нарушения симметрии — пример ферромагнетика (153). 3.8.3. Случай скалярного поля. Теорема Голдстоуна (155). 3.8.4. Спонтанное нарушение симметрии в квантовой теории поля. Пример КХД (158). 3.8.5. Динамическое нарушение симметрии (159). 3.8.6. Механизм Хиггса (160).

3.9. Сектор нарушения симметрии электрослабой теории 160

3.10. Лагранжиан электрослабой теории (II) 162

3.11. Теоретические ограничения на массу Хиггс-бозона 164
3.11.1. Верхняя граница на M_H из условия унитарности (164). 3.11.2. Верхний предел на M_H из условия тривиальности (165). 3.11.3. Нижняя граница на M_H из условия вакуумной стабильности (166).
3.12. Предсказания стандартной модели 167
3.12.1. Массы калибровочных бозонов (167). 3.12.2. Распады калибровочных бозонов (168).
3.13. Физика топ-кварка 169
3.14. Хиггсовский бозон и его поиски на коллайдерах 170

Глава 4. **«Анатомия» стандартной модели: симметрии** 174
4.1. Вейлевские, майорановские и дираковские поля 174
4.2. Симметрия ароматов 179
4.3. Симметрии хиггсовского сектора электрослабой теории 184
4.4. Масштабная симметрия 188
Приложение 1. Электрослабая теория как обобщение теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау на неабелеву калибровочную группу 194
1. Сверхпроводники, киральные симметрии и намбу–голдстоуновские бозоны (194). 1.1. Сверхпроводник и массивный фотон (194). 1.2. Безмассовый фермион и киральная симметрия (195). 1.3. Массивный фермион и намбу–голдстоуновский бозон (196). 1.4. Массивный фотон и поглощенный намбу–голдстоуновский бозон (197). 1.5. Массивный фотон и массивные фермионы (198).
Приложение 2. Аномалии стандартной модели 199
1. Введение (199). 2. Аксиальная аномалия (199). 3. Киральная аномалия КХД (203).
Приложение 3. GIM-механизм 211

Глава 5. **Стандартная модель в высших порядках теории возмущений** . . . 213
5.1. Радиационные поправки 213
5.2. Ренормировка и физические параметры 214
5.3. Эффективная константа тонкой структуры 216
5.4. Поправки к времени жизни мюона 217
5.5. Радиационные поправки к «минимальному» механизму Хиггса 220

Глава 6. **Основы физики нейтрино** 222
6.1. Введение 222
6.2. Дираковская и майорановская масса нейтрино 222
6.3. See-saw механизм генерации масс нейтрино 226
6.4. Почему массивность нейтрино требует физики вне стандартной модели? . 228
6.5. Физика see-saw механизма 230
6.6. Лево-правая симметрия, масса нейтрино и источник $V-A$-взаимодействий 231
6.7. Четность и II-й тип see-saw механизма 232
6.8. Смешивание нейтрино 233
6.9. Осцилляции нейтрино в вакууме 235
6.10. Нейтринные осцилляции в среде 237
6.11. Можно ли установить природу нейтрино в экспериментах по нейтринным осцилляциям? 244

6.12. Эквивалентность теорий с безмассовыми дираковскими и майорановскими нейтрино . . . 244
6.13. Нарушение полного лептонного числа в нейтринных процессах . . . 245
6.14. Процессы $|\Delta L| = 2$ с участием виртуальных майорановских нейтрино . . 246
6.15. Безнейтринный двойной β-распад . . . 247
6.16. $\mu - \tau$-симметрия и большое атмосферное смешивание . . . 248
6.17. Обобщенная иерархия, $L_e - L_\mu - L_\tau$ и большое солнечное смешивание . 249
6.18. $SO(10)$ большое объединение и смешивание нейтрино . . . 249
6.19. Максимальное смешивание нейтрино для II-го типа see-saw . . . 251
6.20. Существование стерильных нейтрино в природе . . . 252
6.21. Заключение . . . 253
Приложение. Потенциалы взаимодействия нейтрино с веществом . . . 254
1. Нахождение потенциала V_W^e (255).

Глава 7. ***CP*-нарушение** . . . 258
7.1. Введение . . . 258
7.2. Смешивание нейтральных мезонов . . . 260
7.2.1. Базис ароматов (260). 7.2.2. Массовый базис (261). 7.2.3. Смешивание в нейтральных B_d- и B_s-системах (262). 7.2.4. Эволюция во времени (263).
7.3. Феноменология рождения и распада нейтральных мезонов . . . 263
7.3.1. Определение существенных параметров (263). 7.3.2. Три типа CP-нарушения (264). 7.3.3. Четвертый тип CP-нарушения (265). 7.3.4. Распад нейтральной мезонной системы (266). 7.3.5. Распады в состояния с определенным ароматом и CP-нарушение в смешивании (267). 7.3.6. Приближения и обозначения для распадов B-мезонов (267).
7.4. CP-нарушение в стандартной модели . . . 269
7.4.1. Определение CP-нарушающих величин в стандартной модели (272). 7.4.2. Параметризации матрицы СКМ (273). 7.4.3. Ограничения на величины матричных элементов СКМ-матрицы (274). 7.4.4. Унитарный треугольник (275). 7.4.5. Плоскость $(\rho - \eta)$ (276). 7.4.6. Определение параметра λ_f (277). 7.4.7. Сокращение фаз CP-преобразований в величине λ_f (278).
7.5. Распады B-мезонов как проверка стандартной модели . . . 280
7.5.1. Распад $B_d \to J/\psi K_S$ (280). 7.5.2. Распад $B_d \to \pi^+\pi^-$ (283).
7.6. Заключение . . . 285

Глава 8. ***CP*-нарушение и бариогенезис** . . . 286
8.1. Введение . . . 286
8.2. Основы космологии . . . 286
8.2.1. Стандартная космологическая модель (286). 8.2.2. Равновесная термодинамика (287). 8.2.3. Отклонения от термодинамического равновесия (289).
8.3. Барионная асимметрия Вселенной . . . 290
8.3.1. Условия Сахарова (291).
8.4. CP- и B-нарушение в стандартной модели . . . 293
8.5. Электрослабый бариогенезис . . . 297
8.5.1. Эффективный потенциал стандартной модели (299).
8.6. Электрослабый фазовый переход в расширениях стандартной модели . . . 301
8.6.1. Хиггсовский сектор CP-нарушения (302). 8.6.2. CP-нарушение в MSSM (304).

8.7. Сценарий электрослабого бариогенезиса 306
8.7.1. Роль КМ-фазы (310). 8.7.2. Неравновесные распады сверхтяжелых частиц (311).
8.8. Бариогенезис в теориях большого объединения (GUT) 311
8.9. Бариогенезис через лептогенезис 313
8.10. Заключение 315
Приложение 1. C-, P-, T-преобразования оператора барионного числа . . . 317
Приложение 2. Юкавские связи лептонного сектора 318

Часть II. **Расширения стандартной модели**

Введение. Трудности стандартной модели и необходимость ее расширения 322

Глава 1. **Суперсимметрия** 324

1.1. Проблема иерархий 324
1.2. Теоретические основы 327
1.3. Спиноры 329
1.3.1. Спиноры и преобразования Лоренца (330). 1.3.2. Построение инвариантов и 4-векторов из 2-компонентных спиноров (333). 1.3.3. Майорановские фермионы (335). 1.3.4. Дираковские фермионы, построенные с помощью спиноров $\chi(L)$-типа (336).
1.4. Простейший суперсимметричный лагранжиан 337
1.5. Минимальная суперсимметричная стандартная модель (MSSM) (I) 341
1.6. Суперсимметричная алгебра 342
1.6.1. Один из путей получения $SU(2)$-алгебры (342). 1.6.2. Суперсимметричные генераторы (заряды) и их алгебра (344). 1.6.3. Суперсимметричные токи (346).
1.7. Супермультиплет 348
1.8. Проблемы и необходимость усложнения 350
1.9. Модель Весса–Зумино 352
1.10. Суперполя 356
1.10.1. SUSY-преобразования полей (356). 1.10.2. Представление SUSY генераторов в виде дифференциальных операторов (359). 1.10.3. Киральные суперполя и их (киральные) компонентные поля (360). 1.10.4. Произведение киральных суперполей (361).
1.11. Векторные (калибровочные) супермультиплеты 363
1.11.1. Абелевый калибровочный супермультиплет (363). 1.11.2. Неабелевы калибровочные супермультиплеты (365).
1.12. Киральные и калибровочные супермультиплеты 367
1.12.1. $U(1)$ векторный и киральный супермультиплеты (367). 1.12.2. Неабелевы супермультиплеты (370).
1.13. Содержание MSSM 372
1.14. Объединение калибровочных констант в MSSM 374
1.15. R-четность 378
1.16. Нарушение SUSY 379
1.16.1. Спонтанное нарушение SUSY (379). 1.16.2. «Мягкое» нарушение SUSY (383). 1.16.3. Ренорм-групповая эволюция параметров в мягко нарушенной MSSM (385).

1.17. Хиггсовский сектор и нарушение электрослабой симметрии в MSSM . . . 388
1.17.1. Скалярный потенциал и условия для электрослабого нарушения симметрии (388). 1.17.2. Массы скалярных хиггсов MSSM на древесном уровне (391). 1.17.3. Константы связи h^0-, H^0- и A^0-бозонов в древесном приближении (394).
1.18. SUSY частицы в MSSM . . . 397
1.18.1. Нейтралино (398). 1.18.2. Чарджино (399). 1.18.3. Глюино (401). 1.18.4. Скварки и слептоны (401).
1.19. Вместо заключения . . . 405

Глава 2. **Техницвет** . . . 407
2.1. Введение . . . 407
2.2. Динамика техницвета . . . 407
2.2.1. Аналогия ТС и КХД (408). 2.2.2. Минимальная ТС-модель (410). 2.2.3. Спектроскопия минимальной ТС-модели (411).
2.3. Модель Farhi–Susskind (FS) . . . 414
2.3.1. Спектроскопия FS-модели (415).
2.4. Расширенный техницвет (ETC) . . . 416
2.4.1. Общая структура ETC (416). 2.4.2. Калибровочная группа G_{ETC} (417). 2.4.3. Низкоэнергетические «реликтовые» ETC-взаимодействия (417). 2.4.4. α-члены и массы технипионов (418). 2.4.5. β-члены и массы лептонов и кварков (419). 2.4.6. γ-члены и нейтральные токи с изменением аромата (FCNC) (420).
2.5. Некоторые модели ETC . . . 421
2.5.1. Техни-ГИМ (TC GIM) (421). 2.5.2. Некоммутативные ETC-модели (421).
2.6. «Бегущий» техницвет (WTC) . . . 422
2.6.1. Подход Швингера–Дайсона к WTC (423). 2.6.2. ТС-теории со многими масштабами (425).
2.7. Суперсимметричный и бозонный техницвет . . . 425
2.7.1. SUSY и TC (425). 2.7.2. Скаляры и техницвет: бозонный техницвет (426).
2.8. Конденсация t-кварка и топцвет . . . 428
2.8.1. t-конденсация в NJL-приближении (428). 2.8.2. Топцвет (430). 2.8.3. Калибровочные группы и механизм «опрокидывания» (431). 2.8.4. Массовые матрицы, СКМ и CP-нарушение в модели топцвета (433).
2.9. Топ «see-saw» механизм . . . 434
2.9.1. Минимальная модель (435). 2.9.2. Включение b-кварка (438).
2.10. Заключение . . . 439
Приложение 1. Однопетлевые косвенные радиационные поправки . . . 440
Приложение 2. Модель Намбу–Иона–Ласинио (NJL) . . . 442

Глава 3. **Маленький хиггс** . . . 445
3.1. Введение . . . 445
3.2. Намбу–голдстоуновские бозоны . . . 446
3.2.1. Как преобразуются NGB? (448).
3.2.2. Эффективный лагранжиан NGB (449).
3.3. Построение маленького хиггса: $SU(3)$-случай . . . 449
3.3.1. Калибровочные взаимодействия (450). 3.3.2. Симметрийные аргументы, коллективное нарушение (453). 3.3.3. Юкавская связь t-кварка (453). 3.3.4. Другие юкавские связи (455).
3.4. Цвет и гиперзаряд . . . 456

3.5. Четверная хиггсовская связь . . . 456
3.6. Простейший маленький хиггс . . . 458
3.7. Модели, основанные на произведении групп . . . 458
3.7.1. Минимальный moose (458). 3.7.2. Калибровочные взаимодействия (459). 3.7.3. Четверная связь (461). 3.7.4. Юкавская связь t-кварка в модели moose (462). 3.7.5. Электрослабое нарушение симметрии (463).
3.8. Самый маленький хиггс . . . 465
3.8.1. Калибровочные взаимодействия самого маленького хиггса (465). 3.8.2. Юкавская связь t-кварка (467).
3.9. Феноменология маленького хиггса . . . 468
3.9.1. Точные электрослабые ограничения (468). 3.9.2. Рождение партнеров маленького хиггса (469).
3.10. Заключение . . . 470

Глава 4. **Внешние (дополнительные) измерения** . . . 471

4.1. Введение . . . 471
4.2. Одно дополнительное измерение . . . 472
4.3. d дополнительных измерений . . . 476
4.4. Большие внешние измерения (модель ADD) . . . 477
4.5. «Искаженные» внешние измерения (модель RS) . . . 479
4.6. Универсальные внешние измерения . . . 482
Приложение. Экспериментальное исследование формы внешних измерений 483

Глава 5. **Нарушение электрослабой симметрии в теориях с дополнительными измерениями** . . . 486

5.1. Введение . . . 486
5.2. Калибровочные теории на интервале в дополнительных измерениях . . . 486
5.2.1. Скалярное поле на интервале (487). 5.2.2. Фиксирование калибровки и граничные условия (490). 5.2.3. Калибровочные теории с граничными скалярами (492). 5.2.4. Орбифолд или интервал? (493).
5.3. Электрослабое нарушение симметрии без хиггса . . . 495
5.3.1. Высокоэнергетическое поведение амплитуд рассеяния (495). 5.3.2. Наивная безхиггсовская модель (498). 5.3.3. Custodial $SU(2)$-симметрия и плоское пространство безхиггсовской модели (499). 5.3.4. AdS/CFT соответствие (503). 5.3.5. Искаженное пространство безхиггсовской модели (504).
5.4. Фермионы в дополнительных измерениях . . . 508
5.4.1. Фермионы в 4-мерном пространстве (508). 5.4.2. Фермионы в плоском дополнительном измерении (509). 5.4.3. Граничные условия для фермионов в 5-ти измерениях (510). 5.4.4. Примеры и приложения (512). 5.4.5. Фермионы в искаженном пространстве (513). 5.4.6. Фермионные массы в безхиггсовской модели (515).
5.5. Электрослабые наблюдаемые в теориях вне стандартной модели . . . 516
5.5.1. Электрослабые наблюдаемые и эффективный лагранжиан (516). 5.5.2. Электрослабые наблюдаемые и дополнительные измерения (520). 5.5.3. Электрослабые наблюдаемые и безхиггсовские модели (523).

Глава 6. **На пути Большого объединения** . . . 525

6.1. Введение . . . 525
6.2. Большое объединение . . . 526

6.3. Масштаб объединения 528
6.4. Большое объединение и дополнительные измерения 531
6.5. Объединение калибровочных констант 534
6.6. Распад протона 535
6.7. Кварк-лептонные массовые соотношения 536
6.8. Минимальная модель 536
6.9. Объединение юкавских констант 537
6.10. Предсказания распада протона 538
Приложение. Массы нейтрино в теориях большого объединения 540
1. Модели, основанные на группе $SU(5)$ (542). 2. Модели, основанные на группе $SO(10)$ (542).

Глава 7. **Темная материя и темная энергия** 546
7.1. Введение 546
7.2. Состав Вселенной 547
7.3. Температурная Вселенная 551
7.4. Радиационно-доминированная эпоха 552
7.5. Доминантность полей материи 553
7.6. Эпоха вакуумной доминантности 554
7.7. Темная материя 554
7.8. Реликтовый избыток темной материи 556
7.8.1. Уравнение Больцмана (556). 7.8.2. Приближенные решения уравнения Больцмана (558).
7.9. Суперсимметрия и ее космологические приложения 560
7.9.1. Нейтралино (561). 7.9.2. Гравитино (562).
7.10. Темная энергия и космологическая постоянная 564
7.11. Заключение 569

Глава 8. **Струны «с птичьего полета»** 571
8.1. Введение 571
8.2. Общая теория относительности и квантовая теория поля: совместимы ли они? 573
8.3. Пертурбативная теория струн 576
8.3.1. Пять теорий суперструн (576). 8.3.2. Компактификация дополнительных измерений (577). 8.3.3. T-дуальность и струнная геометрия (577).
8.4. Непертурбативная теория струн 578
8.4.1. S-дуальность (578). 8.4.2. M-теория и одиннадцатое измерение (579). 8.4.3. p- и D-браны (579).

Заключение 581
Список литературы 582

Моим дорогим
Вале и Мише

Предисловие

В начале 70-х годов прошлого столетия были разработаны теоретические основы стандартной модели элементарных частиц и их взаимодействий. Доказана перенормируемость и унитарность $SU(2)_L \times U(1)$ янг–миллсовского лагранжиана, включающего хиггсовский механизм нарушения электрослабой симметрии. Примерно в это же время открыто свойство асимптотической свободы КХД — калибровочной теории сильных взаимодействий. К основным достижениям этого периода следует отнести и СКМ-механизм CP-нарушения с тремя поколениями фермионов.

Последующие 30 лет связаны как с совершенствованием и осмыслением теоретических проблем стандартной модели, так и с успешными попытками описания экспериментальных данных. Надо сказать, что с момента своего создания стандартная модель содержала ряд проблем, разрешение которых требовало выхода за рамки стандартной модели. Среди них: а) каков источник электрослабого нарушения? б) почему стандартная модель имеет калибровочную группу симметрии $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$? в) почему теория содержит три поколения? Наконец, как быть с квантовой гравитацией и космологической константой? В попытках ответа на эти (и другие) вопросы возникло много весьма интересных и плодотворных идей. Если попытаться их выстроить в хронологическом порядке, то список будет выглядеть примерно так.

1) Теории большого объединения (1974), пытающиеся распространить идеи Максвелла на калибровочные взаимодействия.

2) Суперсимметрия (1974) — новый тип пространственно-временных симметрий, разрешающий проблему иерархий.

3) «See-saw» механизм (1977), обеспечивающий динамическое объяснение малости масс нейтрино.

4) Техницвет (1979) как динамическая основа электрослабого нарушения.

5) Суперструны (1984) — кандидат на теорию квантовой гравитации и, возможно, на «Теорию Всего».

6) Идея дополнительных измерений (1999), позволяющая объяснить огромную разницу между интенсивностями калибровочных и гравитационных взаимодействий.

Следует иметь в виду, что стандартная модель элементарных частиц развивалась и развивается вместе со стандартной космологической моделью. Вселенная, этот «ускоритель для бедных», дает бесценную информацию для физики элементарных частиц, ограничивая «разгул фантазии» теоретиков. В свою очередь, стандартная модель и ее расширения призваны объяснить свойства Вселенной, наличие темной материи и темной энергии, тонкую структуру микроволнового излучения, образование крупномасштабных структур и т. д.

Что касается экспериментальной физики элементарных частиц, то в этой области предпринимались серьезные попытки проверки теоретических идей, которые упоминались выше. Исследовался распад протона и нейтронные осцилляции, предсказываемые теориями большого объединения. Значительные усилия предпринимались по поиску суперсимметричных частиц, масс нейтрино и осцилляций, проявлений

дополнительных измерений (отклонений от закона Ньютона и испускания гравитонов в жестких столкновениях). Пожалуй, за исключением обнаружения осцилляций нейтрино, других ярких свидетельств существования «новой физики» пока не обнаружено. Почему же не оставляет чувство, что «новая физика» находится где-то рядом, и она обнаружит себя на следующем поколении ускорителей (LHC, ILC) при нынешнем поколении исследователей? Для этих ожиданий имеются как теоретические, так и экспериментальные предпосылки.

Есть основания полагать, что на ускорителе LHC удастся обнаружить хиггсовский бозон и прояснить таким образом механизм электрослабого нарушения симметрии. Стандартная модель на 95% уровне достоверности дает ограничение на массу Хиггс-бозона $m_H \leq 200$ ГэВ. Данные же LEP определили нижнюю границу $m_H > 114$ ГэВ. В этом интервале масс коллаборации ATLAS и CMS способны выделить сигнал образования Хиггс-бозона при интегральной светимости $(1 \div 10)$ фб$^{-1}$. Если Хиггс-бозон не будет обнаружен в указанном интервале масс, стандартная модель встретится с серьезными трудностями. Это, скорее всего, будет означать, что сечения образования Хиггс-бозона значительно ниже, чем предсказываются стандартной моделью. Это было бы сильным указанием существования новой физики в ТэВ-ной области энергий. Нельзя полностью исключить появления хиггса с массой в несколько сотен ГэВ, но такая большая масса находится в противоречии с электрослабыми данными. Отсутствие хиггса во всей области 114 ГэВ $< m_H \leq 1$ ТэВ также будет свидетельствовать о «новой физике»: при таких энергиях нарушается пертурбативная унитарность в WW-рассеянии и появляются новые резонансы.

Таким образом, возможностей достаточно много, и все они так или иначе приводят к новой физике. Остановимся более подробно на кажущейся наиболее вероятной ситуации с обнаружением Хиггс-бозона, предсказываемой стандартной моделью. В стандартной модели радиационные поправки к массе Хиггс-бозона, связанные с t-кварком, приводят к сдвигу квадрата массы

$$\Delta m_H^2 = \frac{6G_F}{\sqrt{2}\pi^2} m_t^2 \Lambda^2,$$

где Λ — верхний предел интегрирования по импульсу в петле. Δm_H^2 квадратично расходится по параметру Λ, который, в принципе, можно сделать сколь угодно большим. Обычная процедура теории поля по включению расходящейся части в «голую» хиггсовскую массу выглядит совершенно неестественно: конечный результат получается «точной подгонкой» очень больших чисел. Это так называемая проблема иерархий. Для разрешения этой проблемы за последние 30 лет предложено несколько подходов, рассматриваемых в данной книге. Это, прежде всего, суперсимметрия, техницвет, большие дополнительные измерения. Их общая идея — попытаться связать хиггсовский бозон с некоторой новой симметрией, подавляющей появление квадратичной расходимости в поправке к квадрату массы хиггса. В случае суперсимметрии — это предположение о существовании для каждого бозона фермионного партнера и наоборот. Например, вклад в Δm_H^2 от стоп-кварка способен в точности компенсировать вклад топ-кварка и т. д.

В теориях малого хиггса вводится глобальная симметрия по отношению к сдвигу хиггсовского поля $H \to H + a$. При этом лагранжиан теорий содержит только слагаемые, пропорциональные производным хиггсовского поля. При нарушении этой симметрии появляются лишь малые поправки к массе хиггса. В этих теориях возникают новые тяжелые партнеры t-кварка, новые калибровочные бозоны W' и Z', причем массы всех этих частиц ожидаются в области нескольких ТэВ.

В теориях с дополнительными измерениями хиггс — компонента калибровочных полей в дополнительном измерении, ведущая себя подобно скаляру в 4-х измерениях. В этих теориях квадратичная расходимость устраняется за счет вклада новых частиц — мод Калуцы–Клейна.

Помимо этих теоретических предпосылок «новой физики», существуют и экспериментальные предпосылки. К ним относятся рассматриваемые в книге проблемы массы и смешивания нейтрино, темная материя и барионная асимметрия Вселенной.

Не следует думать, что «новая физика» начнет проявлять себя только при высоких (ТэВ-ных?) энергиях. Вполне возможно, что она присутствует и в низкоэнергетических наблюдаемых. Так, для аномального магнитного момента мюона $a_\mu = (g-2)_\mu$ получено

$$a_\mu^{\text{станд.мод.}} - a_\mu^{\text{эксп.}} = (2 \pm 1) \cdot 10^{-9}.$$

Этот результат получен в двух экспериментах, и оба указывают на отклонение от предсказаний стандартной модели на уровне 2σ.

Коллаборация CDF определила частоту B_s-осцилляций и отношение

$$\frac{\Delta M_{B_s}^{\text{эксп.}}}{\Delta M_{B_s}^{\text{станд.мод.}}} = 0{,}80 \pm 0{,}12.$$

Данные по a_μ и B_s-осцилляциям согласуются с суперсимметричным расширением стандартной модели и существованием заряженных хиггсовских бозонов в интервале масс в несколько сотен ГэВ.

Таким образом, есть вполне обоснованные ожидания, что ускорители LHC и ILC откроют нам «terra incognita» новой физики, и нам нужно быть готовым к осмыслению этой новой физики.

Книга состоит из двух частей. В части I обсуждается стандартная модель. Рассматриваются вопросы симметрий, квантовой хромодинамики, электрослабой теории, а также основы физики нейтрино, CP-нарушения и CP-нарушения в ранней Вселенной. Часть II включает обсуждение расширений стандартной модели: суперсимметрии, техницвета, маленького хиггса, дополнительных измерений. В части II содержится также рассмотрение вопросов нарушения электрослабой симметрии в теориях с дополнительными измерениями, большого объединения, темной материи и темной энергии, а также струн.

Изначально предполагалось, что достаточно подготовленный читатель способен обращаться к интересующей его теме (главе), независимо от других глав. Удалось ли это — судить читателю.

Часть материала книги составляет основу курса лекций, читаемых автором для студентов 4-го и 5-го курса факультета экспериментальной и теоретической физики МИФИ. Курсу лекций «Фундаментальные взаимодействия» в МИФИ предшествует изучение квантовой теории поля и общей теории относительности.

С благодарностью вспоминаю свои годы учебы в МИФИ и прекрасные лекции по физике частиц И. Ю. Кобзарева. Его способ изложения вопросов симметрий стандартной модели я попытался сохранить в этой книге. Мои представления о партонной модели, КХД и поведении КХД при высоких плотностях энергии сформировались в совместных работах и обсуждениях с Ю. П. Никитиным. Мой интерес к вопросам электрослабой теории был связан с изучением замечательной книги Л. Б. Окуня «Лептоны и кварки».

Подбор материала книги во многом связан с личными предпочтениями автора. При подготовке рукописи использованы результаты работ многих авторов, среди которых следует отметить G. Altarelli, U. Aglietti, P. Aurenche, I. Aitchison, S. Bilenky,

W. Bernreuther, C. Csaki, M. Dine, L. Hall, C. Hill, L. McLerran, A. Pich, T. Rizzo, M. Schmaltz, R. Sundrum. S. Willenbrock, F. Wilczek.

Выражаю глубокую признательность Б. А. Долгошеину и А. А. Петрухину за интерес к работе и многочисленные обсуждения.

Я глубоко признателен К. О. Лапидусу за помощь в подготовке рукописи.

В. Емельянов

Август 2006 г., Москва

ЧАСТЬ I

СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ

Введение

Идея о том, что простота и упорядоченность лежит в основе сложных и разнообразных явлений окружающего нас мира всегда привлекала особое внимание как философов, так и физиков. Исследователям хотелось обнаружить фундаментальные составляющие, из которых можно построить материю и объяснить ее взаимодействия. Открытие атома, а также электрона и протона, явилось решающим аргументом в пользу концепции фундаментальных составляющих материи или фундаментальных частиц. История физики связана с открытием все новых уровней строения материи, причем каждый новый уровень оказывался более фундаментальным, чем предыдущий. Концепция фундаментальности эволюционирует во времени, причем эта эволюция во многом определяется теми источниками энергии, которые имеются в распоряжении экспериментатора. Чем выше энергия частицы, используемой для исследования структуры вещества, тем меньше длина волны этой частицы, тем с лучшим разрешением изучается материя. Таким образом было установлено, что вещество состоит из молекул, молекулы — из атомов, атомы — из электронов и ядер, а ядра — из протонов и нейтронов.

Современные ускорители способны обеспечить пространственное разрешение на уровне 10^{-16} см. На таких масштабах проявляет себя совершенно новый уровень строения материи — уровень кварков, лептонов и других новых «фундаментальных» частиц. Физика частиц становится синонимом физики высоких энергий. Рассматриваемый сравнительно недавно как фундаментальная частица, протон потерял свой фундаментальный статус. Оказалось, что протон, как и другие сильновзаимодействующие частицы — адроны, состоит из более фундаментальных частиц, названных кварками. В состав протона и нейтрона входят два типа кварков, обозначаемые u, d. Эти кварки, наряду с первыми известными лептонами (электроном e и его нейтрино ν_e), формируют стабильную материю Вселенной. Открытие нестабильных адронов потребовало других типов кварков, которые вместе с позднее открытыми лептонами образуют поколения (семейства). Сейчас известно три поколения кварков и лептонов: (u, d, ν_e, e), (c, s, ν_μ, μ), (t, b, ν_τ, τ). При имеющихся энергиях нельзя говорить о существовании структуры у кварков и лептонов, поэтому эти частицы рассматриваются как точечные. Изучение структуры материи неизбежно связано с изучением фундаментальных сил, описывающих взаимодействия между фундаментальными составляющими на том или ином уровне строения материи. Несмотря на чрезвычайное разнообразие и сложность проявления различных взаимодействий, Природа, по-видимому, проявила «экономность», сведя их к четырем типам фундаментальных взаимодействий. Два из них — гравитация и электромагнетизм известны уже давно, с них и началось изучение фундаментальных взаимодействий. Они действуют на больших расстояниях и определяют множество известных явлений от приливов и отливов, орбит планет до распространения радиоволн и цветов радуги. Два других типа взаимодействий, названных сильными и слабыми, не наблюдаются в повседневной жизни, поскольку их радиус действия ограничен, соответственно, 10^{-13} см и 10^{-16} см. Сильные взаимодействия (еще их называют адронными) связывают кварки в адроны и обеспечивают стабильность материи. Слабые взаимодействия проявляют себя в β-распадах некоторых нейтронно-избыточных ядер и медленных распадах многих частиц. Несмотря на свою «слабость», эти взаимодействия весьма

существенны в эволюции звезд. Еще совсем недавно каждое из фундаментальных взаимодействий описывалось своей собственной теорией. Гравитация — теориями Ньютона и Эйнштейна, электромагнетизм — теорией Максвелла, сильные взаимодействия — теорией Юкавы, наконец, слабые взаимодействия — теорией Ферми. Однако физики всегда размышляли о возможности существования единой теории всех взаимодействий. В этом направлении, наряду с успехами в физике частиц, за последние несколько десятилетий достигнут очевидный прогресс. Теперь три из четырех фундаментальных взаимодействий описываются квантовыми теориями, имеющими общую математическую форму. Эти теории основаны на постулате симметрии — принципе локальной калибровочной инвариантности. Они называются калибровочными теориями. Лагранжиан этих теорий инвариантен относительно некоторого класса преобразований, проведенных над всеми полями частиц в различных точках пространства и в различные моменты времени. Среди этих теорий физически реалистичной и математически полной выглядит *стандартная модель*, включающая сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия. Эта модель единым образом описывает три из четырех фундаментальных взаимодействия и находится в замечательном согласии с экспериментальными данными.

Несмотря на свои очевидные достижения, стандартная модель оставляет неразрешенными несколько проблем:

1) Какова причина нарушения электрослабой симметрии? Как известно, такое нарушение симметрии является необходимым условием приобретения масс бозонов и фермионов в теории за счет поглощения голдстоуновских бозонов, ассоциированных со спонтанным нарушением симметрии. В стандартной модели нарушение симметрии происходит за счет механизма Хиггса и введения скалярного потенциала, обеспечивающего это нарушение. Почему параметры потенциала Природа выбрала именно такими, какие необходимы для спонтанного нарушения симметрии? Вполне возможно, что электрослабое нарушение симметрии реализуется совсем другим механизмом, не связанным с существованием скалярных полей.

2) Характерный масштаб нарушения электрослабой симметрии составляет $\sim 10^2$ ГэВ. Планковский масштаб, на котором становятся существенными гравитационные эффекты, $\sim 10^{19}$ ГэВ. Если стандартная модель описывает физику во всем интервале энергий, то как сопоставить эти столь отличающиеся масштабы? Это так называемая проблема иерархий, существующая в стандартной модели.

3) Как определить спектр масс фундаментальных составляющих стандартной модели и как много параметров, характеризующих частиц, действительно фундаментальны?

Недавние экспериментальные данные по осцилляциям нейтрино показали, что эти частицы обладают массой. В стандартной модели нейтрино должно быть безмассовым. Наконец, астрономические наблюдения указывают на наличие во Вселенной скрытой массы и скрытой энергии, так же не описываемой в рамках стандартной модели. Очень хотелось бы думать, что существует общая теория, которая содержит стандартную модель в качестве низкоэнергетического предела. Следуя этой логике, вне пределов применимости стандартной модели нас ожидает новая физика. Возможно, мы находимся на «пороге» новой физики в ТэВ-ной области энергий, уже достижимой на Тэватроне и особенно на строящемся ускорителе LHC.

Было бы замечательно иметь теорию, которая содержала бы в качестве низкоэнергетического предела стандартную модель и описывала ожидаемую новую физику. К сожалению, такой теории сейчас нет, а есть различные модели — расширения стандартной модели, пытающиеся преодолеть трудности стандартной модели. Их рассмотрению будет посвящена значительная часть книги. Но прежде чем рассматри-

вать расширения стандартной модели, следует обсудить составляющие стандартной модели и их взаимодействия.

Частицы стандартной модели. В физике частиц все частицы можно разделить на два класса: составляющие материи, включающие кварки и лептоны, и кванты взаимодействия — фотоны и другие переносчики взаимодействий. Опишем сначала первую группу частиц — лептоны и кварки.

Лептоны. Считается, что это частицы, не имеющие структуры и не участвующие в сильных взаимодействиях. Все они обладают спином 1/2, описываются статистикой Ферми–Дирака, т. е. являются фермионами. В стандартной модели рассматривается шесть различных типов лептонов, отличающихся их массами, электрическими зарядами и характером взаимодействий. Три лептона: электрон e^-, мюон μ^- и тау τ^- имеют электрический заряд, равный (−1). Три других лептона — нейтрино, все они электрически нейтральные и, по-видимому, имеют очень малые массы (табл. 1).

Таблица 1

Лептон	Символ	Масса, МэВ	Заряд
электронное нейтрино	ν_e	$< 15 \cdot 10^{-6}$	0
электрон	e^-	0,5	−1
мюонное нейтрино	ν_μ	$< 0{,}17$	0
мюон	μ^-	105,7	−1
τ-нейтрино	ν_τ	< 19	0
тау	τ^-	1777	−1

Согласно основным представлениям квантовой теории поля, каждой частице соответствует античастица (она может как отличаться, так и не отличаться от самой частицы). Частица и античастица имеют одинаковую массу, спин и время жизни — это следствие CPT-теоремы. Однако их электрические заряды, как и другие характеристики, называемые обобщенными зарядами, одинаковые по величине, но противоположные по знаку. Поэтому антиэлектрон (позитрон) e^+, антимюон μ^+ и антитау τ^+ имеют положительный заряд (+1), а три антинейтрино $\overline{\nu}_e$, $\overline{\nu}_\mu$, $\overline{\nu}_\tau$ электрически нейтральны. Примером обобщенного заряда является лептонное число L_l, определяемое как квантовое число, принимающее значение (+1) для лептонов, (−1) для антилептонов и 0 для любых других частиц. Экспериментально установлено, что разность между числом лептонов и антилептонов, подобно электрическому заряду, сохраняется.

Каждый заряженный лептон ассоциируется со своим нейтрино и образует семейство лептонов. Известно, что в стандартной модели существует три лептонных семейства: (ν_e, e^-), (ν_μ, μ^-) и (ν_τ, τ^-). Лептонные семейства сохраняются в процессах, описываемых стандартной моделью. Это свойство описывается путем введения трех других обобщенных зарядов — электронного числа L_e, мюонного числа L_μ и тау-лептонного числа L_τ. Каждому из этих чисел приписывается значение (+1) для соответствующего заряженного лептона и его нейтрино, значение (−1) для антилептонов и 0 для всех других частиц.

Кварки. В настоящее время известно шесть различных сортов или ароматов кварков: u, d, c, s, t и b. Они, как и лептоны, образуют три семейства: (u, d), (c, s) и (t, b). Кварки первого семейства входят как фундаментальные составляющие существующей вокруг нас материи. Кварки же двух других поколений, имеющие

меньшие времена жизни, образуют нестабильные частицы. Кварки, как и лептоны, имеют спин 1/2, т. е. могут находиться в двух спиновых состояниях. На этом их сходство с лептонами заканчивается (см. табл. 2).

Таблица 2

Аромат	Символ	Масса (свободная), ГэВ	Конституентная масса, ГэВ	Заряд
up	u	$(5{,}6 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-3}$	0,33	2/3
down	d	$(9{,}9 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-3}$	0,33	–1/3
charm	c	$1{,}35 \pm 0{,}05$	1,5	2/3
strange	s	$0{,}199 \pm 0{,}033$	0,5	–1/3
top	t		175	2/3
bottom	b		4,5	–1/3

Все кварки имеют электрические заряды: u, c, t имеют заряд (2/3), а d, s, b — заряд (–1/3) в единицах элементарного заряда $e > 0$. Соответствующие антикварки несут заряды (–2/3) для $\overline{u}$, $\overline{c}$ и $\overline{t}$ и (+1/3) для $\overline{d}$, $\overline{s}$ и $\overline{b}$. Чтобы учесть еще один экспериментальный закон сохранения, вводят другой обобщенный заряд — барионное число N_B, которое равно (+1/3) для кварков, (–1/3) для антикварков и 0 для лептонов и антилептонов. Но что действительно отличает кварки от лептонов — это наличие у кварков (и антикварков) квантового числа, называемого цветом. Каждый кварк способен находиться в одном из трех состояний, которым сопоставили названия: красный, голубой и зеленый. Цвет играет роль заряда в сильных взаимодействиях кварков. Поскольку лептоны не имеют цветового заряда, они не участвуют в сильных взаимодействиях.

Частицы с дробным электрическими зарядами не наблюдались как свободные частицы. Это связано с тем, что кварки, в отличие от лептонов, не могут существовать изолированно, они образуют кластеры (мезоны, барионы), суммарный заряд которых оказывается целым. Мезоны получаются путем объединения кварка с антикварком противоположного цвета, а барионы строятся из трех кварков с различными базисными цветами. Такие образования оказываются нейтральными по цвету.

Так как кварки в свободном состоянии не существуют, то определение их масс проблематично и включает в себя неоднозначности. Можно определить массу кварка как среднюю энергию кварка, связанного в адроне (конституентная масса). Или как массу кварка, проявляющуюся в так называемых «жестких» процессах. Ее называют «токовой» (свободной) массой, так как она входит в кварковые токи. Так или иначе, кварковые массы определяются экспериментально, хотя хотелось бы их вычислять «из первых принципов».

Взаимодействия. Частицы участвуют в четырех типах взаимодействий. Рассмотрим эти типы взаимодействий более подробно.

1. *Гравитационные взаимодействия.* Сила гравитационного взаимодействия между двумя частицами пропорциональна их гравитационным зарядам, т. е. массам. Это дальнодействующая сила, определяющая движение планет и галактик. Гравитационный потенциал между двумя протонами

$$V = G_N \frac{m_p^2}{r},$$

где ньютоновская гравитационная постоянная

$$G_N = 0{,}67 \cdot 10^{-38} \frac{1}{\text{ГэВ}^2}.$$

Для протона

$$m_p \simeq 1\ \text{ГэВ}, \quad r_p = 10^{-13}\ \text{см} \simeq 5\frac{1}{\text{ГэВ}},$$

$$V(r_p) \simeq 10^{-39}\ \text{ГэВ}.$$

Таким образом, на микроскопическом масштабе ($\sim 10^{-13}$ см) гравитационная потенциальная энергия чрезвычайно мала.

Найдем

$$\sqrt{G_N} = \frac{1}{M_{\text{Pl}}} \simeq 0{,}8 \cdot 10^{-19}\text{ГэВ}^{-1} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}\ \text{см},$$

$$\frac{1}{\sqrt{G_N}} = M_{\text{Pl}} \simeq 10^{19}\ \text{ГэВ},$$

где M_{Pl} называется массой Планка. Гравитационные взаимодействия становятся существенными на масштабах планковской массы или расстояний $\simeq 10^{-33}$ см. Если предположить, что на планковском масштабе гравитационное взаимодействие того же порядка величины, что и электромагнитное взаимодействие ($\alpha = e_M^2/(\hbar c) = 1/137$, $e_M^2 = e^2/(4\pi\varepsilon_0)$), то эффективное гравитационное взаимодействие на масштабе 1 ГэВ составляет

$$\alpha_{G_N} \simeq \frac{(1\ \text{ГэВ})^2}{M_{\text{Pl}}^2}\alpha \simeq 10^{-38}\alpha \simeq 10^{-40}.$$

Таким образом, при имеющихся энергиях гравитационным взаимодействием в физике частиц можно пренебречь.

2. *Слабые взаимодействия.* Эти взаимодействия «ответственны» за радиоактивные превращения типа

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e,$$

$$O^{14} \to N^{14} + e^- + \overline{\nu}_e.$$

Время полураспада для O^{14} составляет 714 с. По времени полураспада можно определить интенсивность этого взаимодействия, задаваемую фермиевской константой

$$G_F \simeq 10^{-5}\ \frac{1}{\text{ГэВ}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{G_F}} \simeq 300\ \text{ГэВ},$$

$$\sqrt{G_F} \simeq 0{,}7 \cdot 10^{-16}\ \text{см}.$$

Эти соотношения определяют масштаб, на котором слабые взаимодействия становятся существенными, например, сравнимыми с электромагнитными взаимодействиями. Оценим слабую константу на масштабе 1 ГэВ:

$$\alpha_W = \frac{(1\ \text{ГэВ})^2}{(300\ \text{ГэВ})^2}\alpha \simeq 10^{-5}\alpha.$$

3. *Электромагнитные взаимодействия.* Электромагнитные силы действуют между двумя электрически заряженными частицами. Например, отрицательно заряженный электрон и положительно заряженный протон притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению их зарядов. Эти силы обеспечивают стабильность атомов и проявляют себя посредством электромагнитного излучения. Фотон является переносчиком электромагнитного взаимодействия. Электромагнит-

ная потенциальная энергия

$$V = \frac{e_M^2}{r}.$$

Для электрона и протона, связанных в атом водорода, этот потенциал обеспечивает энергию связи электрона в атоме, определяемую формулой Бора:

$$|E_1| = \frac{1}{2}\alpha^2(\mu c^2),$$

где μ — приведенная масса системы. Для атома водорода $\mu \simeq m_e \simeq 0{,}5$ МэВ и $|E_1| \simeq 13{,}8$ эВ. Для гипотетического атома, состоящего из протона и антипротона $\mu \simeq m_p/2 \simeq 1000 m_e$, энергия связи составляет $|E_1^{p\overline{p}}| \simeq 14$ КэВ. Как видно из приведенных выше соотношений, интенсивность электромагнитного взаимодействия определяется безразмерной величиной

$$\alpha = \frac{1}{137}.$$

4. *Сильные взаимодействия.* Эти взаимодействия связывают протоны и нейтроны в ядра. Как мы видели, электромагнитная энергия связи $p\overline{p}$-атома составляет примерно 14 КэВ, энергия же связи дейтрона (связанного состояния протона и нейтрона) $\simeq 2$ МэВ. Ядерные силы имеют интенсивность, превышающую интенсивность электромагнитных сил на несколько порядков величины. Действуют же ядерные силы на расстояниях порядка 10^{-13} см.

Таким образом, относительные интенсивности четырех типов взаимодействий

$$10^{-40} : 10^{-7} : 10^{-2} : 1.$$

5. *Характерные сечения и радиусы взаимодействий.* Экспериментальные данные по рассеянию электронов на ядрах можно объяснить с помощью электромагнитных взаимодействий. Сечение рассеяния γ-квантов на протоне при низких энергиях задается формулой Томсона

$$\sigma_\gamma = \frac{8\pi}{3}\alpha^2\left(\frac{1}{m_p}\right)^2 \simeq 10^{-31}\ \text{см}^2.$$

Нейтрино участвует в слабых взаимодействиях, и сечение процесса $\overline{\nu}_e p \to n e^+$ составляет

$$\sigma_W \simeq 10^{-43}\ \text{см}^2.$$

Сечение же нуклон-нуклонного рассеяния имеет порядок величины

$$\sigma_N \simeq 10^{-24}\ \text{см}^2.$$

Действительно, сечения взаимодействия электрона и нейтрино отличаются весьма значительно от сечений, характерных для сильных взаимодействий.

Теперь обсудим характерные радиусы действия рассматриваемых фундаментальных взаимодействий.

Вследствие квантовых флуктуаций, электрон способен испустить фотон, который поглощает другой электрон (рис. 1).

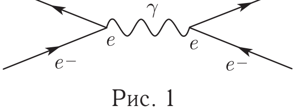


Рис. 1

Такой фотон способен существовать время

$$\Delta t \sim \frac{h}{\Delta E} = 1/\omega,$$

где $\Delta E = \omega$ — энергия фотона. Поскольку ненаблюдаемый фотон существует время, меньшее $1/\omega$, он пролетает расстояние

$$R \cong \frac{c}{\omega}.$$

Так как ω может быть произвольно малой, то R может быть произвольно большим. Таким образом, электромагнитные силы имеют бесконечный радиус действия.

Если предположить, что слабые взаимодействия переносятся, подобно электромагнитным взаимодействиям, векторным бозоном W, то из-за малого радиуса слабых взаимодействий векторный бозон должен быть массивным (рис. 2).

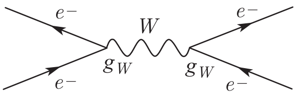


Рис. 2

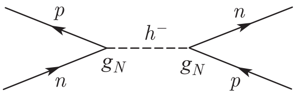


Рис. 3

Максимальное расстояние, на которое может распространяться виртуальный W-бозон, определяется соотношением неопределенностей:

$$R_W \simeq \frac{1}{m_W}.$$

W-бозон был обнаружен экспериментально в ЦЕРН в 1983 году, и его масса $m_W \simeq 80$ ГэВ. Тогда характерный радиус слабых взаимодействий

$$R_W \simeq 2 \cdot 10^{-16}\text{см}.$$

Если сильные взаимодействия осуществляются путем обмена частицей с массой m_h (рис. 3), то радиус сильных взаимодействий

$$R_h \simeq \frac{1}{m_h}.$$

Поскольку радиус сильных взаимодействий $\simeq 10^{-13}$ см, то масса обменной частицы $m_h \simeq 100$ МэВ. В 1935 г. Юкава предсказал существование π-мезона с подобным значением массы. Такая частица была открыта в 1938 году, но это был не пион Юкавы, а μ-мезон, не участвовавший в сильных взаимодействиях. Пион был открыт в 1947 году в распаде

$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu,$$

где $\overline{\nu}_\mu$ — мюонное антинейтрино. Масса пиона оказалась равной $\simeq 140$ МэВ, поэтому радиус сильных взаимодействий

$$R_h \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{см}.$$

ГЛАВА 1

СИММЕТРИИ И ГРУППЫ СИММЕТРИЙ В ФИЗИКЕ ЧАСТИЦ

1.1. Введение. Типы симметрий

История физики содержит множество примеров, показывающих важность симметрийного подхода к анализу экспериментальных данных и развитию новых представлений. Например, загадочные свойства атомов в периодической таблице выглядят весьма естественными при рассмотрении их вращательной симметрии. Другой пример — теория относительности становится весьма элегантной, если ее сформулировать «из первых принципов» и воспользоваться Лоренц-инвариантностью. Не менее важный пример использования симметрийных соображений — предсказание В. Паули в 1930 г. существования электронного нейтрино, основанное на сохранении энергии, импульса и углового момента.

Как уже обсуждалось выше, каждая частица определяется набором квантовых чисел. Эти числа характеризуют «внутренние» свойства частицы. Их и называют «внутренними», чтобы подчеркнуть, что они не имеют отношения к кинетическим состояниям частицы, характеризуемым законами сохранения энергии, импульса и углового момента.

Существование квантового числа в системе всегда возникает вследствие инвариантности системы относительно глобального преобразования, не зависящего от координат пространственно-временной точки, где оно было произведено. Достаточно простого примера, чтобы проиллюстрировать общую ситуацию. Рассмотрим две частицы в системе отсчета, в которой их энергия взаимодействия зависит только от относительного расстояния между ними. При смещении начала координат в другое положение никаких изменений физического состояния системы не происходит. Полный импульс системы остается постоянным во времени, поскольку его изменение определяется полным градиентом энергии взаимодействия, а этот градиент равен нулю. Таким образом, если имеется физическая система, в которой абсолютные положения частиц ненаблюдаемы (энергия взаимодействия зависит от относительных расстояний) и если к этой системе применяется геометрическое преобразование — пространственная трансляция, то следствием этого преобразования является сохранение импульса. В табл. 1 представлены свойства некоторых симметрий, имеющих отношение к физике частиц.

Существуют три типа симметрий.

1. *Непрерывные симметрии пространства–времени.* Соответствующие им квантовые числа аддитивны, т. е. квантовое число, связанное с заданной симметрией составной системы, получается путем сложения (алгебраического или векторного) квантовых чисел компонент системы.

2. *Дискретные симметрии.* В этом случае квантовые числа мультипликативны: квантовое число составной системы задается произведением квантовых чисел всех составляющих системы.

Таблица 1

Преобразования	**Законы сохранения**	**Ненаблюдаемые**
Непрерывные преобразования пространства–времени		
пространственная трансляция	импульс	абсолютное положение
трансляция во времени	энергия	абсолютное время
вращение	угловой момент	абсолютная ориентация
лоренцевское преобразование	групповые генераторы	абсолютная скорость
Дискретные преобразования		
пространственная инверсия	четность	различие между левым и правым
инверсия времени	инвариантность по отношению к инверсии времени	абсолютное направление времени
зарядовое сопряжение	зарядовая четность	абсолютный знак заряда
фазовые преобразования $\psi \to e^{i\alpha N}\psi$	обобщенный заряд	относительный фазовый угол между различными зарядами

3. *Унитарные симметрии.* С ними связаны фазовые преобразования полей или вращений во «внутреннем» пространстве системы. Таким преобразованиям симметрии соответствует сохранение обобщенного заряда (электрический заряд, барионное или лептонное число) или сохранение изоспина, ароматов, цветов. Квантовые числа преобразований унитарной симметрии аддитивны.

Это перечисление симметрий было бы не полным без упоминания о перестановочной симметрии в системе тождественных частиц. Согласно общему принципу квантовой теории поля (известному как связь между спином и статистикой), тождественные частицы с полуцелыми спинами описываются статистикой Ферми–Дирака, т. е. их волновая функция антисимметрична относительно перестановки любых двух частиц. Тождественные частицы с целым спином описываются статистикой Бозе–Эйнштейна, и их волновая функция полностью симметрична относительно переменных всех частиц.

Очевидно, что точная симметрия очень важна в физике частиц. Она позволяет определить новую частицу в реакции, в которой все другие частицы уже имеют известный набор квантовых чисел. Соображения симметрии дают возможность установить, будет ли происходить та или иная реакция. Однако более замечательная связь существует между симметриями модели и законами сохранения, известная как теорема Нетер. Согласно этой теореме, инвариантность физической системы по отношению к классу непрерывных преобразований симметрии приводит к некоторой сохраняющейся величине. Другими словами, симметрии динамической модели и сохраняющиеся величины оказываются взаимосвязанными. Этот результат широко используется при построении моделей элементарных частиц. Очень важно, что многие симметрии в физике частиц не являются точными симметриями. Говорят, что симметрия нарушена, если некоторая величина, обычна ненаблюдаемая вследствие симметрии, при определенных условиях становится наблюдаемой. Может показаться, что изучение нарушенных симметрий непродуктивно. Но это не так. Во-первых, природа устроена так, что многие симметрии нарушаются. Во-вторых, это нарушение происходит достаточно упорядоченно, и это опять-таки можно использовать при построении моделей элементарных частиц и их взаимодействий.

Наконец, любое непрерывное преобразование симметрии можно сделать локальным, т. е. зависящим от координат той пространственно-временной точки, в которой это преобразование проводится. Симметрии, соответствующие преобразованиям такого типа, называются *локальными симметриями*. К локальным симметриям относятся симметрии пространства электрического заряда, слабого изоспинового пространства и пространства цветовых зарядов. Эти симметрии называют *калибровочными симметриями*, поскольку они действуют во «внутреннем» пространстве состояний. Если ли еще другие симметрии такого типа? Например, может ли локальная симметрия, связанная с барионным квантовым числом, привести к еще ненаблюдаемому взаимодействию? Это вопросы относятся к той категории, когда их легче поставить, чем на них ответить.

Некоторые преобразования состояний в физике частиц обладают свойствами групповых преобразований симметрии. Группы симметрии играют важнейшую роль в физике частиц. Говорят, что система имеет группу симметрии S, если ее состояние инвариантно по отношению к преобразованию из группы S, т. е. гамильтониан системы инвариантен по отношению к преобразованиям группы $SHS^{+} = H$.

1.2. Группы симметрии

Все группы симметрии похожи по своим свойствам на группу вращений в трехмерном пространстве. Рассмотрим подробнее ее свойства.

Симметрия относительно вращений в пространстве означает, что существуют операторы углового момента $\widehat{J}_\alpha$, которые коммутируют с гамильтонианом системы $\widehat{H}$, т. е. $[\widehat{H}, \widehat{J}_\alpha] = 0$. Из операторов $\widehat{J}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ можно составить оператор полного момента $\widehat{\vec{J}}^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + \widehat{J}_3^2$, который коммутирует с $\widehat{H}$ и любым из операторов $\widehat{J}_\alpha$:

$$[\widehat{\vec{J}}^2, H] = 0, \quad [\widehat{\vec{J}}^2, \widehat{J}_\alpha^2] = 0. \tag{1}$$

При этом любую замкнутую систему можно характеризовать квантовым числом J, причем $\vec{J}^2 = J(J+1)$ и J — целое или полуцелое число.

Заметим, что операторы $\widehat{J}_\alpha$ следует рассматривать не как операторы преобразования координат, а как операторы, вращающие физические объекты.

Пусть U — оператор симметрии. Это означает, что если выбрать какое-то состояние системы $|S\rangle$, такое, что $\widehat{H}|S\rangle = E|S\rangle$, то и состояние $|S'\rangle = U|S\rangle$ тоже будет состоянием системы с тем же значением энергии E:

$$H|S'\rangle = HU|S\rangle = E|S'\rangle. \tag{2}$$

Это свойство выполняется, если преобразование симметрии коммутирует с гамильтонианом:

$$[\widehat{H}, U] = 0. \tag{3}$$

Очевидно, что если U_1 и U_2 — преобразования симметрии, то их последовательное применение U_1U_2 — тоже будет преобразованием симметрии. Говорят, что симметрии образуют *группы симметрии*. Группы бывают двух типов: *дискретные* (с конечным числом элементов) и *параметрические*. В последнем случае преобразования задаются n вещественными параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

В квантовой механике норма состояния имеет физический смысл — она определяет вероятность его реализации. Поэтому следует считать, что операторы симметрии U сохраняют норму, а, следовательно, они унитарны.

Говорят, что совокупность элементов g *образует группу* G, если:

1) определен закон умножения $g_3 = g_2g_1$ и, вообще говоря, $g_1g_2 \neq g_2g_1$;

2) выполняется свойство ассоциативности умножения $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$;

3) существует единичный элемент, такой, что $ge = eg = g$ для любого g;

4) для любого элемента g существует обратный ему элемент g^{-1}, такой что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Обычно считается, что в группе G имеется топологическая структура, т. е. определено понятие близких преобразований: g' близко к g. При этом близким g соответствуют близкие значения параметров α_i, причем $g(0, \ldots, 0) = e = 1$.

Рассмотрим случай, когда α_i малы (вблизи единичного преобразования). Тогда элемент группы можно представить в виде

$$g = 1 + \alpha_i I_i + O(\alpha_i^2). \tag{4}$$

Пусть $g_1 = g_1(\alpha_i)$, $g_2 = g_2(\beta_i)$. Чтобы задать $g_3 = g_2g_1$, достаточно задать функцию $\gamma_i = \gamma_i(\beta_i, \alpha_i)$. Считается, что g, γ разлагаются в ряды по аргументам. Доказано, что это так, если группа G — параметрическая (это решение пятой проблемы Гильберта). Такая группа называется *группой Ли*, а величины I_i называют *генераторами группы Ли*.

Часто оказывается возможным выделить из набора элементов g, образующих группу G, другой набор из меньшего числа элементов, который тоже удовлетворяет определению группы. В этом случае говорят, что эти элементы образуют подгруппу группы G. В отобранные элементы, конечно, должен попасть единичный элемент, но самое главное — произведение любых двух элементов из этой совокупности также обязано быть ее элементом.

С физической точки зрения, подгруппы важны в теории возмущений. Бывает так, что на систему, симметрия которой соответствует группе G, действует возмущение, которое сохраняет более низкую симметрию, соответствующую некоторой подгруппе группы G. Пусть группа G содержит две подгруппы G_1 и G_2, элементы которых коммутируют: $g_1^a g_2^b = g_2^b g_1^a$, где g_1^a — любой элемент подгруппы G_1 и g_2^b — любой элемент подгруппы G_2. Если, кроме того, любой элемент группы G может быть записан единственным образом в виде произведения $g_1^a g_2^b$, то группу G называют прямым произведением групп G_1 и G_2, изображая это как $G = G_1 \otimes G_2$. Данное определение означает, что единственным общим элементом групп G_1 и G_2 является единичный элемент.

1.2.1. Теоремы Ли. Теория групп Ли основана на следующих теоремах.

1-я теорема Ли. *Задание генераторов I_i почти полностью (в окрестности единичного элемента) определяет группу Ли.*

Докажем эту теорему. Выберем элемент $g \in G$. Поскольку для каждого элемента группы определено g^N, то можно определить и корень N-ной степени из g следующим образом: $(g^{1/N})^N = g$. Заметим, что для вещественных чисел $a > 1$, $\sqrt[N]{a} \to 1$ при $N \to \infty$, т. е.

$$\sqrt[N]{a} \simeq 1 + \frac{c}{N} \quad (a > 1,\ N \to \infty). \tag{5}$$

По аналогии

$$g^{1/N} \simeq 1 + \frac{\alpha_i}{N} I_i \quad (N \to \infty). \tag{6}$$

Обозначим $\alpha_i I_i = P$, тогда

$$g = (g^{1/N})^N = \left(1 + \frac{\alpha_i}{N} I_i\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{N}P\right)^N = e^P = e^{\alpha_i I_i} = 1+\alpha_i I_i + \frac{1}{2}(\alpha_i I_i)^2 + \ldots \quad (7)$$

В этом выражении α_i — *канонические параметры группы*. Таким образом, элементы группы G определяются заданием параметров α_i и генераторов I_i в следующем виде

$$g = e^{\alpha_i I_i}. \quad (8)$$

2-я теорема Ли. *Генераторы I_i образуют алгебру Ли, т. е. коммутатор генераторов*

$$[I_i, I_k] = c_{pik} I_p, \quad (9)$$

где c_{pik} — структурные константы группы.

3-я теорема Ли. *Структурные константы группы удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{gathered} c_{pik} = -c_{pki}, \\ c_{pik}c_{qrs} + c_{pri}c_{qks} + c_{pkr}c_{qis} = 0. \end{gathered} \quad (10)$$

Первое из этих соотношений следует из коммутационных соотношений $[I_i, I_k] = c_{pik} I_p$, а второе — из тождества Якоби

$$\big[I_i, [I_k, I_l]\big] + \big[I_l, [I_i, I_k]\big] + \big[I_k, [I_l, I_i]\big] = 0. \quad (11)$$

Для группы вращений определено бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование

$$|\vec{x'}\rangle = (1 + i\widehat{J}_\alpha \delta\varphi_\alpha)|\vec{x}\rangle, \quad \delta\phi_\alpha \ll 1, \quad (12)$$

где $\widehat{J}_\alpha$ — генераторы группы вращений, $\delta\varphi_\alpha$ — параметры преобразования (углы вращения). Поскольку преобразования унитарны и $g^+ g = 1$, то $\widehat{J}_\alpha$ — эрмитовы. Эти операторы связаны с введенными раньше I_α операторами соотношениями $I_\alpha = -i\widehat{J}_\alpha$. Коммутатор операторов момента

$$[\widehat{J}_\alpha, \widehat{J}_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\widehat{J}_\gamma, \quad (13)$$

т. е. структурным константам c_{pik} соответствуют $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$.

Определим теперь важнейшее понятие *представления группы* (*мультиплета*).

Это пространство, которое замкнуто по отношению к преобразованиям группы:

$$gS = S', \quad S \in P, \quad S' \in P. \quad (14)$$

Представление *неприводимо*, если в пространстве нет никакого подпространства, которое при преобразованиях $g \in G$ переходило бы само в себя:

$$gP' = P. \quad (15)$$

Если из генераторов представления группы образовать эрмитовы, взаимно коммутирующие комбинации, которые коммутируют со всеми генераторами представления, то такие операторы называются *операторами Казимира*. Собственные значения оператора Казимира характеризуют выбранный мультиплет.

Для группы вращений неприводимое представление задается значением оператора Казимира $\widehat{\vec{J}^2}$, а состояния — собственными значениями $\widehat{J}_3$, обозначаемыми m.

При этом $\widehat{J}_3|m\rangle = m|m\rangle$. Удобно ввести повышающие и понижающие операторы $\widehat{J}_\pm = \widehat{J}_1 \pm i\widehat{J}_2$. Легко видеть, что $[\widehat{J}_3, \widehat{J}_\pm] = \pm\widehat{J}_\pm$, $[\widehat{J}_+, \widehat{J}_-] = 2\widehat{J}_3$, $(\widehat{J}_+)^+ = \widehat{J}_-$. Отсюда следует, что $\vec{J}^2 = J(J+1)$ и J — максимальное значение m в данном мультиплете: $\widehat{J}_+|m = J\rangle = 0$. Число состояний в мультиплете с данным J равно $2J+1$, где J — *целое* или *полуцелое число* и

$$\widehat{J}_+|m\rangle = \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}|m+1\rangle. \tag{16}$$

Таким образом, то, что спин целый или полуцелый, следует из групповых свойств вращений.

1.2.2. Классификация алгебр Ли. Пока что рассматривались только вещественные преобразования (параметры α_i — вещественные). При этом групповые преобразования унитарны ($U^+U = 1$). Если считать α_i комплексными, то свойства групп Ли сильно изменяются, в частности, теряется унитарность. *Полупростыми* называются алгебры Ли, для которых выполнено условие на структурные константы

$$c_{rip}c_{plr} = g_{il}, \quad \det g_{il} \neq 0. \tag{17}$$

Как показал Картан, коммутаторы полупростой алгебры всегда можно привести к виду, напоминающему вид коммутаторов $\widehat{J}_+$, $\widehat{J}_-$, $\widehat{J}_3$ группы вращений. При этом основной характеристикой алгебры является ее ранг: максимальное число линейно независимых генераторов, коммутирующих друг с другом. Эти генераторы $H_1, H_2, \ldots, H_l$ (l — ранг группы) и играют роль J_3. Их можно привести к диагональному виду. Число остальных генераторов четно, они образуют пары типа $\widehat{J}_\pm$.

Теорема Картана утверждает, что число полупростых алгебр данного ранга ограничено. Например, при достаточно большом ранге l их четыре. Всего есть четыре основных серии полупростых алгебр Ли: A_l, B_l, C_l, D_l и пять исключительных алгебр G_2, F_4, F_6, F_7, F_8 (индексы означают ранги).

При описании внутренних симметрий используют унитарные конечномерные представления. Для того чтобы их получить, ограничимся *компактными группами Ли*. Группа называется *компактной*, если любая бесконечная последовательность точек пространства группы $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ имеет точку накопления, принадлежащую пространству группы.

Например, для группы вращений топологическое пространство группы (т. е. пространство точек, отвечающее всем возможным значениям параметров группы) есть шар радиуса $R = \pi$, причем точки, лежащие на концах одного диаметра, эквивалентны. Группа вращений, очевидно, компактна. Однако не все группы компактны. Действительно, группа Лоренца, например, некомпактна. В самом деле, рассмотрим последовательность преобразований Лоренца $[L(\vec{v})]^n$, тогда при $n \to \infty$ $[L(\vec{v})]^n \to L(\vec{v} \to 1)$, но преобразования с $|\vec{v}| = 1$ не входят в группу Лоренца, т. е. эта группа некомпактна.

В случае компактных групп справедливы следующие теоремы:

1) все конечномерные представления компактных групп унитарны;

2) все конечномерные представления вполне приводимы, т. е. любое конечномерное представление есть сумма неприводимых представлений.

Каждой алгебре Картана соответствует одна и только одна вещественная форма, приводящая к компактной группе. Символы этих групп:

$$\begin{aligned} &A_l \to SU_{l+1}, \quad &C_l \to Sp(2l), \\ &B_l \to SO_{2l+1}, \quad &D_l \to SO_{2l}, \end{aligned} \tag{18}$$

SO_{2l+1} и SO_{2l} — группы вращений в $(2l+1)$- и $2l$-мерном пространстве. Символ S означает, что детерминант соответствующих матриц группового представления равен единице. Группа вращений SO_3 в трехмерном пространстве соответствует алгебре B_1 первого ранга. SU_{l+1} определяется как группа комплексных матриц порядка $(l+1)$ с детерминантом, равным единице; $Sp(2l)$ — группа симплектических матриц порядка $2l$.

Заметим, что для алгебр низших рангов ($l = 1, 2$) существует *изоморфизм* между группами, отвечающим разным алгебрам. Например, изоморфны группы первого ранга $SO(3)$, $SU(2)$, $Sp(2)$.

1.2.3. *SU*(2)-симметрия. В группе $SU(2)$ имеются три генератора T_i ($i = 1, 2, 3$), при этом коммутационные соотношения для них такие же, как и для генераторов углового момента:

$$[T_i, T_k] = i\varepsilon_{ikl}T_l. \tag{19}$$

Если перейти к генераторам T_3, $T_\pm = T_1 \pm iT_2$, то матричные элементы генераторов $T_\pm$:

$$(T_+)_{T_3+1,T_3} = \sqrt{T(T+1) - T_3(T_3+1)}, \tag{20}$$

где $\vec{T}^2 = T(T+1)$ есть собственное значение оператора $\vec{T}^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$.

Это группа изотопических преобразований

$$\psi \to \psi' = e^{i\vec{\alpha}\vec{T}}\psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = e^{-i\vec{\alpha}\vec{T}}\overline{\psi}, \tag{21}$$

где $\vec{T}$ — матрицы, $\vec{\alpha}$ — параметры. Если $\vec{\alpha}$ не зависит от пространственно-временных переменных, то симметрия называется глобальной, в противном случае — локальной. В простейшем примере изотопического мультиплета — дублета

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \tag{22}$$

матрицы $\vec{T} = (1/2)\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ — три матрицы Паули

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Поскольку матрицы $\vec{\tau}$ не коммутируют между собой, $SU(2)$ — симметрия неабелева.

Аналогично описанию частиц со спином 1/2, можно записать изоспиновую функцию нуклона

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |p\rangle, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |n\rangle. \tag{24}$$

Подействуем оператором $T_3 = (1/2)\tau_3$ на протонное состояние:

$$T_3|p\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|p\rangle. \tag{25}$$

При действии на нейтронное состояние —

$$T_3|p\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|p\rangle. \tag{26}$$

Для двух зарядовых состояний нуклона собственные значения T_3 равны $+1/2$ и $-1/2$.

Собственное значение оператора $\vec{T}^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = T(T+1) = 3/4$.

Повышающие и понижающие операторы — $T_+ = T_1 + iT_2$, $T_- = T_1 - iT_2$, причем

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Очевидно, что эти операторы действуют на протонные и нейтронные состояния следующим образом:

$$T_+|p\rangle = 0, \quad T_+|n\rangle = |p\rangle, \quad T_-|n\rangle = |0\rangle, \tag{28}$$

т. е. T_+ преобразует состояние нейтрона в состояние протона, а T_- — наоборот, состояние протона в состояние нейтрона.

Докажем следующую *теорему*: для любого неприводимого представления группы все члены мультиплета вырождены по массе, если $[U, H] = 0$, где H — гамильтониан системы.

В этом случае $U = SU(2)$. Будем называть мультиплетом не только совокупность частиц типа Σ^+, Σ^0, Σ^-, но и подпространство гильбертова пространства, содержащее все вектора вида $\alpha|\Sigma^+\rangle + \beta|\Sigma^0\rangle + \gamma|\Sigma^-\rangle$.

Покажем, что если мультиплет — неприводимое представление U, то все состояния имеют равные энергии. Для этого выберем некоторое состояние мультиплета $|\chi_0\rangle$. Тогда $H_S|\chi_0\rangle = M|\chi_0\rangle$, где M — масса этого состояния. Возьмем теперь другое состояние $|\chi\rangle = U|\chi_0\rangle$. Тогда $H_S|\chi\rangle = H_S U|\chi_0\rangle = U H_S|\chi_0\rangle = MU|\chi_0\rangle = M|\chi\rangle$. Таким образом, все состояния имеют одну и ту же массу M. Это утверждение справедливо и для любой линейной комбинации этих состояний. Совокупность всех введенных состояний есть представление M' группы U, содержащееся в исходном мультиплете M. В силу неприводимости M, имеем $M' = M$, следовательно, все состояния в мультиплете M вырождены, т. е. принадлежат одному и тому же значению массы M.

В теории групп эта теорема называется *леммой Шура*: оператор, коммутирующий со всеми генераторами неприводимого представления, кратен единичному оператору.

У любой n-параметрической группы имеется n генераторов I_i. Если U есть группа симметрии, т. е. $[U, \widehat{H}] = 0$, то $[I_i, H] = 0$. Но, поскольку в квантовой механике $dI_i/dt = i[H, I_i]$, это означает сохранение I_i. Это *теорема Нетер*.

Если группа имеет ранг l, то в ней существует l линейно независимых коммутирующих операторов $H_1, H_2, \ldots, H_l$ ($[H_i, H_k] = 0$). Хотя все генераторы равноправны, H_l выделены тем, что их можно одновременно диагонализовать, им соответствуют сохраняющиеся квантовые числа — обобщенные заряды Q_i:

$$H_i|A\rangle = Q_i|A\rangle, \quad \left[Q_i, \widehat{H}_S\right] = 0. \tag{29}$$

Для группы $SU(2)$ ранг $l = 1$, поэтому есть один генератор T_3, который можно диагонализовать. Кроме того, сохраняется и оператор квадрата изоспина $\vec{T}^2 = T(T+1)$.

Таким образом, неприводимое представление $SU(2)$ определяется значением T, а отдельные члены этого представления имеют разные T_3.

Для всех изомультиплетов имеет место связь $Q = T_3 + Y/2$ (формула Гелл-Манна–Нишиджимы).

Величина Y — *гиперзаряд* имеет разные значения для разных частиц. Так, для p, n $Y = 1$, для Λ, Σ $Y = 0$ и для Ξ $Y = -1$. Поскольку в сильных взаимодействиях сохраняются Q и T_3, то в сильных взаимодействиях сохраняется и гиперзаряд.

1.2.4. $SU(3)$-симметрия. Любое представление картановских групп может быть получено как произведение базисных представлений. Для групп ранга l таких представлений l. Вообще, все представления можно получить из нескольких элементарных представлений, число которых меньше l. Так, для группы $SU(n)$ число базисных представлений $l = n - 1$, а элементарное — одно. Это простейшее представление, и генераторы для него — унитарные унимодулярные матрицы размерности n.

Пока что рассматривались действия элементов групп симметрии на векторы состояний в гильбертовом пространстве. Перейдем теперь к тензорному описанию. Любой вектор неприводимого представления размерности N можно разложить по базисным состояниям

$$|\chi\rangle = c_m|m\rangle, \quad m = 1, 2, \ldots, N. \tag{30}$$

Совокупность N комплексных чисел c_m задает состояние и определяет N-мерный обобщенный вектор. С преобразованием векторов состояний можно сопоставить преобразования величин c_m. В самом деле, $g|\chi\rangle = gc_m|m\rangle = c_m u_{rm}|r\rangle$, поскольку $g|m\rangle = u_{rm}|r\rangle$. Отсюда $g|\chi\rangle = c'_r|r\rangle$, где $c'_r = u_{rm}c_m$.

Величины c_m оказываются обобщенными тензорами данной группы. При этом каждому индексу m соответствует, как будет видно ниже, набор тензорных индексов. Элементарным представлением группы $SU(n)$ является совокупность n-мерных матриц, действующих на n-мерный обобщенный спинор V^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поскольку $SU(n)$ — группа унитарных и унимодулярных матриц, то $U^+U = 1$, $\det U = 1$. При этом спинор V^i преобразуется следующим образом:

$$(V^i)' = U_{ik}V^k. \tag{31}$$

Представим U в следующем виде

$$U = e^{iK}. \tag{32}$$

Поскольку U — унитарные матрицы, то матрицы K — эрмитовы $(K^+ = K)$. Покажем, что $\det U = e^{iSpK}$ (формула Якоби). Действительно,

$$\det U = \det(e^{iK}) = \det\left[\lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{iK}{N}\right)^N\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\det\left(1 + \frac{iK}{N}\right)^N\right]. \tag{33}$$

Но

$$\det\left(1 + \frac{iK}{N}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 + \frac{iK_{11}}{N} & \frac{K_{12}}{N} & \ldots \\ \frac{K_{21}}{N} & 1 + \frac{iK_{22}}{N} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = 1 + \frac{i}{N}SpK + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{34}$$

Поэтому $\det U = \lim\limits_{N\to\infty}(1 + iSpK/N)^N = e^{iSpK}$. Поскольку $\det U = 1$, то $SpK = 0$.

Найдем число параметров группы $SU(n)$, равное числу независимых элементов комплексных матриц K, для которых $K^+ = K$ и $SpK = 0$.

Число вещественных параметров

$$\nu = 2\frac{n^2 - n}{2} + n - 1 = n^2 - 1. \tag{35}$$

Например, группа $SU(3)$ имеет 8 параметров. Удобно ввести канонические параметры так, чтобы генераторы группы были эрмитовы:

$$U = \exp\left(i\alpha_i\frac{\lambda_i}{2}\right), \quad \lambda_i = \lambda_i^+, \quad Sp\lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n^2 - 1. \tag{36}$$

При этом коммутатор генераторов группы $SU(3)$:

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_k}{2}\right] = if_{ikl}\frac{\lambda_l}{2}, \tag{37}$$

где f_{ikl} — структурные константы группы $SU(3)$.

Для группы $SU(2)$ элементарное представление двумерно и представляет собой спиноры V^1, V^2, а матрицы представления $U = \exp[i\alpha_i(\tau_i/2)]$, где τ_i — матрицы Паули. Для матриц Паули $[\tau_i/2, \tau_k/2] = i\varepsilon_{ikl}(\tau_l 2)$, $i, k, l = 1, 2, 3$, т. е. структурные константы группы $SU(2)$ $f_{ikl}^{(SU(2))} = \varepsilon_{ikl}$.

1.2.5. Тензорные представления группы $SU(n)$. Спинор V^i, являющийся элементарным представлением группы $SU(n)$, преобразуется по закону

$$(V^i)' = U_{ik}V^k. \tag{38}$$

Поскольку матрицы $SU(n)$ комплексны, то существует представление, сопряженное элементарному и описывающееся спинором V_i с нижним индексом. Этот спинор преобразуется следующим образом:

$$(V_i)' = U_{ik}^* V_k. \tag{39}$$

Как будет показано ниже, сопряженный спинор также является представлением группы.

Определим теперь тензор $SU(n)$ с p верхними индексами $V^{(p)} = V^{i_1 \dots i_p}$ как величину, преобразующуюся по закону

$$V'^{i_1 \dots i_p} = U_{i_1 k_1} \dots U_{i_p k_p} V^{k_1 \dots k_p}. \tag{40}$$

Аналогично тензор с q нижними индексами V преобразуется

$$V'_{r_1 \dots r_q} = U^*_{r_1 m_1} \dots U^*_{r_q m_q} V_{m_1 \dots m_q}. \tag{41}$$

Соответственно определяется и смешанный тензор $V_{(q)}^{(p)}$. Закон преобразования тензоров $SU(n)$ с произвольным числом верхних и нижних компонентов такой же, как и у произведения соответствующего числа элементарных и сопряженных им спиноров. Спиноры V_i реализуют элементарное представление $SU(n)$, любое тензорное представление можно получить из этого элементарного представления.

Отметим, что общий тензор $V_{(q)}^{(p)}$ не является неприводимым. Так, если тензор $V_{(q)}^{(p)}$ свернуть по верхнему и нижнему индексам, то тензор $V_{(q-1)}^{(p-1)}$ также будет представлением группы.

В самом деле, пусть имеется тензор $V_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}$, тогда он преобразуется следующим образом:

$$V'^{r_1 \dots r_p}_{m_1 \dots m_q} = \overbrace{U_{r_1 i_1} \dots U_{r_p i_p} U^*_{m_1 k_1} \dots U^*_{m_q k_q}}^{p+q} V_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}. \tag{42}$$

Свернем нештрихованный тензор по индексам r_1 и m_1. Так как $UU^+ = 1$ или $U_{r_1 i_1} U^*_{r_1 k_1} = \delta_{i_1 k_1}$, то

$$\sum_{r_1} V'^{r_1 r_2 \dots r_p}_{r_1 m_2 \dots m_q} = \overbrace{U_{r_2 i_2} \dots U_{r_p i_p} U^*_{m_2 k_2} \dots U^*_{m_q k_q}}^{p+q} V_{k_2 \dots k_q}^{i_2 \dots i_p}, \tag{43}$$

т. е. свертка преобразуется через свертку. Таким образом, свернутый тензор есть представление группы $SU(n)$, а тензор $V_{(q)}^{(p)}$ не является неприводимым представлением.

Заметим, что в группе $SU(n)$ имеются два инвариантных тензора $\delta^i_k \to \delta^i_k$ (это следствие того, что $UU^+ = 1$) и $\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \to \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ (следствие $\det U = 1$).

Если свернуть произвольный тензор $SU(n)$ с инвариантными тензорами, получим новые представления группы $SU(n)$. В качестве примера найдем все неприводимые представления группы $SU(2)$. Для нее инвариантный тензор $\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

С помощью ε_{ik} можно опускать и поднимать индексы, т. е. $V_i = \varepsilon_{ik} V^k$. Поэтому спинор V_1 преобразуется как V^2, а V_2 преобразуется как $-V^1$, т. е. для группы $SU(2)$ представления V_i и V^i — унитарно эквивалентны. Поэтому тензоров с нижними индексами в группе $SU(2)$ можно не рассматривать. Если выбрать тензор $V^{i_1 \dots i_p}$, то его всегда можно симметризовать или антисимметризовать по индексам, при этом будут возникать неприводимые представления. Однако антисимметризацию можно не учитывать, так как для тензора, антисимметричного по любой паре индексов $V^{\{i_1 i_2\} \dots i_p} = \varepsilon_{i_1 i_2} V^{i_1 i_2 i_3 \dots i_p}$, т. е. антисимметризация сводится к уменьшению числа индексов $p \to p - 2$.

Итак, неприводимые представления $SU(2)$ исчерпываются симметризованными тензорами $V^{\{i_1 \dots i_p\}}$. В силу симметрии, можно поместить все $p = 1$ слева и записать $V^{\{p\}} = V^{11 \dots 1 \,|\, 22 \dots 2}$.

При этом независимые компоненты отличаются числом индексов 1 и 2. Например, у $V^{\{3\}}$ независимые компоненты есть V^{111}, V^{112}, V^{122}, V^{222}. В общем случае возможно $(p+1)$ положение «перегородки» между индексами 1, 2, поэтому у тензора $V^{\{p\}}$ имеется $(p+1)$ компонента. Отсюда размерность представлений группы $SU(2)$:

$$N(p) = p + 1, \tag{44}$$

где p — любое целое число.

1.2.6. Размерность представлений группы $SU(3)$. Найдем размерности представлений группы $SU(3)$. Выберем произвольный тензор $T^{(p)}_{(q)}$. Поскольку в группе $SU(3)$ нет унитарной эквивалентности, нужно рассматривать тензоры, у которых есть и верхние, и нижние индексы.

Такой тензор можно симметризовать или антисимметризовать по паре верхних или нижних индексов. Так как

$$T^{\{i_1, i_2\} i_3 \dots i_p} \sim \varepsilon_{r i_1 i_2} T^{i_1 i_2 i_3 \dots i_p} \sim T^{i_3 \dots i_p}_r, \tag{45}$$

то тензор, антисимметричный, например, по паре верхних индексов, эквивалентен тензору с нижним индексом. Поэтому антисимметризованные тензоры можно не рассматривать.

Для неприводимости нужно тензоры симметризовать по верхним и нижним индексам. Будем считать тензор симметризованным $T^{[p]}_{[q]}$. Для неприводимости нужно также, чтобы свертка и шпур по любой паре индексов сверху и снизу равнялись нулю, например,

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_1 k_2 \dots k_q} = 0. \tag{46}$$

Определим размерность произвольного представления группы $SU(3)$.

Из-за симметрии можно считать, что тензор $T^{[p]}$ (каждый индекс принимает значения 1, 2, 3) имеет вид $T^{11 \dots 1 | 22 \dots 2 | 33 \dots 3}$. Число независимых компонент равно числу различных расположений двух перегородок. В случае несовпадающих перегородок имеем $(1/2)p(p+1)$ расположений, для совпадающих (нет, например, индексов 2) —

$(p+1)$ расположений. Всего компонент у тензора $T^{[p]} = (1/2)(p+1)(p+2)$, а у тензора $T^{[p]}_{[q]}$ число компонент $(1/4)(p+1)(q+1)(p+2)(q+2)$. Если свернуть тензор $T^{[p]}_{[q]}$ по паре индексов, то у тензора $T^{[p-1]}_{[q-1]}$ будет $(1/4)pq(p+1)(q+1)$ компонент. Для неприводимости нужно, чтобы все они равнялись нулю.

Итак, число компонент у неприводимого тензора $T^{[p]}_{[q]}$ равно

$$\frac{1}{4}(p+1)(q+1)(p+2)(q+2) - \frac{1}{4}pq(p+1)(q+1). \tag{47}$$

Поэтому размерность неприводимого представления группы $SU(3)$, задаваемого двумя целыми числами (p,q) равна

$$N(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2). \tag{48}$$

Приведем несколько простейших представлений группы $SU(3)$ и их размерности:

(1,0) $N=3$ — триплетное представление;

(0,1) $N=3$ — представление, сопряженное триплетному;

$\left.\begin{matrix}(2,0)\ N=6\\(0,2)\ N=6\end{matrix}\right\}$ — частицы, отвечающие этим представлениям, не обнаружены;

(1,1) $N=8$ — октетное представление барионов и мезонов;

(3,0) $N=10$ — декуплет барионов;

(2,2) $N=27$ — частицы, соответствующие этому представлению не обнаружены.

1.3. Октет барионов $\frac{1}{2}^+$

Отождествим представление $(1,1)$ группы $SU(3)$ размерности $N(1,1)=8$ с восьмеркой барионов $\frac{1}{2}^+$ $(p, n, \Lambda, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-)$. Это представление задается матрицей T^i_k с $T^i_i = 0$:

$$T^i_k = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix}, \qquad T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 = 0. \tag{49}$$

Таким образом, тензор T^i_k — это волновая функция состояния, принадлежащего к мультиплету 8. При этом каждому T^i_k соответствует частица октета.

В октете имеется синглет (Λ), два дублета $(p,n; \Xi^0, \Xi^-)$ и триплет $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ по изоспину. Группа $SU(2)$ при этом действует на индексы 1, 2, а индекс 3 не преобразуется, т. е. компонента T^3_3 ведет себя как изоскаляр. Кроме того, пары T^1_3, T^2_3 и T^3_1, T^3_2 преобразуются каждая сама через себя, и им соответствуют два изоспинора.

Поэтому матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

можно отождествить либо с (p,n), либо с (Ξ^0, Ξ^-). Обычно помещают в эти места дублет нуклонов.

Генератор $F_3 = (1/2)\lambda_3$ имеет собственным значением значения проекций изоспина T_3. У протона $F_3|p\rangle = (1/2)|p\rangle$. Поэтому если взять для протонного состояния матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, то $F_3|p\rangle = \frac{1}{2}\lambda_3|p\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|p\rangle$.

В случае нейтрона следует положить $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Тогда $F_3|n\rangle = -(1/2)|n\rangle$.

Нормировку волновой функции октета следует выбрать так, чтобы она была инвариантна относительно преобразований группы $SU(3)$. Определим норму волновой функции следующим образом

$$\|T_k^i\| = \sqrt{T_k^i (T_k^i)^*}. \tag{51}$$

Поскольку матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет норму $\alpha\alpha^* + \beta\beta$, состояния α и β нормированы на единицу. Обычно вместо α и β используют обозначения p, n, т. е. матрица представления

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Если рассматривать символы p и n как числа, то матрица дает амплитуды вероятности соответствующих состояний. Тогда для дублета Ξ^0, Ξ^- матрица представления

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Xi^- & \Xi^0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Для этих состояний генератор изоспина $-(1/2)\lambda_3$ (вместо $(1/2)\lambda_3$), поэтому Ξ^- имеет $T_3 = -1/2$, а $\Xi^0 - T_3 = 1/2$. Определим теперь вид матрицы T_k^i изоскаляра Λ. Такая матрица должна быть $SU(2)$-инвариантна, т. е. иметь вид $\begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & a \end{pmatrix}$. В этом случае

$$\frac{1}{2}\lambda_3 \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & a \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} b & & \\ & b & \\ & & a \end{pmatrix}. \tag{54}$$

В силу неприводимости представления, $2b + a = 0$, а из условия нормировки $2b^2 + a^2 = 1$, поэтому $b = 1/\sqrt{6}$, $a = -2/\sqrt{6}$, т. е.

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Триплет частиц Σ^+, Σ^0, Σ^- занимает верхний левый угол матрицы T_k^i:

$$|\Sigma\rangle = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

При этом состояние $\begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет $T_3 = 1$, ему соответствует $|\Sigma^+\rangle$. Состояние $|\Sigma^0\rangle$ поместится по диагонали (для него $T_3 = 0$), а $|\Sigma^-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

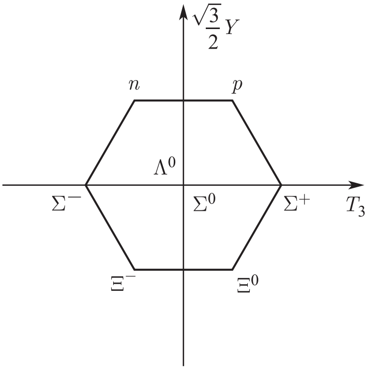
Итак, состояние

$$|\Sigma\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ & 0 \\ \Sigma^- & -\dfrac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Окончательный вид матрицы октета барионов, реализующей октетное представление группы $SU(3)$:

$$B_k^i(\frac{1}{2}^+) = \begin{pmatrix} \dfrac{\Lambda}{\sqrt{6}} + \dfrac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \dfrac{\Lambda}{\sqrt{6}} - \dfrac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\dfrac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Члены октета барионов можно наглядно представить на T_3Y-диаграмме (Y — гиперзаряд). Если за оси взять T_3, $(\sqrt{3}/2)Y$, то диаграмма имеет вид правильного шестиугольника.



1.4. Квантовые числа кварков

Предполагается, что этим частицам соответствует простейшее триплетное представление $SU(3)$, описываемое трехкомпонентными спинорами

$$V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Для триплета связь между операторами $\widehat{T}_3$ и Y и генераторами триплетного представления группы $SU(3)$:

$$\widehat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8. \tag{60}$$

Если ввести матрицу $\widehat{Q} = \lambda_{em}$ оператора электрического заряда, то

$$\widehat{Q} = \frac{1}{2}\left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Действуя на спиноры V^1, V^2, V^3 операторами $\widehat{T}_3$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Q}$, получим квантовые числа кварков q^1, q^2, q^3.

	q^1	q^2	q^3
T_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
Q	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Как видно из таблицы, кварки имеют нецелые значения электрического заряда, их обозначают u, d, s.

Чтобы рассматривать кварки как реальные частицы, им следует приписать спин и барионный заряд. Если из кварков (трех) строить барионы, то нужно допустить, что спин кварков полуцелый. Простейший выбор — спин 1/2. Если считать, что барионный заряд протона равен единице, и он состоит из трех кварков, то барионный заряд кварков равен $B = 1/3$.

Обратимся снова к строению мезонов в кварковой модели. Поскольку кварки и антикварки — фермионы со спином 1/2, то из двух спинов «1/2» можно образовать синглетное состояние $S = 0$ и триплетное состояние $S = 1$. Состояние кварка и антикварка с $S = 0$ в бесцветном состоянии называется *скалярным мезоном*, а с $S = 1$ — *векторным мезоном*.

П р и м е р. Кварковый состав скалярных и векторных мезонов.

$$\left.\begin{aligned} \pi^+ &= u\overline{d} \\ \pi^- &= \overline{u}d \\ \pi^0 &= \frac{u\overline{u} - d\overline{d}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} S = 0, \qquad \left.\begin{aligned} \rho^+ &= u\overline{d} \\ \rho^- &= \overline{u}d \\ \rho^0 &= \frac{u\overline{u} - d\overline{d}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} S = 1. \tag{62}$$

Кроме того, кварки и антикварки могут находиться в различных состояниях по орбитальному моменту. У всех вышеуказанных мезонов орбитальный момент $L = 0$. Существуют и радиальные возбуждения мезонов, например, $\rho^* = \overline{u(u - d\overline{d})}/\sqrt{2}$ имеет спин $S = 1$ и орбитальный момент $L = 1$.

Аналогично строятся мезонные состояния, в которые входит странный кварк. Например, состояния $K^+ = u\overline{s}$, $K^- = s\overline{u}$, $K^0 = s\overline{d}$, $\overline{K}^0 = d\overline{s}$, имеют спин $S = 0$ (скалярные странные мезоны). Примеры векторных ($S = 1$) мезонов — K^*, φ, η.

1.5. Калибровочный принцип для калибровочных теорий

Пусть ψ — состояние физической системы, чья динамика описывается лагранжианом L, инвариантным относительно глобальной группы симметрии G. Оказывается, что если потребовать, чтобы глобальная группа симметрии G стала локальной, то первоначально свободная теория становится теорией с взаимодействием. Действительно, локализация глобальной группы симметрии требует введения векторных бозонов (калибровочных полей), взаимодействующих с полем ψ калибровочно-инвариантным образом. При этом число калибровочных полей и их свойства зависят от свойств группы симметрии G.

Пример. Локальная версия предыдущего примера $\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi$ с фазой α, зависящей от пространственно-временной точки $x \equiv x_\mu$, связана с калибровочным бозоном. В этом простейшем случае $U(1)$ имеет только один генератор и, соответственно, одно калибровочное поле, являющееся переносчиком взаимодействия.

Другие примеры: группа $SU(2)$ с тремя генераторами и соответствующими тремя калибровочными бозонами; группа $SU(3)$ имеет восемь генераторов и, следовательно, восемь калибровочных бозонов. В общем случае группа $SU(n)$ имеет n^2-1 генераторов и такое же число калибровочных бозонов.

1.6. Квантовая электродинамика как пример калибровочной теории

КЭД — наиболее исследованная и проверенная калибровочная теория в физике частиц. Рассмотрим, какие следствия имеет калибровочный принцип в КЭД. Начнем с изучения дираковского поля спина $S = 1/2$, массы m и заряда Q_e. Соответствующий лагранжиан

$$L = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x), \tag{63}$$

где $\partial\!\!\!/ = \partial_\mu\gamma^\mu$.

Уравнение движения (уравнение Дирака)

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0. \tag{64}$$

Очевидно, что лагранжиан инвариантен по отношению к глобальной группе симметрии

$$\psi \to e^{iQ\theta}\psi, \quad \overline{\psi} \to e^{-iQ\theta}\overline{\psi}, \quad \partial_\mu\psi \to e^{iQ\theta}\partial_\mu\psi, \tag{65}$$

причем глобальная фаза $Q\theta$ содержит непрерывный параметр θ.

По теореме Нетер, глобальная $U(1)$-инвариантность лагранжиана L подразумевает сохранение электромагнитного тока J_μ и электрического заряда eQ:

$$J_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu eQ\psi, \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{и} \quad eQ = \int d^3x J_0(x). \tag{66}$$

Если теперь учесть требование локальной калибровочной симметрии, т.е. $\theta = \theta(x)$, то соответствующие преобразования полей и их производных имеют вид

$$\begin{gathered} \psi \to e^{iQ\theta(x)}\psi, \quad \overline{\psi} \to e^{-iQ\theta(x)}\overline{\psi}, \\ \partial_\mu\psi \to e^{iQ\theta(x)}\partial_\mu\psi + iQ(\partial_\mu\theta(x))e^{iQ\theta(x)}\psi. \end{gathered} \tag{67}$$

Как видно, лагранжиан L уже не инвариантен относительно этих преобразований. Чтобы восстановить инвариантность, воспользуемся калибровочным принципом. Для

этого введем одно калибровочное векторное поле — фотонное поле A_μ, которое взаимодействует с полем ψ и при $U(1)$-преобразованиях изменяется следующим образом:

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x). \tag{68}$$

Преобразование поля A_μ подобрано таким образом, чтобы скомпенсировать дополнительные слагаемые $\partial_\mu \theta(x) \neq 0$ в лагранжиане и восстановить его инвариантность. Наиболее простой способ достичь этого — заменить в лагранжиане производную ∂_μ ковариантной производной

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieQA_\mu)\psi, \tag{69}$$

которая преобразуется следующим образом:

$$D_\mu \psi \to \exp\bigl(i\theta(x)Q\bigr) D_\mu \psi. \tag{70}$$

Наконец, для того чтобы включить распространение фотонного поля следует добавить в лагранжиан КЭД «кинетическое» слагаемое, которое должно быть калибровочно-инвариантным и выражаться через тензор напряженности фотонного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{71}$$

Поэтому полный лагранжиан КЭД, обладающий Лоренц и $U(1)$ калибровочной инвариантностью, можно записать в следующем виде:

$$L_{\text{QED}} = \overline{\psi}(x)(i\not{D} - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x). \tag{72}$$

Заметим, что этот лагранжиан содержит взаимодействие дираковского поля ψ с фотонным полем ($\overline{\psi} i \not{D} \psi$ или $\overline{\psi} eQA_\mu \gamma^\mu \psi$).

Возможный массовый член для калибровочного поля $L_m = -(1/2)m^2 A^\mu A_\mu$ подавлен, поскольку он нарушает калибровочную инвариантность, поэтому фотонное поле — безмассовое. Экспериментальное ограничение на массу фотона $m_\gamma < 6 \cdot 10^{-17}$ эВ. Полный лагранжиан L_{QED} приводит к хорошо известным уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu, \\ J^\nu &= -eQ\overline{\psi}\gamma^\nu \psi, \end{aligned} \tag{73}$$

J^ν — фермионный электромагнитный ток.

ГЛАВА 2

КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ – КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

2.1. Введение. Партонная модель

Основой КХД служит партонная модель, согласно которой в жестких столкновениях кварки ведут себя как свободные частицы. В 60-х годах прошлого века в серии экспериментов по исследованию структуры протонов и нейтронов изучались так называемые электрические и магнитные форм-факторы. Электроны ускорителя SLAC с энергиями до 20 ГэВ рассеивались на водородной и дейтериевой мишенях

$$e + N \to e + X, \tag{1}$$

где X — любое адронное конечное состояние. Неожиданным было то, что на большие углы рассеивалось гораздо больше электронов, чем ожидалось. Фейнман дал следующую трактовку этим результатам: в глубоконеупругом рассеянии нуклон представляет собой газ невзаимодействующих точечноподобных частиц — партонов. Электрон просто испытывает упругое рассеяние на партоне p

$$e + p \to e + p. \tag{2}$$

При этом сечение рассеяния на точечноподобном объекте не содержит форм-факторного подавления, характерного для протяженных объектов. Чтобы пояснить физическую картину, рассмотрим нуклон в системе отсчета, в которой он имеет релятивистскую скорость ($\gamma \gg 1$), например, в системе покоя налетающего электрона. Из-за лоренцевского сокращения нуклон представляет собой «пучок» коллинеарных партонов, несущих долю импульса x_q нуклона, причем

$$\sum_q x_q = 1. \tag{3}$$

Адрон описывается партонной плотностью $q(x)$, показывающей число партонов dn, имеющих импульс от x до $x + dx$:

$$dn(x, x + dx) = q(x)\,dx. \tag{4}$$

Тогда наблюдаемое адронное сечение есть произведение партонной плотности и точечного партонного сечения

$$\sigma_{\text{адр.}} = q\sigma_{\text{парт.}}. \tag{5}$$

Поскольку точечноподобное сечение подразумевает наличие свободных партонов, все динамические эффекты сильных взаимодействий содержатся в функции $q(x)$. Соотношение (5) выражает идею факторизации: различные динамические процессы представлены в сечении отдельными факторами.

Партонная модель смогла объяснить наблюдавшееся поведение форм-факторов, а также бьеркеновский скейлинг (независимость форм-факторов от Q^2).

Затем партоны были идентифицированы с кварками, которые до этого использовались для классификации адронов. Партонам был приписан спин 1/2 и электрические заряды $e = 2/3, -1/3$.

Однако степеней свободы валентных кварков оказалось недостаточно для сохранения импульса в eN-столкновении. Правило сумм (3) для валентных кварков нарушается. Следовательно, надо постулировать существование «морских» кварков, т. е. короткоживущих кварк-антикварковых пар в нуклоне, также участвующих в жестких процессах. Эта идея весьма привлекательна с точки зрения квантовой теории поля, имеющей дело с виртуальными частицами, но и она оказывается неполной. Оказалось, что примерно половина импульса нуклона не переносится ни валентными, ни морскими кварками, поскольку

$$\sum_{\text{вал.}} x + \sum_{\text{море}} x \simeq 0{,}5. \tag{6}$$

Таким образом, необходимо допустить существование в нуклоне нейтральных частиц, которые не взаимодействуют с пробниками (γ, W или Z) и не несут электрического заряда. Эти частицы — переносчики сильных взаимодействий — позже были названы глюонами. Рассмотрим основные идеи, приведшие к построению квантовой хромодинамики.

2.2. Цвет

Неабелевы калибровочные теории являются хорошими кандидатами на теорию сильных взаимодействий, поскольку они асимптотически свободны. Можно сказать, что они — единственные кандидаты среди локальных релятивистских теорий. Обратимся к выбору калибровочной группы сильных взаимодействий.

Рассмотрим состояние Δ^{++} в рамках кварковой модели. Эта частица имеет спин 3/2, состоит из трех u-кварков и является наинизшим состоянием с этими квантовыми числами. Трехчастичный потенциал, дающий разумное описание возбуждений, можно считать гармоническим:

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{m\omega^2}{6}\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2\right], \tag{7}$$

где x_i — координаты кварков, m — масса u-кварка, а величина ω должна определяться экспериментально.

Основное состояние модели определяется гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_1, x_2, x_3) \tag{8}$$

и описывается гауссианом

$$\psi_0(x_1, x_2, x_2) = \frac{1}{\sqrt{3^{3/2}\pi^2}R^3}\exp\left[-\frac{[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2]}{6R^2}\right], \tag{9}$$

где $R^2 = 1/(m\omega)$.

Волновая функция ψ_0 симметрична относительно перестановки любой пары координат и имеет нулевой угловой момент

$$L = 0. \tag{10}$$

Спин Δ^{++}-бариона

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{11}$$

определяется полным спином трех кварков

$$J = S. \tag{12}$$

Состояние с $S_z = 3/2$ включает три выстроенных вдоль оси z кварка:

$$|\Delta^{++}, S_z = 3/2\rangle = |u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle. \tag{13}$$

Таким образом, спиновая волновая функция симметрична относительно перестановок спинов. Тогда и полная волновая функция должна быть симметричной при перестановке кварков. Но это противоречит принципу Паули, согласно которому волновая функция частицы с полуцелым спином должна быть антисимметричной. Естественное решение этой проблемы — ввести дополнительное квантовое число кварка, названное цветом. Необходимое число цветов — как минимум три. Таким образом, кварк способен находиться в трех цветовых состояниях, а барионная волновая функция антисимметрична относительно изменения цвета любых двух кварков, т. е. является цветовым синглетом. Волновая функция Δ^{++} в цветовом пространстве имеет вид

$$|\Delta^{++}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{abc}|u_a, u_b, u_c\rangle, \tag{14}$$

где ε_{abc} — полностью антисимметричный тензор.

Подобные же проблемы имеются и у Δ^-- и Ω^--барионов, которые состоят из трех d- и s-кварков. Они также решаются с помощью введения цвета. Мезоны же состоят из кварк-антикварковых пар в синглетном по цвету состоянии

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta^a_b|\overline{q}_a q'^b\rangle, \tag{15}$$

где q и q' обозначают произвольные кварковые ароматы.

2.3. Выбор калибровочной группы

Почему калибровочная группа имеет $N_C = 3$ цвета? Оказывается, что выбор $SU(3)$ как цветовой калибровочной группы является единственным с точки зрения ряда ограничений:

а) группа должна иметь комплексные представления, поскольку необходимо различать кварки и антикварки. Действительно, мезоны рассматриваются как связанные состояния $q\overline{q}$, но нет аналогичных связанных состояний qq и $\overline{qq}$. Среди простых групп этому ограничению отвечают группы $SU(N)$ с $N \geq 3$, $SO(4N+2)$ с $N \geq 2$ и E_6.

б) Группа должна обеспечивать существование полностью антисимметричного синглетного бариона, построенного из 3-х кварков qqq. Из адронной спектроскопии известно, что низколежащие барионный октет и декуплет «построены» из трех кварков и являются синглетами по цвету. Волновая функция трех кварков qqq должна быть, как отмечалось в предыдущем разделе, полностью антисимметричной в цветовом пространстве, чтобы не вступить в противоречие с принципом Паули.

в) Выбор $N_C = 3$ подтверждается многими процессами, в которых непосредственно измеряется N_C. Например, скорость рождения адронов в e^+e^--аннигиляции линейно зависит от N_C. Так, отношение $R = \sigma(e^+e^- \to \text{адроны})/\sigma_{\text{точечн.}}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$

выше $b\overline{b}$-порога и ниже массы Z-бозона есть сумма индивидуальных вкладов от $q\overline{q}$ с $q = u, c, d, s, b$:

$$R \simeq N_C\left[2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9}\right] = N_C \frac{11}{9}. \tag{16}$$

Экспериментальные данные свидетельствуют в пользу $N_C = 3$.

Аналогично, можно рассмотреть бренчинг распада $B(W^- \to e^-\overline{\nu})$ в борновском приближении. Возможные фермион-антифермионные $(f\overline{f})$ конечные состояния для $f = e^-, \mu^-, \tau^-, d, s$. Каждый канал дает одинаковый вклад, при этом для кварков следует учесть N_C цветов:

$$B(W^- \to e^-\overline{\nu}) \simeq \frac{1}{3 + 2N_C}. \tag{17}$$

Для $N_C = 3$ получаем $B = 11\%$, экспериментальное значение — $B = 10{,}7\%$.

Другой пример — бренчинг $B(\tau^- \to e^-\overline{\nu}_e\nu_\tau)$. В этом случае

$$B(\tau^- \to e^-\overline{\nu}_e\nu_\tau) \simeq \frac{1}{2 + N_C}. \tag{18}$$

При $N_C = 3$ имеем $B = 20\%$, а экспериментальное значение — $B = 18\%$.

Распад $\pi^0 \to 2\gamma$. π^0-мезон имеет следующий кварковый состав

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|u\overline{u}\rangle - |d\overline{d}\rangle\big). \tag{19}$$

Можно выбрать интерполирующее поле π^0 (это оператор, порождающий π^0 при его действии на вакуум) в виде дивергенции изоспинового $I = 1$, $I_3 = 0$ аксиального тока

$$A_\mu = \frac{1}{2}\big(\overline{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \overline{d}\gamma_\mu\gamma_5 d\big). \tag{20}$$

Вследствие треугольной аномалии существует ненулевая связь аксиального тока с электромагнитными токами

$$\langle 0|TA_\mu(x)J_\nu(y)J_\rho(z)|0\rangle \neq 0, \tag{21}$$

приводящая к распаду π^0 на два фотона. Вычисление ширины этого распада дает

$$\Gamma = \frac{\alpha^2}{64\pi^3}\frac{m_\pi^3}{f_\pi^2}\xi^2 = 7{,}6\xi^2 \text{ эВ}, \tag{22}$$

где f_π — константа, определяемая по заряженным лептонным модам распада π^0, а параметр

$$\xi = N_C\big(e_u^2 - e_d^2\big) = 1, \tag{23}$$

для числа цветов $N_C = 3$. Амплитуда распада пропорциональна N_C, поскольку пион связан с $q\overline{q}$-парами любого цвета.

Экспериментально измеренная ширина распада $\pi^0 \to 2\gamma$

$$\Gamma_{\text{exp}} = (7{,}7 \pm 0{,}6) \text{ эВ} \tag{24}$$

находится в хорошем согласии с предположением (20) о трех цветах.

Прелесть теоретических аргументов в пользу цвета основана на сокращении аномалий в стандартной модели (см. подробнее приложение 2 к главе 4 части I). Аномалии должны сокращаться, поскольку они индуцируют члены в лагранжиане,

которые на классическом уровне отсутствовали и которые несовместимы с калибровочной инвариантностью. Нарушение же калибровочной инвариантности приводит к неперенормируемости теории. Оказывается, что треугольные аномалии отсутствуют, если сумма зарядов каждого поколения обращается в ноль.

Поскольку

$$e_u + e_d = \frac{1}{3} \tag{25}$$

при том, что

$$e_\nu + e_l = -1, \tag{26}$$

то необходимо утроить число кварковых состояний.

2.4. Лагранжиан КХД

Квантовая хромодинамика — калибровочная теория сильных взаимодействий. КХД основана на локальных преобразованиях цветовых степеней свободы, оставляющих лагранжиан КХД инвариантным. Калибровочный группой симметрии КХД является неабелева группа Ли $SU(3)_C$. В этом обозначении группы «C» относится к цветовым степеням свободы, а «3» — к трем возможным состояниям кварков, которые реализуют фундаментальное представление группы размерности три. Глюоны — калибровочные бозоны, ассоциированные с этой калибровочной симметрией, их восемь в соответствии с числом генераторов группы $SU(3)$. Глюоны являются переносчиками сильных взаимодействий между кварками. Обычно кварки и глюоны обозначают следующим образом: q_i, $i = 1, 2, 3$; g_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$. Построение лагранжиана КХД можно произвести по тому же рецепту, что и в КЭД. Для этого нужно использовать калибровочный принцип и учесть неабелевый характер калибровочной группы $SU(3)_C$. При локализации глобальной симметрии лагранжиана КХД, как и в КЭД, нужно заменить производную от кварковых полей ковариантной производной

$$D_\mu q = \Big(\partial_\mu - i g_S \Big(\frac{\lambda_\alpha}{2}\Big) A_\mu^\alpha\Big) q, \tag{27}$$

где $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, q_i — кварковые поля ($i = 1, 2, 3$), g_S — сильная константа связи, $\lambda_\alpha/2$ — генераторы группы $SU(3)$, A_μ^α — глюонные поля, $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$.

Тогда КХД-лагранжиан, содержащий кинетическое слагаемое глюонных полей, запишется в терминах кварковых полей и их ковариантных производных в следующем виде:

$$L_{\text{КХД}} = \sum_q \overline{q}(x)(i\not{D} - m_q)q(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha(x) F_\alpha^{\mu\nu}(x), \tag{28}$$

где глюонный тензор

$$F_{\mu\nu}^\alpha(x) = \partial_\mu A_\nu^\alpha(x) - \partial_\nu A_\mu^\alpha(x) + g_S f^{\alpha\beta\gamma} A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma} \tag{29}$$

содержит билинейное слагаемое глюонных полей, отражающее неабелевый характер калибровочной группы со структурными константами $f^{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, 8$).

В лагранжиан КХД (28) можно включить так называемый θ-член $\theta = (1/16\pi^2) \times \times F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu a}$, где $\tilde{F}^{\mu\nu a} = (1/2)\sigma_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\beta\sigma a}$. Это слагаемое является полной производной, и, казалось бы, не важно для физики, но это не так. С ним связано сильное CP-нарушение, рассматриваемое в приложении 4 к этой главе.

Лагранжиан КХД инвариантен относительно следующих $SU(3)$ калибровочных преобразований

$$\begin{cases} q(x) \to \exp\left(i\theta_\alpha(x)\dfrac{\lambda^\alpha}{2}q(x)\right), \\ D_\mu q(x) \to \exp\left(i\theta_\alpha(x)\dfrac{\lambda^\alpha}{2}D_\mu q(x)\right), \\ A^\alpha_\mu(x) \to A^\alpha_\mu(x) - \dfrac{1}{g_S}\partial_\mu\theta^\alpha(x) + f^{\alpha\beta\gamma}\theta_\beta(x)A_{\mu\gamma}(x), \end{cases} \tag{30}$$

где $\theta_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$ — параметр преобразования. Как и в случае КЭД, взаимодействие кварков с глюонами содержится в слагаемом $\overline{q}g_S(\lambda^\alpha/2)A^\alpha_\mu\gamma^\mu q$. Однако имеется одно очень существенное отличие от КЭД: глюонное кинетическое слагаемое $F^\alpha_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_\alpha$ содержит взаимодействие трех и четырех глюонов. Таким образом, в КХД, в отличие от КЭД, существует самовзаимодействие калибровочных бозонов.

Фейнмановские диаграммы для КХД приведены на рис. 1. Сплошные линии соответствуют фермионам, круглые — глюонам, точечные — духовым состояниям.

Физические вершины в КХД включают: глюон-кварковые вершины (глюон-антикварковые), аналогичные связи фотона с фермионом (антифермионом), а также 3-глюонные и 4-глюонные вершины порядка e_S и e_S^2, которые не имеют аналогов в абелевых теориях, таких, как КЭД.

В КЭД плотность лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \sum_\psi \overline{\psi}(i\not{D} - m_\psi)\psi, \tag{31}$$

с ковариантной производной, задаваемой в терминах фотонного поля A_μ и оператора заряда

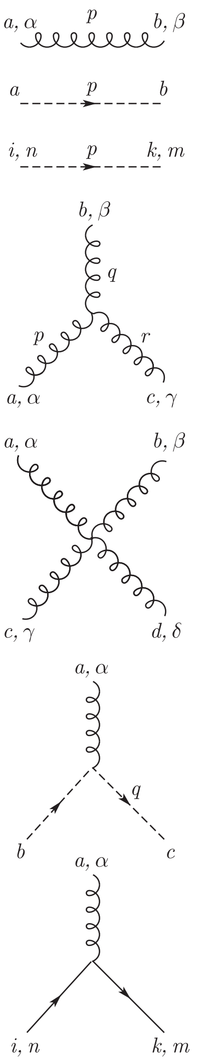
$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu Q \tag{32}$$

и тензором

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{33}$$

В КЭД фотон связан со всеми электрически заряженными частицами, хотя сам по себе он нейтрален. В КХД глюоны цветные, и поэтому они испытывают самовзаимодействие. Это свойство отражается в том, что в КЭД $F_{\mu\nu}$ линеен по калибровочным полям, поэтому слагаемое $F^2_{\mu\nu}$ в лагранжиане — чисто кинетическое слагаемое. В КХД $F^A_{\mu\nu}$ квадратичен по калибровочным полям, поэтому квадрат $F^{A2}_{\mu\nu}$ содержит кубические и четверные вершины.

Лагранжиан КХД (28) имеет достаточно простую форму, но очень богатое динамическое содержание. Он обеспечивает сложный спектр адронов, подразумевает замечательные свойства конфайнмента и асимптотической свободы, спонтанно нарушенной киральной симметрии, нетривиальную топологическую структуру вакуума (инстантоны, нарушение $U_A(1)$-симметрии, ...), нетривиальную фазовую диаграмму (деконфайнмент, восстановление киральной симметрии, цветовая сверхпроводимость). Конфайнмент означает, что изолированный цветной заряд существовать



$$= \delta^{ab}\frac{-ig^{\alpha\beta}}{p^2+i\epsilon}$$

$$= \delta^{ab}\frac{i}{p^2+i\epsilon}$$

$$= \delta^{ik}\frac{i}{p-m+i\epsilon}\bigg|_{mn}$$

$$= gf^{abc}\big(g^{\alpha\beta}(p-q)^\gamma + g^{\beta\gamma}(q-r)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(r-p)^\beta\big)$$

$$\begin{aligned} = & -ig^2 f^{\alpha ac} f^{\alpha bd}\big(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\big) \\ & - ig^2 f^{\alpha ad} f^{\alpha bc}\big(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\big) \\ & - ig^2 f^{\alpha ab} f^{\alpha cd}\big(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\big) \end{aligned}$$

$$= -gf^{abc}q^\alpha$$

$$= ig\lambda^a_{ki}\gamma^\alpha_{mn}$$

Рис. 1

не может. Потенциал между кварком и антикварком, исследованный на пространственно-временных решетках, имеет кулоновское поведение на малых расстояниях и линейно растет на больших расстояниях:

$$V_{q\bar{q}} \simeq C_F\left(\frac{\alpha_S(r)}{r} + \ldots + \sigma r\right), \tag{34}$$

где

$$C_F = \sum_A t^A t^A = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \tag{35}$$

и N_C — число цветов ($N_C = 3$ для КХД).

Зависимость величины α_S от энергии (или от характерных расстояний) будет рассмотрена ниже, здесь же отметим, что линейно растущее слагаемое в (34) делает энергетически невозможным разделение $q\overline{q}$-пары. Если $q\overline{q}$-пара создается в некоторой пространственно-временной точке, например в e^+e^--аннигиляции, то кварк и антикварк начинают движение и удаляются друг от друга. Вскоре становится энергетически выгодным рождение дополнительных кварк-антикварковых пар, плавно распределенных по быстротам между двумя лидирующими зарядами. Эти $q\overline{q}$-пары нейтрализуют цветовой заряд исходной $q\overline{q}$-пары, в конечном состоянии возникают две струи бесцветных адронов, сопровождаемые «медленными» адронами. Это напоминает известный пример с разрезанием магнита: если вы попытаетесь изолировать магнитный полюс, разрезая дипольный магнит, то у магнита возникают в точке разрезания два новых полюса.

Конфайнмент объясняет, почему ядерные силы имеют очень малый радиус, ведь из-за безмассовости глюона они могли бы быть дальнодействующими. Нуклоны — цветовые синглеты, они не могут обмениваться цветными глюонами. Наиболее легкие цветовые синглеты — пионы, поэтому радиус ядерных сил определяется массой пиона $r \sim m_\pi^{-1} \simeq 10^{-13}$ см.

2.5. Симметрии КХД

Сначала рассмотрим несколько упрощенный вариант КХД, основанный на лагранжиане

$$L = -\frac{1}{4g^2}\,\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \sum_{j=1}^{f}\overline{\psi}_j(i\not{D})\psi_j, \tag{36}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \quad \text{и} \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu. \tag{37}$$

Здесь A_μ — 3×3 эрмитовы матрицы с нулевым следом. Каждое фермионное кварковое поле ψ_j несет соответствующий 3-компонентный цветовой индекс. Лагранжиан (36) представляет собой идеализированную форму реального лагранжиана КХД, поскольку допускается любое число f ароматов кварков. Кроме того, массы кварков считаются равными нулю. В определении калибровочного потенциала в выражении (36) константа связи g включена в потенциал, поэтому g не входит в определение ковариантной производной (37).

Еще раз подчеркнем, что форма лагранжиана однозначно фиксируется постулатами, имеющими достаточно общий характер. К ним относятся $SU(3)$ калибровочная симметрия, а также общие принципы квантовой теории поля (локальность, относительность, перенормируемость). Именно соображения перенормируемости запрещают более сложные слагаемые в лагранжиане (например, слагаемое с аномальным глюомагнитным моментом $\sim \overline{q}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}q$). Трудно построить квантовую теорию поля, которая не была бы асимптотически свободной. Асимптотическая свобода — это более строгое требование, чем перенормируемость. Асимптотическая свобода реализуется только в тех теориях, которые содержат неабелевы калибровочные поля.

Группой симметрии лагранжиана (36) является

$$G = SU(3)_C \times SU(f)_L \times SU(f)_R \times U(1)_B \times U(1)_A \times R^+_{\mathrm{scale}}, \tag{38}$$

а также лагранжиан обладает Пуанкаре- и C-, P-, T-инвариантностью. Первый фактор в (38) — локальная цветовая симметрия; последующие два характеризуют

возможность вращать левые (правые) состояния кварков; четвертый фактор соответствует сохранению барионного числа (наличие общей фазы для всех кварковых полей); пятый — сохранению аксиального барионного числа (равные и противоположные фазы всех левых и правых компонент кварковых полей). Наконец, последний фактор в (38) связан с масштабной инвариантностью теории.

Киральная $SU(f)_L \times SU(f)_R$-симметрия, связанная с независимым вращением левых и правых компонент кварковых полей, возникает вследствие универсальной связи кварков с глюонами, сохраняющей спиральность. Киральная симметрия способна нарушаться ненулевыми кварковыми массовыми членами, так как эти слагаемые связывают две спиральности. Если кварки имеют ненулевые, но одинаковые массы, то остается только диагональная $SU(f)_{L+R}$-симметрия. Если же кварки имеют ненулевые неравные массы, то симметрия нарушается до произведений групп $U(1)$ (по числу ароматов). Если массы всех кварков отличны от нуля, то P- и T-четность в (36) нарушается за счет ненулевого θ-члена. Для безмассовых кварков все величины θ физически эквивалентны, поэтому можно выбрать $\theta = 0$. Наконец, R^+_{scale} фактор в (38) означает, что единственный параметр g в теории — безразмерная величина. Таким образом, классическая теория инвариантна относительно изменения масштабов длин или (эквивалентно) обратных масс. В самом деле, действие $\int d^4xL$ инвариантно относительно изменения масштабов

$$x^\mu \to \lambda x^\mu, \quad A \to \lambda^{-1} A, \quad \psi \to \lambda^{-1}\psi. \tag{39}$$

Действительная симметрия КХД несколько отличается от рассмотренной выше и включает в себя следующие переходы:

$$\begin{aligned} G_{\text{act.}} = SU(3)_C \times SU(f)_L \times SU(f)_R \times Z_A^f \times U(1)_B \to \\ \to SU(3)_C \times SU(f)_{L+R} \times U(1)_B \to SU(f)_{L+R} \times U(1)_B. \end{aligned} \tag{40}$$

Поясним этот каскад симметрийных превращений. Первая строка (40) содержит подгруппу, которая «выживает» при квантовании классической теории. Классическая масштабная инвариантность R^+_{scale} полностью теряется, при этом $U(1)_A$-симметрия аксиального барионного числа сводится к дискретной группе Z_A^f. Нарушение масштабной инвариантности связано с существованием «бегущей» эффективной константы, асимптотической свободой и размерной трансмутацией. Нарушение $U(1)_A$ находит свое отражение в треугольной аномалии и инстантонах. Во второй строке (40) показаны группы симметрии квантовой теории, являющиеся также группами симметрии основного состояния. Из-за спонтанного нарушения симметрии эта группа является подгруппой исходной группы. Иначе говоря, стабильные решения уравнений движения обладают меньшей симметрией, чем сами уравнения. Основное состояние содержит конденсат кварк-антикварковых пар, однородно распределенный в пространстве-времени. При этом невозможно независимо вращать различные спиральные компоненты, оставляя конденсат инвариантным. «Легкость» π-мезонов, как и феноменология их взаимодействий при низких энергиях, есть следствие спонтанного нарушения симметрии.

В третьей строке выражения (40) мы попытались подчеркнуть тот факт, что локальная калибровочная симметрия, которая так необходима для формулировки теории, не является свойством какой-либо физической наблюдаемой. Действительно, при построении гильбертова пространства КХД следует ограничиться калибровочно-инвариантными состояниями. Расширенное гильбертово пространство, используемое в теории возмущений, не имеет положительно-определенного внутреннего произведения двух векторов. Оно содержит «духовые» состояния. В отличие от КЭД, в низко-

энергетической физике КХД нет каких-либо проявлений калибровочной симметрии. В частности, нет дальнодействующих сил, как и нет частиц, входящих в цветовые мультиплеты. В этом и заключается свойство конфайнмента КХД.

Обсудим теперь более детально ключевые динамические явления КХД: асимптотическая свобода, конфайнмент, киральные конденсаты.

2.6. Безмассовая КХД и масштабная инвариантность

Лагранжиан (28) КХД определяет теорию на классическом уровне. Процедура квантования калибровочных теорий включает ряд усложнений, связанных с тем, что не все степени свободы являются физическими, и их следует исключить, предполагая калибровочную инвариантность. Эта особенность квантования присутствует и в квантовой электродинамике. Решается она путем введения в лагранжиан слагаемого, фиксирующего калибровку. При этом дополнительное слагаемое не должно нарушать Лоренц-инвариантность. В неабелевом случае нужно ввести «духовые» состояния и сформулировать для них правила Фейнмана. Обычно число «духов» совпадает с числом калибровочных бозонов. «Духи» распространяются лишь в замкнутых петлях, и их вершины взаимодействия с глюонами вводятся как дополнительные слагаемые в плотность лагранжиана. Фейнмановские правила для КХД с участием духов приведены выше на рис. 1.

Если известны правила Фейнмана, то можно получить разложение в ряд теории возмущений. К сожалению, петлевые вклады будут содержать бесконечности. Поэтому следует ввести регуляризацию, сохраняющую калибровочную симметрию и Лоренц-инвариантность.

Можно ввести обрезание Λ (размерности энергии), например, согласно схеме Паули–Вилларса. Сейчас более популярна размерная регуляризация, которую мы обсудим ниже. После регуляризации следующий шаг — перенормировка. В перенормируемой теории (для всех калибровочных теорий в 4-мерном пространстве) зависимость от параметра обрезания может быть полностью «поглощена» в переопределение масс частиц, калибровочных констант связи и нормировку волновых функций. После перенормировки пертурбативное определение квантовой теории с лагранжианом, подобным (28), считается законченным.

В лагранжиане (28) кварковые массы — единственные параметры с размерностью массы. Наивно было бы ожидать, что безмассовая КХД масштабно-инвариантна. Это действительно так, но только на классическом уровне. Масштабная инвариантность подразумевает, что безразмерные наблюдаемые не должны зависеть от абсолютной энергетической шкалы, а могут зависеть лишь от отношений величин, определяемых этим энергетическим масштабом.

Безмассовый предел должен быть существенным для асимптотически больших энергий.

Наивное ожидание, что безмассовая КХД должна быть масштабно-инвариантной, не оправдано в квантовой теории. Масштабная симметрия классической теории неизбежно нарушена процедурами регуляризации и перенормировки, которые вводят в квантовую версию теории размерный параметр. Поэтому когда симметрия классической теории нарушается квантованием, регуляризацией и перенормировкой, говорят о наличии в теории «аномалии». Таким образом, масштабная инвариантность в безмассовой КХД аномальна.

Хотя безмассовая КХД в конечном счете не является масштабно-инвариантной, отклонения от скейлинга асимптотически малы, логарифмические и вполне вычисля-

емы. В массивной КХД имеются дополнительные массовые поправки, подавленные степенями m.

На партонном уровне (кварков и глюонов) можно ожидать успешного применения асимптотических результатов безмассовой КХД к так называемым «жестким» процессам, обладающим следующими свойствами:

а) все соответствующие энергетические переменные должны быть большими:

$$E_i = z_i Q, \quad Q \gg m_j, \quad z_i \text{ — скейлинговая переменная } (z_i \sim O(1)); \tag{41}$$

б) не должно быть инфракрасных сингулярностей (инфракрасно «безопасные» процессы);

в) рассматриваемый процесс должен быть конечным для $m \to 0$ (нет массовых сингулярностей).

Чтобы удовлетворить всем этим критериям, процесс должен быть как можно более «инклюзивным»: он должен включать все конечные состояния с испусканием безмассовых глюонов.

Обсудим подробнее инфракрасную и коллинеарную «безопасность». Рассмотрим, например, кварковую виртуальную петлю, заканчивающуюся «реальным» кварком и испусканием «реального» глюона (рис. 2)

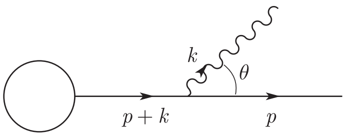


Рис. 2

Для пропагатора имеем:

$$\text{пропагатор} = \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} = \frac{1}{2(pk)} = \frac{1}{2E_k E_p} \cdot \frac{1}{(1 - \beta_p \cos\theta)}. \tag{42}$$

Поскольку глюон безмассовый, E_k может быть сколь угодно малой, и это соответствует инфракрасной сингулярности. Заметим, что квадрат амплитуды мы должны проинтегрировать по фазовому пространству конечных состояний dE_k/E_k. Поэтому получаем $\sim 1/E_k^2$ от квадрата амплитуды и $d^3k/E_k \sim E_k dE_k$ от фазового пространства. Кроме того, при $m \to 0$ $\beta_p = \sqrt{1 - m^2/E_p^2} \to 1$ и $(1 - \beta_p \cos\theta) \to 0$ при $\cos\theta \to 1$, т. е. возникает коллинеарная массовая сингулярность.

Существуют две важные теоремы, относящиеся к инфракрасным и массовым сингулярностям. Первая из них — теорема Блоха–Нордсика: инфракрасные сингулярности сокращаются в вещественных и виртуальных диаграммах (рис. 3), когда учтены все разрешения неразличимых конечных состояний.

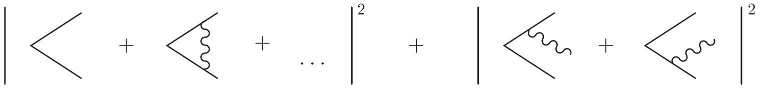


Рис. 3

Например, для каждого детектора имеется минимум энергии испущенного глюона, который может быть зарегистрирован. Для сокращения инфракрасных расходимостей, нужно добавить всевозможные испускания глюонов с энергией, ниже детектируемого минимума.

Вторая теорема (Киношита–Ли–Наунберг) — массовые сингулярности, связанные с внешними частицами массы m, сокращаются, если просуммировать по всем вырожденным состояниям (с той же самой массой). То есть для конечного состояния частицы с массой m нужно добавить все конечные состояния, которые в пределе $m \to 0$ имеют ту же массу, включая глюоны и безмассовые пары. Если выбрано полностью инклюзивное конечное состояние, то остаются только массовые сингулярности, связанные с начальным состоянием частиц (как мы увидим, они могут быть учтены в непертурбативных партонных плотностях, которые есть не что иное, как плотности вероятности нахождения данного партона в начальном адроне).

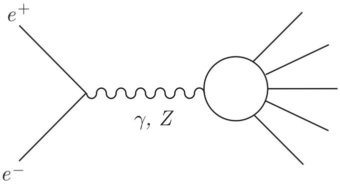


Рис. 4

Таким образом, жесткие процессы, для которых применима безмассовая асимптотика КХД, должны удовлетворять требованиям двух вышеупомянутых теорем.

Приведем пример важного жесткого процесса. Рассмотрим сечение инклюзивного рождения адронов в e^+e^--аннигиляции (рис. 4), параметризованного в терминах уже обсуждавшейся переменной $R = \sigma(e^+e^- \to \text{адроны})/\sigma_{\text{точечн.}}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$.

Для сечения взаимодействия точечных объектов $\sigma_{\text{точечн.}} = 4\pi\alpha_S^2/s$, где $s = Q^2 = 4E^2$ — квадрат полной энергии в системе центра масс, Q — масса обменного виртуального калибровочного бозона. На партонном уровне конечное состояние содержит $(q\overline{q} + ng + n'q'\overline{q}')$, где n, n' в каждом порядке теории возмущений ограничены. Предполагается при этом, что превращение партонов в адроны не изменяет скорость реакции (это происходит с вероятностью единица). Мы уже отмечали, что для справедливости последнего утверждения необходимо усреднение по достаточно широкому интервалу (бину) величины Q. Ширина бина должна увеличиваться вблизи порогов, например, $c\overline{c}, b\overline{b}, \ldots$.

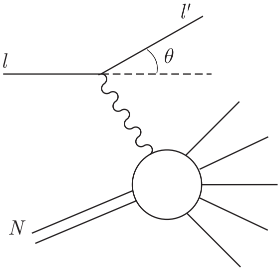


Рис. 5

Другой важный класс жестких процессов — глубоконеупругое рассеяние (DIS):

$$l + N \to l' + X, \quad l = e^{\pm}, \mu^{\pm}, \nu, \overline{\nu}, \tag{43}$$

которое играет ключевую роль в понимании КХД и нуклонной структуры. Для процесса (43), изображенного на рис. 5 в системе покоя нуклона с массой m (лабораторной системе):

$$\begin{gathered} Q^2 = -q^2 = (k-k')^2 = 4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}; \\ m\nu = (pq); \\ x = \frac{Q^2}{2m\nu}. \end{gathered} \tag{44}$$

В этом случае виртуальный импульс калибровочного бозона пространственноподобен, а x — бьеркеновская переменная.

2.7. Ренормгрупповой анализ

В этом разделе будет рассмотрен формализм ренорм-группы для бегущей константы связи в КХД, приводящий к такому свойству КХД как асимптотическая свобода. Но сначала суммируем результаты перенормировки.

Предположим, что мы провели процедуру регуляризации расходящихся интегралов, введя размерный параметр обрезания Λ, при этом сохранены калибровочная и Лоренц-инвариантность. Зависимость перенормированных величин от Λ исключена путем «поглощения» Λ в переопределение m (массы кварка, предполагая кварк одного аромата), калибровочной константы e (может быть e в КЭД или e_S в КХД) и в перенормируемый фактор $Z_{q,g}^{1/2}$ волновой функции кварка и глюона. Например, можно определить ренормированную массу m как положение полюса в кварковом пропагаторе. Аналогично, нормировку Z_q считать вычетом в полюсе:

$$\text{пропагатор} = \frac{Z_q}{p^2 - m^2} + \text{неполюсные слагаемые.} \tag{45}$$

Ренормированная константа связи e определяется в терминах ренормированной 3-х точечной вершины при определенных значениях внешних импульсов.

Начнем обсуждение со случая безмассовой КХД. Если стартовать с нулевой на классическом уровне (голой) массы $m_0 = 0$, то масса не ренормируется из-за ограничения киральной симметрии. Сохраняющиеся токи, связанные с киральной симметрией — аксиальные токи $\overline{q}\gamma_\mu\gamma_5 q$. Для дивергенции аксиального тока с помощью уравнения Дирака получаем $\partial^\mu(\overline{q}\gamma_\mu\gamma_5 q) = 2m\overline{q}\gamma_5 q$. Поэтому в безмассовом пределе аксиальный ток и соответствующий аксиальный заряд сохраняются. Поскольку КХД — векторная теория, то не следует беспокоиться о киральных аномалиях. Поэтому можно выбрать регуляризацию, которая, помимо калибровочной и Лоренц-симметрии, сохраняла бы и киральную симметрию. В этом случае ренормированная масса остается нулевой (в (45) $m = 0$).

Ренормированная константа связи e_S определяется из ренормированной 3-глюонной вершины на масштабе $-\mu^2$ (рис. 6)

$$\begin{gathered} V_{\text{гол.}}(p^2, q^2, r^2) = Z V_{\text{рен.}}(p^2, q^2, r^2); \\ Z = Z_g^{3/2} Z_V; \quad e_S = V_{\text{рен.}}(-\mu^2, -\mu^2, -\mu^2). \end{gathered} \tag{46}$$

Здесь $V_{\text{гол.}}$ — вершина, вычисленная с учетом однопетлевых поправок в низшем порядке ($V_{\text{гол.}} = e_{S0}$ в низшем порядке). Она содержит обрезание Λ, но не масштаб μ. Z — фактор, зависящий от обрезания. Отрицательная величина $\mu^2 < 0$ выбрана для того, чтобы избежать физического обрезания (глюон с отрицательной виртуальной

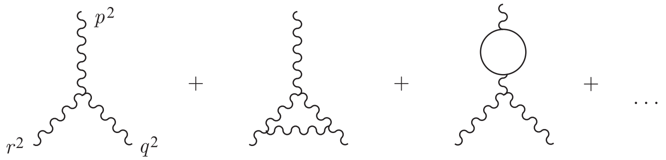


Рис. 6

массой не может распадаться). Аналогично можно определить Z_g из безмассового глюонного пропагатора на том же масштабе $-\mu^2$ (нулевая масса глюона гарантируется калибровочной инвариантностью). После вычисления одно-петлевых диаграмм рис. 6, имеем:

$$\begin{aligned} V_{\text{гол.}}(p^2, q^2, r^2) &= e_{0S}\left[1 + c\alpha_{0S}\log\frac{\Lambda^2}{p^2} + \ldots\right] = \\ &= \left[1 + c\alpha_S \log\frac{\Lambda^2}{-\mu^2} + \ldots\right] e_S \left[1 + c\alpha_S \log\frac{-\mu^2}{p^2} + \ldots\right] = Z V_{\text{рен.}}. \end{aligned} \tag{47}$$

Отметим замену e_0 на e_S на втором шаге. Значение e_S требует точного определения величин, включенных в Z. В этой ренормализационной схеме фиксируются слагаемые, входящие в Z (в терминах степеней $\alpha_S \log \Lambda^2$). Если $V_{\text{рен.}}$ фиксирована, то ренормированная константа связи определяется из соотношений (46). Например, в схеме с вычитанием импульса, имеем $V_{\text{рен.}}(p^2, p^2, p^2) = e_S + V_{\text{гол.}}(p^2, p^2, p^2) - V_{\text{гол.}}(-\mu^2, -\mu^2, -\mu^2)$. В этой схеме все конечные слагаемые, которые не обращаются в ноль при $p^2 = -\mu^2$, включены в Z.

Важно заметить, что $V_{\text{гол.}}$ зависит от Λ, но не от μ. Величина μ вводится тогда, когда Z, $V_{\text{рен.}}$, и, следовательно, α_S определены. С этого момента для краткости будем писать α, имея в виду или КЭД константу связи или константу связи α_S КХД.

Для функции Грина имеем

$$G_{\text{гол.}}(\Lambda^2, \alpha_0, p_i^2) = Z G_{\text{рен.}}(\mu^2, \alpha, p_i^2). \tag{48}$$

Тогда

$$\frac{dG_{\text{гол.}}}{d\log\mu^2} = \frac{d}{d\log\mu^2}[ZG_{\text{рен.}}] = 0 \tag{49}$$

или

$$Z\left[\frac{\partial}{\partial\log\mu^2} + \frac{\partial\alpha}{\partial\log\mu^2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\log\mu^2}\right]G_{\text{рен.}} = 0. \tag{50}$$

Окончательно уравнение реномр-группы (УРГ) запишется в виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\log\mu^2} + \beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma(\alpha)\right]G_{\text{рен.}} = 0, \tag{51}$$

где

$$\beta(\alpha) = \frac{\partial\alpha}{\partial\log\mu^2} \tag{52}$$

и

$$\gamma(\alpha) = \frac{\partial\log Z}{\partial\log\mu^2}. \tag{53}$$

Заметим, что $\beta(\alpha)$ не зависит от того, какую функцию Грина мы рассматриваем, функция же $\gamma(\alpha)$ зависит от G.

Предположим, что мы хотим применить УРГ к некоторому жесткому процессу, происходящему на большом масштабе Q, связанному с функцией Грина G, которую всегда можно обезразмерить (умножая на соответствующие степени Q). Так как зависимость от Q будет логарифмической, введем переменную t:

$$t = \log\frac{Q^2}{\mu^2}. \tag{54}$$

Тогда можно записать $G_{\text{рен.}} \equiv F(t, \alpha, x_i)$, где x_i — скейлинговые переменные (которые ниже будем часто опускать). В наивном скейлинговом пределе F должна быть независимой от t. Чтобы найти действительную зависимость от t, нужно решить УРГ:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma(\alpha)\right]G_{\text{рен.}} = 0 \tag{55}$$

с заданными граничными условиями при $t = 0$ (или $Q^2 = \mu^2$), $F(0, \alpha)$.

Решим сначала УРГ в простейшем случае $\gamma(\alpha) = 0$. Подчеркнем, что это приближение применимо для $R_{e^+e^-}$, когда $\gamma \to 0$ связано с неперенормируемостью электрического заряда в КХД.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha}\right] G_{\text{рен.}} = 0. \tag{56}$$

Его решение

$$F(t, \alpha) = F[0, \alpha(t)], \tag{57}$$

где бегущая константа $\alpha(t)$ определяется из соотношения:

$$t = \int\limits_{\alpha}^{\alpha(t)} \frac{1}{\beta(\alpha')} d\alpha'. \tag{58}$$

Заметим, что из этого определения следует, что $\alpha(0) = \alpha$, поэтому граничные условия также удовлетворены. Чтобы доказать, что $F[0, \alpha(t)]$ является действительно решением, вычислим производные по t и α (двум независимым переменным) от обеих частей (58).

Вычисляя производную по t, получаем:

$$1 = \frac{1}{\beta(\alpha)} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t}. \tag{59}$$

Затем по α:

$$0 = -\frac{1}{\beta(\alpha)} + \frac{1}{\beta(\alpha(t))} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial \alpha}. \tag{60}$$

Эти уравнения содержат явную зависимость бегущей константы связи от t и α:

$$\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} = \beta(\alpha(t)), \tag{61}$$

$$\frac{\partial \alpha(t)}{\partial \alpha} = \frac{\beta(\alpha(t))}{\beta(\alpha)}. \tag{62}$$

Используя (61), (62) получаем, что $F[0, \alpha(t)]$ действительно является решением.

Аналогично находится более общее решение УРГ (55) с $\gamma \neq 0$:

$$F(t, \alpha) = F[0, \alpha(t)] \exp\left[\int\limits_{\alpha}^{\alpha(t)} \frac{\gamma(\alpha')}{\beta(\alpha')} d\alpha'\right]. \tag{63}$$

Заметим, что при этом граничные условия также удовлетворяются.

Важным моментом является наличие бегущей константы, которая определяет асимптотическое отклонение от скейлинга. На следующем шаге необходимо изучить функциональную форму бегущей константы. Из (61) видно, что скорость изменения бегущей константы от t определяется β-функцией. В свою очередь, $\beta(\alpha)$ определяется μ-зависимостью ренормированной константы связи (52).

Очевидно, что в трехглюонной вершине в низшем порядке нет зависимости от μ. Зависимость возникает в 1-й петле, т. е. в порядке e^3. Таким образом, в теории возмущений получаем:

$$\frac{\partial e}{\partial \log \mu^2} \sim e^3. \tag{64}$$

Напомним, что $\alpha = (e^2/4\pi)$, тогда

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \log \mu^2} \sim 2e \frac{\partial e}{\partial \log \mu^2} \sim e^4 \sim \alpha^2. \tag{65}$$

Поэтому поведение функции $\beta(\alpha)$ в теории возмущений следующее:

$$\beta(\alpha) = \pm b\alpha^2 [1 + b'\alpha + \ldots]. \tag{66}$$

Поскольку знак лидирующего слагаемого существенен для дальнейшего обсуждения, условимся, что всегда $b > 0$, при этом мы вынесли знак перед выражением (66).

Прямое вычисление 1-петлевого вклада дает в случае КЭД

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &\sim +b\alpha^2 + \ldots, \\ b &= \sum_i \frac{N_C (Q^2)_i}{3\pi}, \end{aligned} \tag{67}$$

Здесь $N_C = 3$ для кварков и $N_C = 1$ для лептонов. Суммирование производится по всем лептонам.

В случае КХД:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &\sim -b\alpha^2 + \ldots, \\ b &= \frac{11 N_C - 2n_f}{12\pi}, \end{aligned} \tag{68}$$

где n_f — число ароматов кварков ($n_f < 16$, поэтому $b > 0$ в КХД).

Если $\alpha(t)$ мала, можно вычислить $\beta(\alpha(t))$ по теории возмущений. Знак перед b определяет наклон константы связи: $\alpha(t)$ возрастает с t (или Q^2), если $b > 0$ при малых α (КЭД) или $\alpha(t)$ уменьшается с t (или Q^2), если $b < 0$ при малых α (КХД).

Теории, подобные КХД, в которых бегущая константа связи стремится к нулю при больших Q^2 называются *асимптотически свободными*. Отметим важный результат, который может быть доказан: в 4-мерном пространстве все неабелевы калибровочные теории асимптотически свободны.

Возвращаясь к соотношению (58), заменим $\beta(\alpha) \sim \pm b\alpha^2$ и, вычислив интеграл, получим

$$\text{КЭД:} \quad \alpha(t) \sim \frac{\alpha}{1 - b\alpha t}, \tag{69}$$

$$\text{КХД:} \quad \alpha(t) \sim \frac{\alpha}{1 + b\alpha t}. \tag{70}$$

Обычно в КХД используется несколько другая форма. Определяя $\dfrac{1}{\alpha} = b \log \dfrac{\mu^2}{\Lambda^2_{\text{КХД}}}$, перепишем

$$\alpha(t) \sim \frac{1}{1/\alpha + bt} = \frac{1}{b\log(\mu^2/\Lambda^2_{\text{КХД}}) + b\log(Q^2/\mu^2)} = \frac{1}{b\log(Q^2/\Lambda^2_{\text{КХД}})}. \tag{71}$$

Видно, что $\alpha(t)$ уменьшается логарифмически с Q^2, и можно ввести размерный параметр $\Lambda_{\text{КХД}}$, заменяющий μ (иногда пишут $\Lambda_{\text{КХД}} = \Lambda$). Очевидно, что Λ зависит от определения α, а также не только от μ, но и от используемой схемы перенормировки. Через параметр b, т. е. через β-функцию, Λ зависит и от числа ароматов кварков. Интересно, что и в КЭД, и в КХД вплоть до масштабов Q, только кварки с массами $m \ll Q$ дают вклад в бегущую константу (decoupling theorem). Это очень важно,

поскольку все приложения теории возмущений КХД до сих пор ограничивались энергиями, ниже массы t-кварка.

Для применимости «decoupling theorem» необходимо, чтобы теория, в которой исключены все внутренние линии, связанные с тяжелыми частицами, оставалась перенормируемой и константы связи не изменялись как функции масс. Эти требования справедливы для тяжелых кварков в КЭД и КХД, но не справедливы в электрослабой теории, где исключение t-кварка нарушало бы $SU(2)$-симметрию (поскольку левые компоненты t- и b-кварков входят в дублет) и связь кварка с хиггсовским мультиплетом (следовательно, с продольными калибровочными бозонами) пропорциональна массе. Таким образом, в КЭД и КХД кварки с массами $m \gg Q$ не дают вклада в n_f — коэффициент соответствующей β-функции. Вообще, эффекты тяжелых кварков степенным образом подавлены, хотя и могут быть учтены. Например в e^+e^--аннигиляции для $2m_c < Q < 2m_b$ соответствующая асимптотика $n_f = 4$, а для $2m_b < Q < 2m_t$ — $n_f = 5$. При переходе через порог рождения кварка коэффициент в β-функции изменяется, следовательно, изменяется наклон $\alpha(t)$. Поскольку $\alpha(t)$ — непрерывна, то Λ изменяется так, чтобы $\alpha(t)$ была постоянной при $Q \sim O(m_b)$. Влияние n_f на величину Λ заметное: $\Lambda_5 \simeq 0{,}65\Lambda_4$. Отметим присутствие полюса при $\pm b\alpha t$ в соотношениях (69) и (70). Это так называемый полюс Ландау, установленный еще в 50-х годах. Для $\mu \sim m_e$ (в КЭД) полюс находится за планковской массой. В КХД полюс Ландау находится при отрицательных t или $Q < \mu$ в области легких адронных масс. Очевидно, что поведение физической константы связи вблизи полюса Ландау — проблема, которая должна решаться вне теории возмущений КХД.

Нелидирующие слагаемые в асимптотическом поведении бегущей константы связи можно оценить, вернувшись к соотношению (66) и вычисляя b' в двухпетлевом приближении. Однако пертурбативные коэффициенты $\beta(\alpha)$ зависят от схемы перенормировки. В этом отношении интересно заметить, что b и b' не зависят от определения α, а коэффициенты при высших порядках, наоборот, зависят. Приведем простое доказательство.

Два различных пертурбативных определения α связаны между собой, т. е. $\alpha' \sim \alpha(1 + c_1\alpha + \ldots)$.

Тогда

$$\beta(\alpha') = \frac{d\alpha'}{d\log\mu^2} = \frac{d\alpha}{d\log\mu^2}(1 + 2c_1\alpha + \ldots) = \\ = \pm b\alpha^2(1 + b'\alpha + \ldots)(1 + 2c_1\alpha + \ldots) = \pm b\alpha'^2(1 + b'\alpha' + \ldots). \quad (72)$$

Отсюда видно, с точностью до нелидирующих поправок, $\beta(\alpha')$ имеет ту же форму, что и $\beta(\alpha)$.

В КХД величина

$$b' = \frac{153 - 19n_f}{2\pi(33 - 2n_f)}. \quad (73)$$

Учитывая b', можно записать выражение для бегущей константы связи в следующем после лидирующего (NLO) порядке:

$$\alpha(Q^2) = \alpha_{LO}(Q^2)\left[1 - b'\alpha_{LO}(Q^2)\log\left(\log\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) + \ldots\right], \quad (74)$$

где $\alpha_{LO}^{-1} = b\log(Q^2/\Lambda^2)$.

Итак, мы стартовали с безмассовой классической КХД, которая масштабно-инвариантна. Процедуры квантования, регуляризации и перенормировки нарушают

масштабную инвариантность. В квантовом случае КХД имеет характерный энергетический масштаб, для которого экспериментальные данные дают значение в несколько сотен МэВ. Безразмерные величины зависят от энергетического масштаба через бегущую константу, логарифмически зависящую от $Q^2/\Lambda^2_{\text{КХД}}$. В КХД бегущая константа связи уменьшается логарифмически при больших Q^2 (асимптотическая свобода), в КЭД константа связи ведет себя противоположным образом.

2.8. Основные свойства КХД

2.8.1. Асимптотическая свобода. Попытаемся теперь на качественном уровне разобраться в динамических свойствах КХД, для этого рассмотрим, как зависит константа связи от характерных пространственных масштабов теории.

Это поведение, в свою очередь, определяется откликом вакуума на присутствие пробного заряда. Вакуум — это основное состояние теории. В квантовой теории вакуум — это отнюдь не пустое пространство–время, принцип неопределенности допускает существование пар частиц-античастиц в течение времени, обратно пропорционального их энергии. В квантовой электродинамике (КЭД) электрон-позитронные пары оказывают экранирующее воздействие на пробный электрический заряд. Поэтому электромагнитная константа связи (заряд) растет с уменьшением расстояния по закону:

$$e^2(r) = \frac{e^2(r_0)}{1 + 2e^2(r_0)/(3\pi)\ln(r/r_0)}, \tag{75}$$

где r_0 — фиксированный масштаб расстояний.

Формула (75) имеет два удивительных свойства:

1) при больших $r \gg r_0$ можно пренебречь единицей в знаменателе, на таких расстояниях «одетый» заряд $e(r)$ не зависит от величины «голого» заряда $e(r_0)$;

2) в локальном пределе $r_0 \to 0$, если потребовать конечности $e(r_0)$, эффективный заряд $e(r) \to 0$, на любых конечных расстояниях от голого заряда! Это знаменитая проблема «нуль-заряда», представляющая собой серьезную трудность для КЭД. Для разрешения этой проблемы следует предположить, что либо КЭД не является истинно фундаментальной теорией, либо выражение (75), полученное в рамках теории возмущений КЭД, значительно изменяется в режиме сильной связи теории. Последняя возможность, по-видимому, более предпочтительна, поскольку на малых расстояниях электрический заряд становится очень большим, и его взаимодействие с электрон-позитронным вакуумом нельзя рассчитывать по теории возмущений.

К счастью, из-за малости $\alpha_{em}(r) = e^2(r)/(4\pi) = 1/137$, эта фундаментальная проблема теории проявляет себя на очень малых расстояниях $\sim \exp(-3/8\alpha_{em})$, которые находятся далеко за пределами нынешних, и, вероятно, будущих экспериментов. Это обстоятельство и позволяет рассматривать КЭД как весьма эффективную теорию.

В КХД ситуация качественно другая: имеет место антиэкранирование пробного цветового заряда, поэтому эффективный заряд мал на малых расстояниях. Это свойство теории, как уже обсуждалось в разд. 2.7, называют асимптотической свободой.

Проиллюстрируем это свойство полевой теории на примере физики конденсированных сред. Будем рассматривать вакуумное состояние как непрерывную среду с диэлектрической постоянной ε. Как известно, диэлектрическая постоянная связана с магнитной постоянной μ и скоростью света соотношением

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{c^2} = 1. \tag{76}$$

Таким образом, экранирующая среда ($\varepsilon > 0$) должна быть диамагнетиком ($\mu < 1$), и наоборот, парамагнитная среда ($\mu > 1$) должна проявлять антиэкранирующие свойства, приводящие к асимптотической свободе.

Почему в КХД вакуум парамагнитный, а КЭД — диамагнитный? Как известно, величина μ связана с магнитной восприимчивостью χ соотношением:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi. \tag{77}$$

Когда электроны в КЭД движутся в электромагнитном поле, то знак магнитной восприимчивости определяют два конкурирующих эффекта:

а) электроны в магнитном поле двигаются по квантовым орбитам (уровням Ландау). Токи, возникающие при таком движении, создают магнитное поле, направленное противоположно внешнему полю. При этом диамагнитный отклик $\chi < 0$.

б) Спины электронов выстраиваются вдоль внешнего магнитного поля, это дает положительный парамагнитный отклик $\chi > 0$.

В квантовой электродинамике диамагнитный эффект доминирует, поэтому вакуум экранирует электрические заряды. В КХД глюоны несут цветовой заряд. Так как они имеют больший спин (спин 1), чем кварки (или электроны), парамагнитный эффект доминирует, и вакуум проявляет свойства антиэкранирования.

В квантовой хромодинамике в низшем порядке теории возмущений «константа» связи зависит от расстояния следующим образом

$$\alpha_S(r_1) = \frac{\alpha_S(r_2)}{1 + (11N_C - 2N_f)/(6\pi)\alpha_S(r_2)\ln(r_2/r_1)}, \tag{78}$$

где $N_C = 3$ — число цветов и N_f — число ароматов кварков (обычно полагают $N_f = 3$). Очевидно, если $r_1 < r_2$, то и $\alpha_S(r_1) < \alpha_S(r_2)$. При больших переданных импульсах, соответствующих малым расстояниям, «константа» связи $\alpha_S(r)$ становится малой ($\alpha_S < 1$), поэтому применима теория возмущений КХД.

2.8.2. Конфайнмент. Асимптотическая свобода в КХД подразумевает уменьшение константы связи на малых расстояниях и, соответственно, увеличение на больших расстояниях. В квантовой электродинамике режим сильной связи начинается на чрезвычайно малых расстояниях, не достижимых в современных экспериментах. В КХД многие свойства адронов определяются свойствами теории в режиме сильной связи, и необходимо строить ускорители для изучения КХД в режиме слабой связи.

Свойство конфайнмента КХД означает отсутствие фундаментальных полей (кварков и глюонов) лагранжиана КХД в спектре частиц как асимптотических состояний.

По некоторым, пока до конца неизвестным причинам, все физические состояния с конечной энергией оказываются синглетной по цвету комбинацией кварков и глюонов, т. е. кварки и глюоны в обычных условиях заперты в адронах на расстояниях, меньших 1 фм.

Свойства конфайнмента можно сформулировать на количественном уровне, рассматривая распространение тяжелой кварк-антикварковой пары на расстояние R за время T. Для этого определяют вильсоновскую петлю:

$$W(R,T) = \mathrm{tr}\Big[P\exp\Big(i\int_c A_\mu^a T^a dx^\mu\Big)\Big], \tag{79}$$

как след от упорядоченной по времени экспоненты, зависящей от A_μ^a — глюонного поля. T^a — генераторы группы $SU(3)_C$ и контур C выбран в виде прямоугольника со стороной R в одном из пространственных измерений и стороной T во временном направлении.

Можно показать, что при $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} W(R,T) = \exp\bigl[-TV(R)\bigr], \tag{80}$$

где $V(R)$ — статический потенциал взаимодействия тяжелых кварков. На больших расстояниях этот потенциал

$$V(R) = \sigma R, \tag{81}$$

где $\sigma \simeq 1$ ГэВ/фм — коэффициент натяжения струны, связывающей кварк и антикварк.

Таким образом, при больших T и R вильсоновская петля ведет себя следующим образом

$$W(R,T) \simeq \exp[-\sigma TR]. \tag{82}$$

Эта формула — знаменитый «закон площадей», определяющий конфайнмент в КХД.

Подчеркнем, что свойство конфайнмента присуще КХД при обычных температурах и плотностях ядерной материи. По-видимому, в столкновениях релятивистских тяжелых ионов можно создать такие условия, когда КХД-материя утратит свойство конфайнмента, кварки и глюоны станут способными распространяться на расстояния, большие 1 фм.

2.8.3. Нарушение киральной симметрии. Как известно, масса π-мезона гораздо меньше масс других адронов. Можно даже полагать, что масса π-мезона равна нулю, при этом свойства мира с безмассовым пионом весьма близки свойствам физического мира. Однако существование безмассовых частиц — проявление определенной симметрии теории. Безмассовые фотоны, например, являются следствием предположения локальной калибровочной инвариантности электродинамики. Но, в отличие от фотонов, пионы имеют спин, равный нулю, и они не могут быть калибровочными бозонами какой либо симметрии.

Другая возможность объяснения безмассовости π-мезона задается теоремой Голдстоуна. Согласно этой теореме, проявление безмассовых мод в спектре является следствием спонтанного нарушения симметрии, т. е. симметрия лагранжиана нарушена в основном состоянии теории.

Предположим, что в лагранжиане КХД массы кварков равны нулю. В этом пределе лагранжиан не содержит слагаемых, связывающих правые и левые компоненты кварковых полей:

$$\begin{aligned} q_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)q, \\ q_L &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)q. \end{aligned} \tag{83}$$

Лагранжиан КХД инвариантен при независимых преобразованиях правых и левых компонент полей («киральных вращений»). В пределе безмассовых кварков КХД обладает дополнительной симметрией $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ по отношению к независимым преобразованиям левых и правых кварковых полей:

$$\begin{aligned} q_L &\to V_L q_L; \\ q_R &\to V_R q_R. \end{aligned} \tag{84}$$

Очевидно, что в физическом мире симметрия между левыми и правыми состояниями отсутствует. Иначе, например, π-мезон имел бы партнера с противоположной четностью. Поэтому следует предположить, что $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ — симметрия

спонтанно нарушена в вакууме КХД. Сигналом спонтанного нарушения симметрии в вакууме КХД является отличный от нуля конденсат кварк-антикварковых пар $\langle q\overline{q}\rangle$.

Поскольку

$$\langle q\overline{q}\rangle = \langle q_L\overline{q}_R\rangle + \langle q_R\overline{q}_L\rangle, \tag{85}$$

то это соотношение означает, что левые и правые кварки и антикварки могут преобразовываться друг в друга. Кварковый конденсат можно использовать в качестве параметра порядка: в состоянии с нарушенной киральной симметрией $\langle q\overline{q}\rangle \neq 0$, если же киральная симметрия восстановлена, то $\langle q\overline{q}\rangle = 0$. Вычисления на пространственно-временной решетке показывают, что при фазовом переходе деконфайнмента кварк-антикварковый конденсат стремится к нулю, сигнализируя о восстановлении киральной симметрии.

2.9. Облака, струи и эксперимент

Свойство асимптотической свободы может быть использовано для упрощения вычислений многих физических процессов. Чтобы понять, почему это оказывается возможным, рассмотрим поведение кварка (или глюона) (рис. 7). Эффективный цветовой заряд кварка, определяющий его взаимодействия, оказывается распределенным в пространстве. Можно считать, что этот заряд связан с облаком индуцированных цветовых зарядов. Рассмотрим теперь, как это облако «видят» пробники с различными длинами волн. Если длина волны мала, эффективный цветовой заряд будет малым, поскольку только малая часть облака «задействована». Если же длина волны пробника большая, то и эффективный заряд будет большим.

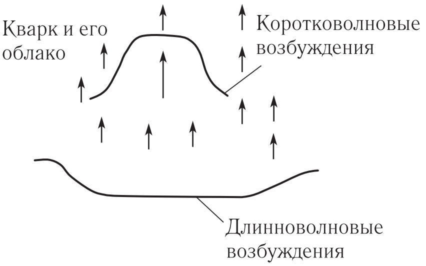


Рис. 7

При внезапной передаче большого импульса кварку (или глюону), приводящей к освобождению кварка (глюона) из облака, освобождающийся кварк (глюон) будет иметь малый эффективный цветовой заряд и будет распространяться практически свободно до тех пор, пока не возникнет новое облако. Конечно, электрический и слабый заряды кварка не зависят от цветовой поляризации облака. Эти заряды остаются сконцентрированными на кварке. Поэтому коротковолновые электромагнитные или слабые пробники «видят» точечноподобные кварки, чьи сильные (цветовые) взаимодействия вносят малые поправки к их распространению. Более точно, эти поправки изменяют энергию-импульс цветовых токов, которые сами по себе в таких процессах должны быть малыми.

Поэтому в физическом процессе с точечноподобными кварками, индуцированном электрослабыми токами, например, в e^+e^--аннигиляции при высоких энергиях, возникают струи адронов, причем ось струи совпадает с направлением движения первоначального кварка. При этом возможно испускание кварком жесткого глюона, но вероятность этого процесса мала и вычислима в теории возмущений. Эти жесткие глюоны, в свою очередь, могут излучать и т. д. Такое струйное поведение событий наблюдалось как в e^+e^--аннигиляции, так и в адронных взаимодействиях.

Как можно получить проверяемые предсказания КХД в области сильной связи? Для этого существуют так называемые непертурбативные методы, среди которых следует отметить моделирование на пространственно-временных решетках. Эта техника основана на «первых принципах», т. е. лагранжиане КХД, и дает определенные

предсказания для конфайнмента, фазовых переходов, связанных состояний, адронных матричных элементов и т. д. Основное ограничение для этого метода — ограниченные компьютерные возможности, но эти возможности непрерывно расширяются. Другой класс непертурбативных вычислений основан на методе эффективных лагранжианов. Этот метод зачастую обеспечивает более простое приближение по сравнению с полной теорией. Так, киральные лагранжианы, основанные на теоремах для «мягких пионов», оказываются адекватными при энергиях, ниже 1 ГэВ'а. Эффективные теории тяжелых кварков получаются при разложении амплитуд по обратным степеням массы тяжелого кварка и успешно применяются при изучении распадов b-, а в некоторых случаях, и c-кварков. Приближения правил сумм КХД позволили получить много интересных результатов в физике адронов.

Однако, по-прежнему, пертурбативный подход, основанный на свойстве асимптотической свободы КХД, остается основным расчетным инструментом КХД. Именно этому подходу ниже будет уделено основное внимание.

2.10. Жесткие процессы в КХД

2.10.1. Струи. Процесс формирования струй при высоких энергиях связан с конфайнментом. Начнем обсуждение струй с процессов e^+e^--аннигиляции: электрон и позитрон аннигилируют в фотон, распадающийся на кварк-антикварковую пару:

$$e^+ + e^- \to \gamma \to q + \overline{q}. \tag{86}$$

В системе центра масс кварк и антикварк имеют одинаковую энергию и противоположные трехмерные импульсы. Кварк и антикварк рождаются в одной точке и разлетаются со скоростью света. Когда они разлетаются на расстояния, сравнимые с радиусом конфайнмента

$$r_{\text{конф.}} \simeq 1\ \text{фм}, \tag{87}$$

дипольное цветовое поле кварковой пары сжимается в трубку (струну). При дальнейшем разлете токовая трубка увеличивается, и все большая доля кинетической энергии пары трансформируется в энергию поля. Когда энергия, содержащаяся в токовой трубке, превысит две массы легких кварков и антикварков:

$$E_{\text{трубка}} > 2m, \tag{88}$$

возникнет новая кварк-антикварковая пара, которая экранирует цветовой заряд первоначальной пары. Струна распадается на две струны, на концах которых находятся первоначальный кварк и вновь возникший кварк. Если относительный импульс кварк-антикварковой пары достаточно большой, струна вновь разрывается и т. д. Развивается партонный каскад: возникает все большее число кварков и глюонов с меньшей энергией.

При высоких энергиях ($E \gg M_p$, M_p — масса нуклона) токовая трубка имеет большой продольный импульс ($p_L \sim E$), но ограниченный поперечный импульс ($p_\perp \sim M_p$). Следовательно, партоны в каскаде имеют большие продольные импульсы, но ограниченные поперечные импульсы. Вслед за развитием партонного каскада начинается рекомбинация кварков и глюонов в синглетные по цвету состояния, т. е. формирование адронов. Этот переход не сопровождается большими передачами импульса между партонами (как говорят, является мягким процессом). Эту гипотезу иногда называют локальной партон-адронной дуальностью. Этот механизм, например, подавляет процесс объединения кварка с импульсом p', возникающего в одной струе, с кварком с импульсом p в другой струе ($pp' \gg \Lambda^2_{\text{КХД}}$).

Предполагается, что переход от партонной струи к адронной струе практически не изменяет распределений по продольному и поперечному импульсам. Конечные частицы — адроны — оказываются сколлимированными в малых угловых направлениях. Более того, угловое распределение струй относительно пучков e^+e^- совпадает с угловым распределением первоначальных кварка и антикварка. Очевидно, что энергичный кварк (антикварк) способен испустить глюон на большой угол. В этом случае возникает трехструйное событие.

2.10.2. Рождение адронов в e^+e^--аннигиляции. Рассмотрим сначала рождение фермион-антифермионных пар в e^+e^--аннигиляции. В низшем порядке электрон и позитрон аннигилируют в γ-квант или Z_0, которые распадаются на фермион-антифермионную пару ($f \neq e$):

$$e^+ + e^- \to \gamma^*, \quad Z_0 \to f + \overline{f}. \tag{89}$$

Дифференциальное сечение процесса

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2}\frac{1}{s}\Big[(1+\cos^2\theta)\big(e_f^2 - 2e_f v_e v_f \chi_1(s) + (a_e^2+v_e^2)(a_f^2+v_f^2)\chi_2(s)\big) + \\ +4\cos\theta\big(2a_e v_e a_f v_f \chi_2(s) - e_f a_e a_f \chi_1(s)\big)\Big], \tag{90}$$

где θ — угол между парой в начальном и конечном состоянии. Функции

$$\begin{aligned} \chi_1(s) &= k\frac{s(s-M_Z^2)}{(s-M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2}, \\ \chi_2(s) &= k^2\frac{s^2}{(s-M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2}, \\ k &= \frac{\sqrt{2}G_F M_Z^2}{4\pi\alpha} = 1{,}40, \end{aligned} \tag{91}$$

G_F — фермиевская константа, α — постоянная тонкой структуры, M_Z и Γ_Z — масса и ширина Z-бозона; v_f и a_f — векторная и аксиально-векторная константы связи Z-бозона с фермионами:

$$\begin{aligned} v_f &= I_{3f} - 2e_f\sin^2\theta_W, \\ a_f &= I_{3f}, \end{aligned} \tag{92}$$

θ_W — угол Вайнберга, I_3 — третья компонента слабого изоспина: $I_3 = 1/2$ для нейтрино и u-типа кварков ($e = 2/3$) и $I_3 = -1/2$ для заряженных лептонов и кварков d-типа ($e = -1/3$).

Функция $\chi_1(s)$ является результатом интерференции амплитуд с γ-квантом и Z_0, а $\chi_2(s)$ — квадрат амплитуды с участием Z-бозона.

При энергиях, гораздо меньших массы Z-бозона,

$$s \ll M_Z^2, \tag{93}$$

функции

$$\chi_1 \sim -k\frac{s}{M_Z^2} \ll 1, \quad \chi_2 \sim \chi_1^2 \ll 1. \tag{94}$$

Поэтому при малых энергиях можно пренебречь влиянием Z-бозона и его интерференцией с γ ($\chi_1 = \chi_2 = 0$) и получить сечение

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2}e_f^2\frac{1}{s}(1+\cos^2\theta). \tag{95}$$

Это угловое распределение находится в хорошем согласии с наблюдаемым двухструйным сечением и свидетельствует в пользу спина 1/2 кварков.

При энергиях же LEP и SLAC доминирует вклад Z-бозона. Полагая $e_f = 0$, $\chi_1 = 0$ и $\chi_2 = k^2(M_Z^2/\Gamma_Z^2)$, получаем для сечения

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2 k^2}{2\Gamma_Z^2}\left[(1+\cos^2\theta)(a_e^2+v_e^2)(a_f^2+v_f^2) + 8\cos\theta a_e v_e a_f v_f\right]. \tag{96}$$

В этом случае угловое распределение содержит дополнительный член с $\cos\theta$, возникающий за счет интерференции векторного и аксиального токов. Этот член индуцирует разницу в числе событий с испусканием вторичных частиц в «электронную» ($\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$) и «позитронную» полусферы ($\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$). Этот эффект называется асимметрией «вперед–назад» и связан с нарушением C/P-симметрии в слабых взаимодействиях.

2.10.3. Отношение $R = \sigma(e^+e^- \to \text{адроны})/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$. Если проинтегрировать (95) по полярному углу, получим полное сечение в КЭД:

$$\sigma = \frac{4}{3}\pi\alpha^2 e_f^2 \frac{1}{s}. \tag{97}$$

Определим отношение

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}. \tag{98}$$

Таким образом удается избавиться от несущественных факторов и выделить вклад сильных взаимодействий.

Предположим, что полное адронное сечение равно полному партонному сечению

$$\sigma(e^+e^- \to \text{адроны}) = \sigma(e^+e^- \to \text{партоны}) = \sigma(e^+e^- \to q\bar{q}) + \sigma(e^+e^- \to q\bar{q}g) + \ldots \tag{99}$$

Для такого предположения есть физические основания. Характерное время партонного процесса (распада виртуального фотона)

$$t_p \sim \frac{1}{E}, \tag{100}$$

где E — энергия в системе центра масс. Время же адронизации

$$t_h \sim \frac{1}{\Lambda_{\text{КХД}}}. \tag{101}$$

При высоких энергиях

$$E \gg \Lambda_{\text{КХД}}, \tag{102}$$

т. е. адронизация происходит гораздо позже партонных процессов

$$t_p \ll t_h. \tag{103}$$

Поэтому-то и возможно записать соотношение (99).

Тогда в низшем порядке

$$R = N_C \sum_f e_f^2, \tag{104}$$

где суммирование проводится по всем кинематически допустимым кварковым ароматам. Отношение R принимает значение

$$R = N_C\left(e_u^2 + e_d^2 + e_s^2\right) = 3\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2 \tag{105}$$

ниже порога рождения чарма.

Значение

$$R = N_C\left(e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 + e_c^2\right) = 3\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) \simeq 3{,}33 \tag{106}$$

между порогами рождения c- и b-кварков. Выше порога рождения b-кварка

$$R \simeq 3{,}67. \tag{107}$$

Вышеприведенные оценки величины R основаны на учете имеющихся степеней свободы и зависят только от электрических зарядов и числа цветов кварков.

При $E = 34$ ГэВ экспериментальное значение $R_{\text{эксп.}} = 3{,}9$, что следует сравнить с (107). Расхождение связано с недоучетом вклада Z-бозона, а также с пренебрежением вклада высших порядков. Рассмотрим более подробно вклад радиационных поправок.

2.10.4. Радиационные поправки. Как мы видели выше, экспериментальная точность измерения величины R такова, что необходимо учитывать поправки высших порядков теории возмущений. В пренебрежении массами кварков, величина R зависит лишь от $\sqrt{s}$. Поправки в порядке α_S в ультрафиолетовом пределе являются конечными, поскольку электромагнитный ток, создающий $q\overline{q}$-пару в КХД, сохраняется. Другими словами, ультрафиолетовая сингулярность поправки к вершине сокращается ультрафиолетовой сингулярностью внешней кварковой линии. На промежуточных этапах вычислений возникают инфракрасные расходимости, которые сокращаются за счет диаграмм с реальными и виртуальными обменами в инклюзивном процессе. В этом случае они создают лишь технические проблемы. Поясним это утверждение, пользуясь схемой размерной регуляризации. Инфракрасные и коллинеарные сингулярности регуляризуются в пространстве с числом измерений $n > 4$.

Поправки к сечению e^+e^--аннигиляции с рождением глюона в конечном состоянии имеют вид

$$\sigma(e^+e^- \to q\overline{q}g) = \sigma_0 \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\varepsilon) \int dx_1\, dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2 - \varepsilon(2 - x_1 - x_2)}{(1 - x_1)^{1+\varepsilon}(1 - x_2)^{1+\varepsilon}} =$$
$$= \sigma_0 \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\varepsilon)\left[\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + \frac{19}{2} + O(\varepsilon)\right], \tag{108}$$

где $C_F = \sum t_a t_a = (N^2 - 1)/(2N)$ для $SU(N)$ калибровочной теории ($C_F = 4/3$ в КХД) — оператор Казимира в фундаментальном представлении, $n = 4 - 2\varepsilon$ и функция

$$H(\varepsilon) = \frac{3(1 - \varepsilon)^2}{(3 - 2\varepsilon)\Gamma(2 - 2\varepsilon)} = 1 + O(\varepsilon). \tag{109}$$

Виртуальные поправки, связанные с испусканием и последующим поглощением глюона, дают

$$\sigma(e^+e^- \to q\overline{q}) = \sigma_0 \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\varepsilon)\left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + O(\varepsilon)\right]. \tag{110}$$

Мягкие сингулярности возникают как полюса в разложении по ε. Двойной полюс $1/\varepsilon^2$ возникает при наложении коллинеарной и инфракрасной сингулярности. Простой же полюс $1/\varepsilon$ имеет своим источником либо коллинеарную, либо инфракрасную сингулярности. Как двойной, так и простой полюса, в сумме сокращаются и дают конечную $O(\alpha_S)$ поправку к «древесному» значению величины:

$$R = R_{\text{древ.}}\left(1 + \frac{\alpha_S}{\pi}\right). \tag{111}$$

При вычислении поправок порядка α_S^2 возникают ультрафиолетовые расходимости типа

$$\alpha_S^2 \log\frac{\Lambda_0^2}{s}, \tag{112}$$

где Λ_0^2 — ультрафиолетовое обрезание и $\alpha_S = \alpha_S^{(0)}$ — голая константа КХД. Более точно, поправочный фактор k к величине R в порядке α_S^2 имеет вид:

$$k = 1 + C\alpha_S - C\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_S^2\log\frac{\Lambda_0^2}{s} + C'\alpha_S^2 + \ldots = 1 + C\alpha_S\left(1 - \frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_S\log\frac{\Lambda_0^2}{s}\right) + C'\alpha_S^2, \tag{113}$$

где $C = 1/\pi$.

Сравним этот результат с выражением (55), в котором мы можем положить $\mu^2 = \Lambda_0^2$ и интерпретировать $\alpha_S(\Lambda_0^2)$ как голую константу связи (при $Q^2 = s$):

$$\alpha_S(s) = \frac{\alpha_S(\Lambda_0^2)}{1 + \beta_0/(4\pi)\alpha_S(\Lambda_0^2)\log(\Lambda_0^2/s)} = \alpha_S\left(1 - \frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_S\log\frac{\Lambda_0^2}{s} + \left(\frac{\beta_0}{4\pi}\right)^2\alpha_S^2\log^2\frac{\Lambda_0^2}{s} + \ldots\right). \tag{114}$$

Тогда в порядке α_S^2 можно записать:

$$k = 1 + C\alpha_S(s) + C'\alpha_S^2(s) + \ldots \tag{115}$$

Отсюда видно, что логарифмический член в k есть просто перенормировка голой константы связи. Нефакторизованное сечение (113) и факторизованное (115) совпадают в порядке α_S^2.

Как видно, факторизация физически обоснована, но не единственна. Величину k можно представить и в виде:

$$k = 1 + C\alpha_S - C\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_S^2\log\frac{\Lambda_0^2}{s/4} + \left[C' + C\frac{\beta_0}{4\pi}\log 4\right]\alpha_S^2 + \ldots, \tag{116}$$

или в факторизованной форме

$$k = 1 + C\alpha_S\left(\frac{s}{4}\right) + \left[C' + C\frac{\beta_0}{4\pi}\log 4\right]\alpha_S^2\left(\frac{s}{4}\right) + \ldots \tag{117}$$

Бегущая константа в этих формулах определена на другом масштабе ($s/4$ вместо s), следовательно, в порядке α_S^2 возникает компенсирующий член. Таким образом, в теории возмущений нет однозначного способа фиксирования энергетического масштаба бегущей константы α_S. В принципе, можно ввести произвольный масштаб и учесть компенсирующий фактор. Однако было бы неразумным выбрать масштаб, скажем, $10^{-4}s$: это приведет к появлению большого логарифмического члена $4\log 10 \simeq 10$, нарушающего сходимость разложения. Две факторизованные формулы (117) и (115)

формально совпадают в порядке α_S^2, но дают несколько отличающиеся численные значения. Они отличаются способом учета поправок высших порядков, и их отличие связано с различной трактовкой константы связи α_S и величины k. Бегущая константа (114) учитывает члены в любом порядке по α_S. Групповая структура масштабных преобразований реном-группы допускает такой учет. Однако неизвестно, как провести подобное ресуммирование для величины k во всех порядках по α_S: k разлагается до фиксированного порядка по α_S, т. е. разложение заведомо является обрезанным. Когда мы изменяем энергетический масштаб константы связи во всех порядках, в величине k за счет «хвостов» разложений компенсации не происходит.

Таким образом, независимость физических величин от выбора масштаба — утверждение в теории возмущений нестрогое: оно нарушается в высших порядках. Эта неоднозначность неизбежна: она может только переместиться в большие порядки, если учитывается все больше членов в разложении величины k. Формально независимость от выбора энергетического масштаба возникает только для бесконечного разложения.

Сформулируем эти утверждения несколько иначе. Ультрафиолетовая расходимость (112) в схеме традиционной ренормировки превращается в сингулярный логарифмический член

$$\alpha_S^2 \log \frac{s}{\mu^2}, \tag{118}$$

где μ — точка ренормировки.

В схеме размерной регуляризации (это практически единственная схема, используемая для вычисления высших порядков) после вычитания $1/q$ полюсов остаются логарифмы типа (118), причем μ — масса, введенная для обезразмеривания константы связи в пространстве с $n \neq 4$.

Поэтому величина R может быть записана как функция $\alpha_S(\mu^2)$ ренормированной константы связи на фиксированном масштабе μ^2 и логарифмических членов (118):

$$R = R\left(\alpha_S(\mu^2), \log \frac{s}{\mu^2}\right). \tag{119}$$

Поскольку R — физическая величина, она не может зависеть от выбора масштаба ренормировки μ^2:

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} R = 0. \tag{120}$$

Из (119) следует, что

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(\alpha_S) \frac{\partial}{\partial \alpha_S}\right] R\left(\alpha_S, \log \frac{s}{\mu^2}\right) = 0. \tag{121}$$

Далее нужно проявить некоторую физическую интуицию и выбрать величину μ^2 так, чтобы минимизировать (неизвестный) вклад высших порядков. Естественным представляется выбор $\mu^2 = s$.

Тогда

$$R = R(\alpha(s)), \tag{122}$$

поэтому

$$R = kR_{\text{древ.}}, \tag{123}$$

где поправочный фактор (так называемый k-фактор) имеет следующее разложение:

$$k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\alpha_S(s)}{\pi}\right)^n. \tag{124}$$

В $\overline{MS}$-схеме регуляризации три первых коэффициента разложения (124):

$$\begin{gathered} C_1 = 1, \\ C_2 = \frac{365}{24} - 11\zeta(3) + \left(\frac{2}{3}\zeta(3) - \frac{11}{12}\right)n_f = 1{,}986 - 0{,}115 n_f = 1{,}411, \\ C_3 = \frac{87029}{288} - \frac{1105}{4}\zeta(3) + \frac{275}{6}\zeta(5) - \frac{\pi^2}{48}\beta_0^2 + \left(\frac{55}{72} - \frac{5}{3}\zeta(3)\right)\eta - \\ - \left(\frac{7847}{216} - \frac{262}{9}\zeta(3) + \frac{25}{9}\zeta(5)\right)n_f + \left(\frac{151}{162} - \frac{19}{27}\zeta(3)\right)n_f^2 = -12{,}80, \end{gathered} \tag{125}$$

для $n_f = 5$.

В выражениях (125) $\zeta(u)$ — ζ-функция Римана:

$$\zeta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u}, \tag{126}$$

а величина

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{\left(\sum_f e_f\right)^2}{\sum_f e_f^2} = \frac{1}{33} \tag{127}$$

для электромагнитной диаграммы.

Для электрослабой диаграммы

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{\left(\sum_f v_f\right)^2}{\sum_f (v_f^2 + a_f^2)} = 0{,}0302. \tag{128}$$

При $\sqrt{s} = 34$ ГэВ $\alpha_S(34\ \text{ГэВ}) = 0{,}146 \pm 0{,}030$, $k \simeq 1{,}05$, т. е. поправки составляют $\sim 5\%$ от древесного значения. При энергиях LEP $\alpha_S(M_Z) \simeq 0{,}12$ и $k \simeq 1{,}039$.

Таким образом, экспериментальное измерение R является проверкой КХД.

2.10.5. Струи в e^+e^--аннигиляции. Теория возмущений дает возможность исследования структуры конечных состояний в e^+e^--аннигиляции. Конечно, сечение в эксклюзивном канале, например, $e^+e^- \to p\overline{p}$ включает детальную информацию о процессах адронизации, т. е. находится вне «компетенции» теории возмущений КХД.

Рассмотрим более детально процесс с испусканием глюона

$$e^+ + e^- \to q + \overline{q} + g. \tag{129}$$

В порядке α_S имеется две амплитуды, соответствующие испусканию глюона кварком и антикварком. Эти амплитуды включают вершину КЭД:

$$V_{q\overline{q}g} = ig\gamma_\mu t_a, \tag{130}$$

т. е. неабелева природа КХД в этом процессе не проявляется в полной мере. Влияние цвета сводится к возникновению фактора C_F, на который домножается α_S. Это

означает, что сечение КХД в пределе

$$C_F \alpha_S \to \alpha \tag{131}$$

сводится к сечению в КЭД.

В полной мере неабелева структура КХД проявляется в процессе

$$e^+e^- \to q\overline{q}gg, \tag{132}$$

который имеет порядок α_S^2 и дает основной вклад в сечение 4-струйных событий. Вернемся, однако, к 3-струйным событиям. Обозначим через x_i долю энергии пучка E_b ($\sqrt{s} = 2E_b$), переносимую кварком, антикварком и глюоном:

$$x_1 = \frac{E_q}{E_b}, \quad x_2 = \frac{E_{\overline{q}}}{E_b}, \quad x_3 = \frac{E_g}{E_b}. \tag{133}$$

Сохранение энергии и импульса подразумевает:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 1 - x_i = \frac{1}{2} x_j x_k (1 - \cos\theta_{jk}), \\ i \neq j \neq k, i \neq k. \end{gathered} \tag{134}$$

Поэтому кинематические границы

$$\begin{gathered} 0 \leq x_i \leq 1, \\ x_i + x_j \geq 1, \quad i \neq j. \end{gathered} \tag{135}$$

Поскольку импульсы конечного состояния лежат в одной плоскости, то

$$\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{13} = 2\pi. \tag{136}$$

Дифференциальное сечение рождения кварка с долей импульса x_1 и антикварка с долей импульса x_2 в e^+e^--аннигиляции (см. приложение 1):

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma_{q\overline{q}g}}{dx_1 dx_2} = C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}. \tag{137}$$

Это сечение симметрично относительно замены $x_1 \leftrightarrow x_2$, как это и должно быть в силу $C(P)$-симметрии КХД. Если эксперимент не способен разделить струи, образованные кварком, антикварком и глюоном, то естественно симметризовать сечение (137): мы просто интересуемся сечением рождения одной струи, несущей долю импульса x_1, второй — x_2 и третьей — x_3.

Поэтому симметризованное сечение

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma_{3\text{jet}}}{dx_1 dx_2} = C_F \frac{\alpha_S}{6\pi} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} + \frac{x_1^2 + x_3^2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{(1 - x_2)(1 - x_3)} \right). \tag{138}$$

Так как струи неразличимы (кварковые или глюонные), можно считать

$$x_1 < x_2 < x_3. \tag{139}$$

В формуле (137) область интегрирования для нахождения полного сечения

$$\begin{gathered} 0 \leq x_1, \quad x_2 < 1, \\ 1 \leq x_1 + x_2. \end{gathered} \tag{140}$$

Когда доли энергии кварка (антикварка) достигают своих предельных значений, возникают сингулярности:

$$x_i \to 1, \quad i = 1, 2. \tag{141}$$

Наиболее серьезная сингулярность — двойной полюс, возникающий, когда одновременно

$$x_1 \to 1 \quad \text{и} \quad x_2 \to 1. \tag{142}$$

Это случается тогда, когда трехчастичная кинематика «напоминает» двухчастичную.

Как уже обсуждалось выше, двойной полюс (142) при интегрировании в схеме размерной регуляризации превращается в $1/\varepsilon^2$ (108). Ниже мы увидим, что конфигурация (142) генерирует дважды логарифмические поправки типа $\alpha_S \log^2 y$. Простая полюсная сингулярность возникает при достижении предельного значения только одной доли энергии:

$$x_i \to 1, \quad x_j < 1, \quad j \neq i. \tag{143}$$

Действительно, если разложить первое слагаемое правой части (138)

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{2}{(1-x_1)(1-x_2)} - \frac{1+x_1}{1-x_2} - \frac{1+x_2}{1-x_1}, \tag{144}$$

то можно заметить, что конфигурация (142) связана в схеме размерной регуляризации с $1/\varepsilon$-полюсами и дает логарифмический вклад $\alpha_S \log y$ в 3-струйное сечение.

Очевидно, что как лидирующие, так и нелидирующие сингулярности дают расходящиеся вклады в полное сечение, т. е. сечение оказывается нефизическим:

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \to q\overline{q}g) = \infty. \tag{145}$$

Обсудим более подробно природу сингулярностей. Они возникают в кварковых и антикварковых пропагаторах, входящих в фейнмановские амплитуды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+k)^2} &= \frac{1}{2E_q E_g(1-\cos\theta_{qg})} = \frac{1}{s(1-x_2)}, \\ \frac{1}{(p'+k)^2} &= \frac{1}{2E_{\overline{q}} E_g(1-\cos\theta_{\overline{q}g})} = \frac{1}{s(1-x_1)}. \end{aligned} \tag{146}$$

Эти пропагаторы расходятся для двух различных конфигураций:

1) коллинеарная сингулярность $\theta \to 0$, т. е. когда глюон испускается под очень малым углом к направлению кварка (антикварка);

2) инфракрасная сингулярность $E_g \to 0$, т. е. когда испускается глюон с очень малой энергией.

Очевидно, что полюсная сингулярность

$$x_i \to 1, \quad x_j < 1 \tag{147}$$

подразумевает

$$E_g > 0, \quad \theta_{j3} \to 0, \tag{148}$$

т. е. коллинеарное испускание глюона конечной энергии с кварковой (антикварковой) линии. Таким образом, простая полюсная сингулярность (143) вызвана коллинеарными, но не мягкими глюонами.

Рассмотрим теперь инфракрасный предел

$$E_g \to 0, \quad \theta_{qg} \neq 0, \quad \theta_{\overline{q}q} \neq 0, \tag{149}$$

т. е. испускается глюон с малой энергией, но не коллинеарно по отношению к направлению кварка или антикварка.

В кинематике с

$$x_3 \ll 1 \tag{150}$$

величины

$$\begin{gathered} x_1 \simeq 1 - x_3 \frac{1-\cos\theta_{\overline{q}g}}{2}, \\ x_2 \simeq 1 - x_3 \frac{1-\cos\theta_{qg}}{2}, \\ \theta_{qg} + \theta_{\overline{q}g} \simeq \pi. \end{gathered} \tag{151}$$

Причем

$$\cos\theta_{\overline{q}g} \simeq -\cos\theta_{qg}. \tag{152}$$

Тогда инфракрасный вклад в полное сечение

$$d\sigma \sim \alpha_S \int \frac{dx_1\,dx_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \simeq \alpha_S \int \frac{dx_1\,dx_2}{x_3^2(1-\cos\theta_{qg})(1-\cos\theta_{\overline{q}g})}. \tag{153}$$

Введем новые переменные

$$\varepsilon = x_3, \quad u = \cos\theta_{qg}. \tag{154}$$

При этом $x_1 \simeq 1 - \varepsilon(1+u)/2$, $x_2 \simeq 1 - \varepsilon(1-u)/2$.

В новых переменных выражение (153)

$$d\sigma \sim \alpha_S \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \frac{du}{1-u^2}. \tag{155}$$

Заметим, что при изменении переменных иллюзорный двойной полюс по x_3 трансформируется в простой полюс. Поскольку $u \neq 1$, при $\varepsilon \to 0$ имеется лишь простая сингулярность. Таким образом, инфракрасные сингулярности связаны с простыми полюсами.

Наконец, рассмотрим случай (142), когда обе доли x_i независимо стремятся к концевым точкам. Тогда

$$E_g \to 0 \quad \text{и} \quad \theta_{qg} \to 0 \quad \text{или} \quad \theta_{\overline{q}g} \to 0. \tag{156}$$

В этом пределе соотношение (155) справедливо, но

$$\varepsilon \to 0 \quad \text{и} \quad u \to \pm 1, \tag{157}$$

что приводит к двойному полюсу.

Лидирующая сингулярность возникает за счет испускания мягкого глюона, коллинеарного источнику испускания (кварку или антикварку):

$$d\sigma \sim \alpha_S \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \int \frac{d\theta}{\theta}, \tag{158}$$

причем в выражении (155) $u \simeq 1 - \theta^2/2$.

Если исключить концевые точки, то дифференциальное сечение (137) можно проинтегрировать. Полученное сечение будет конечным, но сильно зависящим от кинематических ограничений. Следует отметить, что в эксперименте эти ограничения возникают весьма естественно, за счет введения экспериментальных разрешений. Поскольку детекторы имеют конечное угловое разрешение $\delta > 0$, нельзя отличить изолированный кварк от кварка, сопровождающегося глюоном, испущенным под

углом $\theta < \delta$. Аналогично, конечное энергетическое разрешение $\eta > 0$ делает невозможным разделение кварка и кварка, сопровождающегося глюоном с энергией $\varepsilon < \eta$. Другими словами, если глюон — «слишком» коллинеарный и/или мягкий, то конечное $q\overline{q}g$-состояние детектируется как $q\overline{q}$-состояние:

$$|q\overline{q}g; \varepsilon < \eta,\ \theta < \delta\rangle \to |q\overline{q}\rangle_{\text{физич.}} \tag{159}$$

Расходящееся же полное сечение (145) неизмеримо. Конечное энергетическое разрешение детекторов ограничивает область интегрирования (135) так, что сингулярные области исключаются. Наблюдаемое сечение оказывается конечным, но зависящим от параметров δ и η.

Итак, расходимости КХД связаны с рождением глюонов с малыми энергиями и под малыми углами по отношению к безмассовому источнику (кварку или антикварку). Коллинеарные сингулярности (но не инфракрасные) можно исключить путем добавления малой кварковой массы в пропагаторы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} &= \frac{1}{2E_q E_g (1 - \beta_q \cos\theta_{qg})}, \\ \frac{1}{(p'+k)^2 - m^2} &= \frac{1}{2E_{\overline{q}} E_g (1 - \beta_{\overline{q}} \cos\theta_{\overline{q}g})}, \end{aligned} \tag{160}$$

где $\beta = p/E < 1$ — скорость.

Поэтому глюоны, испущенные при рождении b-кварков в процессе

$$e^+ + e^- \to b + \overline{b} \tag{161}$$

не имеют коллинеарной сингулярности. Угловое распределение при малых углах испускания глюонов задается функцией

$$\frac{dN}{d\cos\theta} \sim \frac{1}{1 - \beta\cos\theta} \sim \frac{2\gamma^2}{1 + (\gamma\theta)^2}, \tag{162}$$

где $\gamma = E/m = 1\big/\sqrt{1-\beta^2} \gg 1$ — Лоренц-фактор.

Угловое распределение быстро растет:

$$\frac{dN}{d\theta} \sim \theta \frac{dN}{d\cos\theta} \sim \frac{1}{\theta}, \tag{163}$$

если мы уменьшаем угол испускания от $\theta \sim 1$ до

$$\theta_{\text{min}} \sim \frac{1}{\gamma}. \tag{164}$$

Поведение (163) такое же, как и для безмассовых кварков. При меньших углах

$$\theta < \theta_{\text{min}} \tag{165}$$

угловое распределение постоянно. Вот почему масса кварка m служит коллинеарным регулятором: она обрезает рост углового распределения. Поэтому после интегрирования по углу следует ожидать появление логарифмического члена:

$$\int\limits_{1/\gamma} \frac{d\theta}{\theta} \sim \log\frac{E}{m}. \tag{166}$$

Заметим, что угловое распределение (162) аналогично угловому распределению классического электромагнитного излучения релятивистской заряженной частицы.

Описанную выше дискуссию относительно физических состояний и наблюдаемых сечений можно переформулировать следующим образом. Мы заменяем одночастичные состояния «истинными» «in» и «out» состояниями, которые создаются ускорителем и наблюдаются в детекторах:

$$|q\rangle_{\text{физич.}} = a|q\rangle + b|qg\rangle + c|qgg\rangle + d|qq\bar{q}\rangle + \ldots \tag{167}$$

Кварковое состояние включает облако коллинеарных и/или мягких глюонов и безмассовых $q\bar{q}$-пар.

До сих пор рассматривались чисто пертурбативные процессы испускания глюона. Поэтому приемлем любой параметр обрезания по углу и энергии. Единственное ограничение связано с полюсом Ландау: переходя в мягкую область с уменьшением переданного импульса, получаем быстро растущую константу связи. Есть, однако, ограничение применимости теории возмущений КХД, связанное с конфайнментом. Глюон с энергией порядка адронного масштаба

$$\varepsilon \sim \Lambda_{\text{КХД}} \tag{168}$$

и/или с поперечным импульсом $k_\perp$ по отношению к источнику

$$k_\perp \sim \Lambda_{\text{КХД}} \tag{169}$$

не может ни создать струю (недостаточно энергии), ни вылететь как асимптотическое состояние (из-за конфайнмента). Этот глюон оказывается запертым цветовыми взаимодействиями. Пертурбативное поведение такого глюона (почти свободное) полностью отлично от «реального» поведения. Чтобы разрешить эту конфликтную ситуацию между пертурбативной и непертурбативной динамикой, следует выбрать энергетические и угловые обрезания, гораздо большие адронного масштаба:

$$\varepsilon \gg \Lambda_{\text{КХД}}, \quad k_\perp \gg \Lambda_{\text{КХД}}. \tag{170}$$

2.10.6. *N*-струйные события. Обратимся теперь к обсуждению N-струйных событий в e^+e^--аннигиляции.

Выберем 4-импульсы частиц p_i и вычислим все инвариантные массы:

$$M_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2, \quad i \neq j. \tag{171}$$

Если наименьшая инвариантная масса (скажем, частиц i и j) меньше заданного порога

$$M_{ij}^2 < y \cdot s, \tag{172}$$

то частицы i и j объединим вместе в «новую» частицу (псевдочастицу) с импульсом $p_{ij} = p_i + p_j$. Величина $y \ll 1$ — константа, определяющая струю. Ее во избежание эффектов адронизации следует выбрать так, чтобы $y \cdot s \gg \Lambda^2_{\text{КХД}}$. Если же

$$M_{ij}^2 \geq y \cdot s, \tag{173}$$

то частицы i и j не объединяются.

Далее эту процедуру следует повторить, трактуя псевдочастицы как частицы. На каждом шаге две частицы объединяются в псевдочастицу, и так происходит до тех пор, пока все пары не станут обладать инвариантными массами выше порога. Конечные частицы идентифицируются как струи, а число частиц соответствует множественности струй.

Экспериментаторы определяют струи путем измерения импульсов адронов в конечном состоянии, а теоретики считают струи, порожденные партонами. Если качественные идеи о конфайнменте и адронизации, обсуждавшиеся выше, правильные, т. е. возможность проверки пертурбативной КХД путем сравнения долей адронных и партонных струй. В случае $q\overline{q}g$ конечного состояния, 3-струйное событие — это такое событие, в котором все три инвариантных массы превышают порог:

$$\begin{aligned} (p+k)^2 &\geq y\cdot s, \\ (p'+k)^2 &\geq y\cdot s, \\ (p+p')^2 &\geq y\cdot s. \end{aligned} \tag{174}$$

Эти условия можно переписать в переменных x_i и y:

$$x_i \leq 1-y. \tag{175}$$

Поэтому

$$x_i + x_j \geq 1+y, \quad i\neq j. \tag{176}$$

Отсюда следует, что граничные области интегрирования (потенциально опасные) исключаются.

Определим доли 2- и 3-струйных событий f_i:

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{\sigma_{2\text{струи}}}{\sigma_{\text{tot}}}, \\ f_3 &= \frac{\sigma_{3\text{струи}}}{\sigma_{\text{tot}}}, \end{aligned} \tag{177}$$

где $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{2\text{струи}} + \sigma_{3\text{струи}} = \sigma_0(1+\alpha_S/\pi)$ — полное сечение в порядке α_S.

Очевидно, что

$$f_2 + f_3 = 1. \tag{178}$$

Для величины f_3 имеем

$$f_3 = \int d\sigma_{q\overline{q}g} = C_F\frac{\alpha_S}{\pi}\int\limits_{2y}^{1-y}\frac{dx_1}{1-x_1}\int\limits_{1+y-x_1}^{1-y}\frac{dx_2(x_1^2+x_2^2)}{1-x_2} = C_F\frac{\alpha_S}{\pi}\left(4\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{1-y}\right)+\right.$$
$$\left. + (3-6y)\log\left(\frac{y}{1-2y}\right) + 2\log^2\left(\frac{y}{1-y}\right) - 6y - \frac{9}{2}y^2 - \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{2}\right), \tag{179}$$

где $\mathrm{Li}_2(z)$ — дилогарифмическая функция, определяемая интегральным представлением:

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int\limits_0^z du\frac{\log u}{1-u}. \tag{180}$$

Очевидно, что выражение (179) не содержит инфракрасных сингулярностей, т. е. f_3 — инфракрасно стабильная величина.

2.10.7. Судаковские форм-факторы. Предположим, что эксперимент имеет хорошее разрешение при измерении инвариантных масс, т. е. мы можем измерить очень малые инвариантные массы. Следовательно, оказывается возможным измерение доли 2-струйных событий $f_2 = 1 - f_3$ вплоть до очень малых значений y,

$$y \ll 1. \tag{181}$$

Это условие сильно ограничивает фазовое пространство конечных партонов/адронов: конечное состояние содержит две очень «тонкие» струи, переносящие практически всю энергию события. Пренебрегая малыми по y слагаемыми в (179), находим в α_S порядке величину

$$f_2(y) = 1 - C_F \frac{\alpha_S}{2\pi}\left(2\log^2 y + 3\log y - \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{2} + O(y)\right). \tag{182}$$

Эта формула содержит три типа слагаемых: квадрат логарифма, возникающий из-за произведения коллинеарных и инфракрасных сингулярностей, логарифмический член — за счет суммы инфракрасной и коллинеарной сингулярностей и конечного члена.

Символически

$$f_2^{(1)} \sim \alpha_S \log^2 y + \alpha_S \log y + \alpha_S. \tag{183}$$

Обрезание по y, как обсуждалось выше, регуляризует оба типа сингулярностей. Если использовать различные регуляризаторы для коллинеарной и инфракрасной сингулярностей (например, энергетическое и угловое обрезание), то для f_2 можно записать выражение:

$$f_2^{(1)} \sim \alpha_S Ll + \alpha_S L + \alpha_S l + \alpha_S, \tag{184}$$

где L — коллинеарный логарифм (содержащий угловое обрезание), l — инфракрасный логарифм (содержащий энергетическое разрешение). $O(\alpha_S^2)$-поправки к величине f_2 имеют вид

$$f_2^{(2)} \sim \left(\frac{\alpha_S}{2\pi}\right)^2 \left(C_F^2 Z_C(y) + C_F N Z_N(y) + T_R Z_T(y)\right), \tag{185}$$

где

$$\begin{aligned}
Z_C(y) &= 2\log^4 y + 6\log^3 y + \left(\frac{13}{2} - \zeta(2)\right)\log^2 y + \\
&\qquad + \left(\frac{9}{4} - 3\zeta(2) - 12\zeta(3)\right)\log y + \frac{1}{8} - \frac{51}{4}\zeta(2) + 11\zeta(3) + 4\zeta(4), \\
Z_N(y) &= \frac{11}{3}\log^3 y + \left(2\zeta(2) - \frac{169}{36}\right)\log^2 y + \\
&\qquad + \left(6\zeta(3) - \frac{57}{4}\right)\log y + \frac{31}{9} + \frac{32}{3}\zeta(2) - 13\zeta(3) + \frac{45}{4}\zeta(4), \\
Z_T(y) &= -\frac{4}{3}\log^3 y + \frac{11}{9}\log^2 y + 5\log y + \frac{19}{9} - \frac{38}{9}\zeta(2).
\end{aligned} \tag{186}$$

$O(\alpha_S^2)$ — поправки к величине f_2 содержат члены вплоть до четвертой степени логарифма. В общем, поправка порядка α_S^n содержит члены с логарифмами вплоть до $\log^{2n} y$.

Таким образом, величина

$$f_2^{(n)} = \alpha_S^n \sum_{k=0}^{2n} c_k^{(n)} \log^k y = c_{2n}^{(n)} \alpha_S^n \log^{2n} y + c_{2n-1}^{(n)} \alpha_S^n \log^{2n-1} y + \ldots \tag{187}$$

Пертурбативное разложение $f_2(y)$ содержит не просто степени α_S на соответствующем энергетическом масштабе (как при вычислении R), но и степени логарифмов. Это значит, что существуют логарифмы, которые не «поглощаются» перенормировкой

константы связи, как это происходит при вычислении величины R. Рассмотрим более внимательно физические различия между наблюдаемыми f_2 и R. Величина R — инклюзивная, определяемая единственным масштабным фактором — энергией в системе центра масс $\sqrt{s}$. Поэтому в теории могут возникнуть лишь логарифмы вида

$$\log \frac{\Lambda_0^2}{s}, \tag{188}$$

где Λ_0 — ультрафиолетовое обрезание, которое «поглощается» при перенормировке лагранжиана, поскольку теория перенормируемая. Доля же 2-струйных событий f_2 — величина полуинклюзивная, в ее определение входит другой масштаб $y \cdot s$. В результате в теории возникают логарифмы типа

$$\log \frac{s}{y \cdot s} = \log \frac{1}{y}. \tag{189}$$

Эти логарифмы не сокращаются, как это происходит в величине R. Логарифмы (189) не имеют ультрафиолетовой причины, и они не «поглощаются» при переопределении констант связи.

При $y \ll 1$ эти логарифмы становятся настолько большими

$$\log \frac{1}{y} \gg 1, \tag{190}$$

что

$$\alpha_S \log^2 y \sim 1 \tag{191}$$

даже для

$$\alpha_S \ll 1. \tag{192}$$

Таким образом, сходимость разложения по степеням α_S может нарушаться большими логарифмическими коэффициентами. Разрешение этой проблемы видится в отказе от рассмотрения какого-либо фиксированного порядка теории возмущений в пользу разложения по степеням сингулярности слагаемых в пределе

$$\log \frac{1}{y} \to \infty. \tag{193}$$

Наиболее сингулярные члены, соответствующие низшему порядку в новом асимптотическом разложении, имеют вид

$$\alpha_S^n \log^{2n} y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots \tag{194}$$

Нелидирующие члены вида

$$\alpha_S^n \log^{2n-1} y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots \tag{195}$$

имеют порядок $1/\log y \ll 1$ и меньше лидирующих слагаемых.

Другие нелидирующие члены

$$\alpha_S^n \log^{2n-2} y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots \tag{196}$$

также имеют $1/\log y$ порядок малости по сравнению с (195) и т. д.

Если рассматриваются только лидирующие члены, то это приближение называют дважды логарифмическим (DLA).

Рассмотрим, как два разложения связаны между собой. Путем перестановок величину f_2 можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_2 = 1 + a_0\alpha x^2 + a_1\alpha x + a_2\alpha + b_0\alpha^2 x^4 + b_1\alpha^2 x^3 + b_2\alpha^2 x^2 + b_3\alpha^2 x + b_4\alpha^2 + \ldots = \\ = (1 + a_0\alpha x^2 + b_0\alpha^2 x^4 + \ldots) + (a_1\alpha x + b_1\alpha^2 x^3 + \ldots) + \\ + (a_2\alpha + b_2\alpha^2 x^2 + \ldots) + (b_3\alpha^2 x + \ldots) + \ldots, \end{aligned} \tag{197}$$

где $x = \log y$, а более удобное обозначение коэффициентов было использовано с целью исключения индекса у α_S.

Поскольку коэффициенты лидирующих членов (194) известны в любом порядке, путем факторизации лидирующих серий можно расширить применимость подхода (197) в области малых y. В α_S-порядке получим

$$\begin{aligned} f_2 = \big(1 + a_0\alpha x^2 + b_0\alpha^2 x^4 + \ldots\big)\big(1 + a_1\alpha x + a_2\alpha + (b_1 - a_0 a_1)\alpha^2 x^3 + \\ + (b_2 - a_0 a_2)\alpha^2 x^2 + b_3\alpha^2 x + b_4\alpha^2 + \ldots\big). \end{aligned} \tag{198}$$

Мы факторизовали лидирующие члены, при этом отличие от нефакторизованного выражения порядка $O(\alpha^3)$. В первой скобке (198) мы можем добавить все члены высших порядков лидирующих серий, т. е. просуммировать целые лидирующие серии, не изменяя при этом второй скобки (198):

$$\begin{aligned} f_2 = (1 + a_0\alpha x^2 + b_0\alpha^2 x^4 + c_0\alpha^3 x^6 + \ldots + f_0\alpha^n x^{2n} + \ldots) \times \\ \times \big(1 + a_1\alpha x + a_2\alpha + (b_1 - a_0 a_1)\alpha^2 x^3 + (b_2 - a_0 a_2)\alpha^2 x^2 + b_3\alpha^2 x + b_4\alpha^2 + \ldots\big). \end{aligned} \tag{199}$$

Подобным же образом можно факторизовать и нелидирующие серии:

$$f_2 = (\text{лидир.})(1 + a_1\alpha x + b_1'\alpha^2 x^3 + \ldots)\big(1 + a_2\alpha + b_2'\alpha^2 x^2 + (b_3 - a_1 a_2)\alpha^2 x + b_4\alpha^2\big), \tag{200}$$

где $b_1' = b_1 - a_0 a_1$, $b_2' = b_2 - a_0 a_2$ — новые коэффициенты, сдвинутые факторизацией лидирующих серий. Эту процедуру можно провести в любом порядке по α_S.

Стоит отметить, что коэффициент при $\log^4 y$ в (186) составляет 1/2 от коэффициента при $\log^2 y$ в (182):

$$f_2 = 1 - \frac{C_F}{\pi}\alpha_S \log^2 y + \frac{1}{2}\left(\frac{C_F\alpha_S}{\pi}\right)^2 \log^4 y + \ldots \tag{201}$$

Можно доказать, что лидирующие члены в любом порядке представимы в виде экспоненты

$$f_2 = e^{-\alpha_S C_F/\pi \log^2 y}. \tag{202}$$

Такого типа выражения известны как судаковские форм-факторы, первоначально изучавшиеся в квантовой электродинамике. Так как в низшем порядке по α_S $f_2 = 1$, то при $y \ll 1$ лидирующие дважды логарифмические члены подавляют 2-струйные сечения. Нетрудно тому найти физическое объяснение. При $y \ll 1$ мы рассматриваем квазиупругое рождение $q\bar{q}$-пар, т. е. получаем конечное состояние, не слишком отличающееся от рождения $q\bar{q}$ в древесном приближении.

Ускоренные цветовые заряды, как и в электродинамике, вызывают излучение. Судаковский форм-фактор как раз подавляет рост излучательных каналов.

Другой важнейшей особенностью судаковских форм-факторов является уширение «острых» структур, подобных пикам в сечении вблизи резонансов. Обратимся к КЭД и форме пика Z-бозона. Судаковское подавление неизлучательных каналов подра-

зумевает относительный рост излучательных каналов в сечении. Поэтому энергия столкновения зачастую реализуется в виде излучения фотонов, т. е.

$$e^+e^- \to e^+e^- + n\gamma. \tag{203}$$

Флуктуации в излучении индуцируют флуктуации в энергии, необходимой для рождения резонанса. Это приводит к сглаживанию пика и к его сдвигу в область больших энергий в системе центра масс $\sqrt{s} > M_Z$.

2.11. Глубоконеупругое рассеяние

Этот процесс дает наиболее достоверную информацию о внутренней структуре протона. Классическим «пробником» ядерной структуры является электрон-ядерное рассеяние. Предполагая, что рассеяние осуществляется посредством обмена одним фотоном, знания кинематических характеристик рассеянного электрона достаточно для определения кинематических характеристик обменного фотона. Рассеянный электрон имеет две нетривиальные кинематические переменные: его энергия и угол рассеяния. Они определяют виртуальность фотона ($Q^2 = -q^2$) и энергию в системе покоя ядра ν. Величина Q^2 характеризует «разрешающую способность» фотона $Q^2 \sim 1/\lambda^2$. При малых $Q^2 \ll 1/R^2$ (R — радиус ядра) происходит упругое поглощение фотона ядром, обнаруживая узкий пик в распределении по ν при $\nu = Q^2/(2M_{Я})$. С ростом $Q^2 \sim 1/R^2$ возникают пики, соответствующие ядерным резонансам. Наконец, для $Q^2 \gg 1/R^2$ фотон начинает «видеть» протоны и нейтроны в ядре. Фотон уже способен поглощаться отдельными протонами. Возникает пик при $\nu = Q^2/(2M_P)$, уширенный за счет фермиевского движения нуклонов в ядре.

Рассеяние электронов на адронах, например, на протонах, аналогично рассеянию электронов на ядрах: при малых Q^2 происходит упругое рассеяние на протоне как целом, с ростом Q^2 фотон упруго поглощается кварковыми составляющими протона.

Нас будет интересовать глубоко ($Q^2 \gg M_P^2$) *неупругое* ($W^2 \gg M_P^2$) (W — инвариантная масса системы фотон-протон) рассеяние (DIS). Этот процесс удобнее описывать в Лоренц-инвариантных переменных. Обозначим импульсы участвующих в DIS частиц:

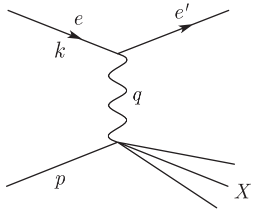


Рис. 8

При фиксированной в системе центра масс энергии $s = (k+p)^2$ имеется только две независимые кинематические переменные

$$Q^2 = -q^2; \quad x = \frac{Q^2}{2pq}. \tag{204}$$

Иногда применяются и другие переменные W^2 и y, которые выражаются через x и Q^2:

$$W^2 = (p+q)^2 = Q^2\frac{1-x}{x}; \quad y = \frac{pq}{pk} = \frac{Q^2}{xs}. \tag{205}$$

Кинематические ограничения

$$Q^2 < s; \quad x > \frac{Q^2}{s}. \tag{206}$$

Так как мы недостаточно знаем о внутренней структуре протона, то не можем вычислить матричный элемент взаимодействия фотона с протоном при рождении произвольного состояния X. Однако, как и в случае e^+e^--аннигиляции в адроны, можно продвинуться достаточно далеко и без точного знания матричного элемента. Представим матричный элемент процесса взаимодействия протона с импульсом p и виртуального фотона с импульсом q, сопровождающегося рождением системы адронов $\{p_x\}$, в виде $eT(p, q; \{p_x\})$.

Тогда матричный элемент для всего процесса DIS:

$$\frac{1}{4}|M|^2 = \frac{1}{4}\frac{e^4}{Q^4}\,\mathrm{tr}\{\not{k}\gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu\} T_\mu\big(p, q; \{p_x\}\big) T^*_\nu\big(p, q; \{p_x\}\big). \tag{207}$$

Для удобства введем лоренцевский тензор

$$L^{\mu\nu} = \mathrm{tr}\{\not{k}\gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu\}. \tag{208}$$

Если состояние X состоит из n адронов, то $(n+1)$-частичный фазовый объем можно представить в виде произведения n-частичного фазового объема X и фазового объема электрона

$$dPS = \frac{Q^2}{16\pi^2 s x^2} dQ^2\, dx\, dPS_X. \tag{209}$$

Проинтегрируем по фазовому пространству X и просуммируем по всем возможным X:

$$\sum_X \int dPS_X \frac{1}{4}|M|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \tag{210}$$

где

$$\sum_X \int dPS_X T_\mu\big(p, q; \{p_x\}\big) T^*_\nu\big(p, q; \{p_x\}\big) = H_{\mu\nu}. \tag{211}$$

Так как интегрируется и суммируется по всем переменным системы X, то $H_{\mu\nu}$ может зависеть только от векторов p и q. Поскольку электромагнитные и сильные взаимодействия сохраняют четность, $H_{\mu\nu}$ симметричен по индексам μ и ν. Существует только четыре симметричных двухиндексных тензора, которые можно построить из векторов p и q, поэтому параметризуем адронный тензор $H_{\mu\nu}$ линейной комбинацией этих четырех тензоров:

$$H_{\mu\nu} = -H_1 g_{\mu\nu} + H_2 \frac{p_\mu p_\nu}{Q^2} + H_4 \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} + H_5 \frac{p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu}{Q^2}, \tag{212}$$

где H_i — скалярные функции двух лоренцевских скаляров $q \cdot q = -Q^2$ и $p \cdot q = Q^2/(2x)$. Если учесть обмен Z^0-бозоном, то нужно добавить еще один тензор, который антисимметричен по индексам μ и ν: $H_3 \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma$, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — полностью антисимметричный лоренцевский тензор. Свертывая (212) с $L^{\mu\nu}$, находим, что H_4 и H_5 не дают вклада в сечение

$$L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = 4kk' H_1 + 4\frac{(pk)(pk')}{Q^2} H_2. \tag{213}$$

Переопределяя $H_1 = 4\pi F_1$, $H_2 = 8\pi x F_2$, получим для сечения

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4}\big[y^2 x F_1(x,Q^2) + (1-y)F_2(x,Q^2)\big]. \tag{214}$$

Таким образом, несмотря на незнание механизма взаимодействия адронов, получена зависимость сечения от s при фиксированных x и Q^2 (напомним, что $y = Q^2/(xs)$). Функции F_i называют структурными функциями протона. Линейные комбинации

$$\begin{aligned} F_T(x,Q^2) &= 2xF_1(x,Q^2), \\ F_L(x,Q^2) &= F_2(x,Q^2) - 2xF_1(x,Q^2). \end{aligned} \tag{215}$$

соответствуют рассеянию поперечно и продольно поляризованных фотонов.

Тогда сечение

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4}\big[\big(1+(1-y)^2\big)F_T(x,Q^2) + 2(1-y)F_L(x,Q^2)\big]. \tag{216}$$

Можно представить сечение также в следующем виде

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4}\big[\big(1+(1-y)^2\big)F_2(x,Q^2) - y^2 F_L(x,Q^2)\big]. \tag{217}$$

Для большинства имеющихся экспериментальных данных y^2 мало, и вкладом F_L можно пренебречь. Если допустить, что взаимодействие фотона с составляющими протона не содержит размерных величин, то безразмерные функции F_i не могут зависеть от размерного параметра Q^2:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4}\big[\big(1+(1-y)^2\big)F_2(x) - y^2 F_L(x)\big]. \tag{218}$$

Эта особенность структурных функций F_i называется бьеркеновским скейлингом. Этот скейлинг с довольно хорошей точностью наблюдается экспериментально.

2.11.1. Партонные распределения и бьеркеновский скейлинг. Партонная модель обычно формулируется в системе отсчета, в которой протон имеет очень большой (бесконечный) импульс. Например, в системе Брейта фотон имеет нулевую энергию, а протон имеет энергию $Q/2x$. Предположим, что в собственной системе отсчета протон представляет собой шар радиуса R. В системе Брейта шар будет иметь поперечный размер $2R$, а в продольном направлении сжат до размера $4RxM_p/Q \ll 2R$. Поперечный «размер» фотона $\sim 1/Q \ll 2R$, при этом фотон взаимодействует лишь с небольшой долей такого диска. Если кварковый «газ» протона достаточно разряжен, то фотон взаимодействует практически со свободными кварками. Таким образом, фотон сталкивается с одним свободным кварком. Это взаимодействие не содержит размерных параметров. Поэтому структурные функции удовлетворяют бьеркеновскому скейлингу.

Более точно, следует предположить, что протон состоит из пучка сопутствующих партонов, переносящих протонный импульс. Определим партонную функцию распределения $f_q(\eta)d\eta$ как вероятность того, что в некоторый фиксированный момент времени партон сорта q несет долю импульса протона от η до $\eta + d\eta$. Если партоны точечные $r^2 \ll 1/Q^2$ и разреженные $f_q(\eta) \ll Q^2R^2$, то фотоны рассеиваются на отдельных партонах некогерентно.

Тогда сечение взаимодействия можно представить как произведение функции распределения партона q на сечение рассеяния на партоне:

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \sum_q \int_0^1 d\eta f_q(\eta) \frac{d^2\sigma(eq(\eta p))}{dxdQ^2}. \tag{219}$$

Если рассеяние упругое, то рассеянный партон находится на массовой поверхности. При рассеянии $2 \to 2$ имеется только одна нетривиальная кинематическая переменная, поэтому дважды дифференциальное сечение от x и Q^2 должно быть пропорционально δ-функции, фиксирующей одну из переменных. Если партоны безмассовые, то

$$(q + \eta p)^2 = 2\eta pq - Q^2 = 0; \quad \eta = x. \tag{220}$$

Если отождествить партоны с кварками кварковой модели, то следует считать, что партоны — фермионы. Из сохранения спиральности при рассеянии следует, что $F_L = 0$. Это соотношение Калана–Гросса. Его экспериментальная проверка позволила сделать заключение о том, что партоны несут спин $1/2$ и отождествить партоны с кварками кварковой модели. Если партоны были бы скалярами, то обращалась бы в ноль структурная функция F_T, и зависимость сечения от y была бы иной, чем наблюдаемая экспериментально.

Для вычисления структурных функций партонной модели нужно знать матричные элементы рассеяния $eq \to eq$. Их можно получить, воспользовавшись кроссинг-симметрией $e^+e^- \to q\bar{q}$:

$$\sum |M|^2 = 8(4\pi\alpha)^2 e_q^2 N_C \frac{(p_e p_q)^2 + (p_e p_q')^2}{(p_e p_e')^2}. \tag{221}$$

В переменной $y = p_e p_e'$ получим

$$\sum |M|^2 = 8(4\pi\alpha)^2 e_q^2 N_C \frac{1 + (1-y)^2}{y^2}. \tag{222}$$

Используя (209), имеем

$$dPS = \frac{Q^2}{16\pi^2 s x^2} dQ^2\, dx\, dPS_X. \tag{223}$$

Так как система X состоит из безмассовых партонов, то

$$dPS_X = \frac{d^4 p_x}{(2\pi)^3}\delta(p_x^2)(2\pi)^4\delta^4(\eta p + q - p_x) = (2\pi)\delta((\eta p + q)^2) = \frac{2\pi x}{Q^2}\delta(\eta - x). \tag{224}$$

Для полного сечения следует

$$\frac{d^2\sigma(e+q)}{dxdQ^2} = \frac{1}{4N_C}\frac{1}{2\hat{s}}\frac{Q^2}{16\pi^2 s x^2}\frac{2\pi x}{Q^2}\delta(x-\eta)\sum |M|^2 = \frac{1}{4N_C}\frac{y^2}{16\pi Q^4}\delta(x-\eta)\sum |M|^2, \tag{225}$$

где $1/N_C$ возникает при усреднении по цветам «входящих» партонов. Окончательно для сечения eq-рассеяния

$$\frac{d^2\sigma(e+q)}{dxdQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4}\delta(x-\eta)e_q^2\big(1 + (1-y)^2\big), \tag{226}$$

а для сечения ep-рассеяния

$$\frac{d^2\sigma(e+p)}{dxdQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4}\big(1 + (1-y)^2\big)\sum e_q^2 f_q(x). \tag{227}$$

Сравнивая (227) с (217), получим

$$F_2(x,Q^2)=\sum_q e_q^2 f_q(x),\quad F_L(x,Q^2)=0. \tag{228}$$

Заметим, что F_2 не зависит от Q^2, проявляя бьеркеновский скейлинг.

2.11.2. Заряженные и нейтральные токи в глубоконеупругом рассеянии. Нейтральное DIS рассеяние описывается аналогично ep-рассеянию. Разница лишь в том, что рассеяние происходит за счет слабого взаимодействия, нарушающего четность, а поэтому возникает дополнительная лоренцевская структура

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{\nu,\overline{\nu}} &= L_{\mu\nu}^{e} \pm 2i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k^\rho k'^\sigma;\\ H^{\mu\nu} &= -H_1 g^{\mu\nu}+H_2\frac{p^\mu p^\nu}{Q^2}-H_3\frac{i}{Q^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho q_\sigma;\\ L_{\mu\nu}^{\nu,\overline{\nu}}H^{\mu\nu} &= 2Q^2H_1+H_2Q^2\frac{1-y}{x^2y^2}\pm\frac{Q^2}{xy}H_3\Big(1-\frac{y}{2}\Big). \end{aligned} \tag{229}$$

Определяя структурную функцию $F_3=H_3/8\pi x$, запишем для сечения

$$\frac{d^2\sigma(\nu,\overline{\nu}+p)}{dxdQ^2}=\frac{G_F^2}{4\pi x}\left(\frac{M_W^2}{Q^2+M_W^2}\right)^2\Big[(1+(1-y)^2)F_2^{\nu,\overline{\nu}}-y^2F_L^{\nu,\overline{\nu}}\pm\big(1-(1-y)^2\big)xF_3^{\nu,\overline{\nu}}\Big], \tag{230}$$

где G_F — фермиевская константа и M_W — масса W-бозона.

В партонной модели

$$\begin{aligned} F_2^{\nu,\overline{\nu}}(x,Q^2) &= \sum_q 2xf_q(x)+\sum_q 2xf_{\overline{q}}(x),\\ xF_3^{\nu,\overline{\nu}}(x,Q^2) &= \sum_q 2xf_q(x)-\sum_q 2xf_{\overline{q}}(x), \end{aligned} \tag{231}$$

где для нейтрино сумма берется по всем партонам, которые взаимодействуют с W^+ (например: d, s, $\overline{u}$, $\overline{c}$), а для антинейтрино — по тем партонам, которые взаимодействуют с W^- (u, c, $\overline{d}$ и $\overline{s}$).

Можно рассматривать глубоконеупругое рассеяние на нейтроне или на дейтоне, извлекая из этих данных нейтронные структурные функции. Вследствие изоспиновой симметрии

$$\begin{aligned} f_{u/n}(x) &= f_{d/p}(x),\\ f_{\overline{u}/n}(x) &= f_{\overline{d}/p}(x),\\ f_{d/n}(x) &= f_{u/p}(x),\\ f_{s/n}(x) &= f_{s/p}(x). \end{aligned} \tag{232}$$

Обычно изучают протонные структурные функции, они связаны с функциями распределений партонов

$$\begin{aligned} F_2^{ep} = \frac{1}{9}xf_d+\frac{4}{9}xf_u+\frac{1}{9}xf_{\overline{d}}+\frac{4}{9}xf_{\overline{u}}&+\frac{1}{9}xf_s+\frac{4}{9}xf_c+\frac{4}{9}xf_{\overline{c}},\\ F_2^{\nu p} &= 2xf_d+2xf_{\overline{u}}+2xf_s+2xf_c,\\ xF_3^{\nu p} &= 2xf_d-2xf_{\overline{u}}+2xf_s-2xf_{\overline{c}},\\ F_2^{\overline{\nu}p} &= 2xf_u+2xf_{\overline{d}}+2xf_c+2xf_{\overline{s}},\\ xF_3^{\overline{\nu}p} &= 2xf_u-2xf_{\overline{d}}+2xf_c-2xf_{\overline{s}}. \end{aligned} \tag{233}$$

Если предположить, что $f_{\overline{s}} = f_s$ и $f_{\overline{c}} = f_c$, то (233) — система уравнений с шестью неизвестными функциями распределения. В принципе, эту систему можно решить, но практически осуществляют глобальное фитирование по имеющимся экспериментальным данным.

Иногда определяют распределение валентных кварков:

$$f_{u_v} = f_u - f_{\overline{u}}, \\ f_{d_v} = f_d - f_{\overline{d}}. \tag{234}$$

Невалентные кварки называют морскими кварками.

2.11.3. Правила сумм для структурных функций. Зная функции распределения партонов в протоне, можно проверить, что

$$\int_0^1 dx f_{u_v}(x) = 2, \\ \int_0^1 dx f_{d_v}(x) = 1. \tag{235}$$

Различные интегралы можно получать непосредственно из структурных функций.

Так, число валентных кварков в протоне

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx (F_3^{\nu p} + F_3^{\overline{\nu} p}) = 3. \tag{236}$$

Это правило сумм Гросса–Ллевелин–Смита. Интересно заметить, что (236) дает возможность определить величину α_S, так как правая часть (236) с учетом КХД-поправок, $3(1 - \alpha_S/\pi + O(\alpha_S^2))$. Правило сумм Адлера

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x} (F_2^{\overline{\nu} p} - F_2^{\nu p}) = 1, \tag{237}$$

учитывает разность между числом «up» и «down» кварков. Свойство (237) — точное в КХД, т. е. оно не изменяется за счет поправок высших порядков. Правило сумм Готтфрида

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} (F_2^{ep} - F_2^{en}) \simeq 0{,}23, \tag{238}$$

где справа записано экспериментальное значение. Выражение (238) чувствительно к разности между числом «up» и «down» морских кварков, оно должно быть 1/3, если эти числа одинаковые. Правило сумм для импульса

$$\int_0^1 dx (F_2^{\nu p} + F_2^{\overline{\nu} p}) \simeq 0{,}5, \tag{239}$$

где справа снова приведено экспериментальное значение. Таким образом, кварки и антикварки переносят только половину импульса протона. Оставшаяся часть импульса связана с глюонами.

2.11.4. Рождение лептонов и фотонов в адронных взаимодействиях. Если партонная модель справедлива, то функции распределения партонов должны быть универсальными. А если это так, то эти функции, извлеченные из DIS, можно применять, например, в адронных процессах рассеяния. Классический пример такого рода рассеяний — механизм Дрелла–Яна рождения лептонных пар в адронных взаимодействиях:

$$h_1 + h_2 \to \mu^+ + \mu^- + X. \tag{240}$$

где X — неизмеряемое состояние.

На партонном уровне процесс (240) — кварк-антикварковая аннигиляция

$$q + \overline{q} \to \mu^+ + \mu^-. \tag{241}$$

Сечение процесса (240) включает функции распределения партонов (кварков и антикварков) и партонные сечения:

$$\frac{d\sigma(h_1(p_1) + h_2(p_2) \to \mu^+\mu^-)}{dM^2} = \sum_q \int_0^1 d\eta_1 f_{q/h_1}(\eta_1) \int_0^1 d\eta_2 f_{q/h_2}(\eta_2) \frac{d\sigma(q(\eta_1 p_1) + \overline{q}(\eta_2 p_2) \to \mu^+\mu^-)}{dM^2}, \tag{242}$$

где M — масса $\mu^+\mu^-$(или e^+e^-). Партонное сечение содержит $\delta(M^2 - \eta_1\eta_2 s)$, поэтому, разбивая данные по инвариантной массе M на малые интервалы, получаем дополнительную информацию о функциях распределения партонов. Если, к тому же, измерить быстроту дилептонной пары

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E_{\mu^+\mu^-} + p_{z,\mu^+\mu^-}}{E_{\mu^+\mu^-} - p_{z,\mu^+\mu^-}}, \tag{243}$$

то фиксируются оба значения η_i. Тогда

$$\frac{d^2\sigma}{dM^2 dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{3N_C M^2 s} \sum_q e_q^2 f_{q/h_1}\left(\frac{e^y M}{\sqrt{s}}\right) f_{q/h_2}\left(\frac{e^{-y} M}{\sqrt{s}}\right). \tag{244}$$

Если сталкивающиеся адроны одинаковые (например, протоны), то из (244) извлекаются распределения морских кварков, которые весьма непросто извлечь из данных по глубоконеупругому рассеянию.

Из правил сумм (239) следует наличие глюонов в протоне, т. е. глюоны имеют тоже функцию распределении $f_g(\eta)$.

Наиболее интересные процессы с участием глюонов — рождение прямых фотонов и струй в адронных взаимодействиях:

$$\begin{aligned} &h_1 + h_2 \to \gamma + X, \\ &h_1 + h_2 \to q + q + X, \\ &h_1 + h_2 \to q + \overline{q} + X, \\ &h_1 + h_2 \to q + g + X, \\ &h_1 + h_2 \to g + g + X \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{245}$$

Рождение прямых фотонов на партонном уровне определяется следующими процессами

$$\begin{aligned} &q + \overline{q} \to \gamma + g; \\ &q + g \to \gamma + q. \end{aligned} \tag{246}$$

Для $h_1 = h_2 = p$ доминирует второй процесс в (246), и в этом процессе можно измерять глюонную функцию распределения. Оба процесса (246) пропорциональны α_S, т. е. реально измеряется $\alpha_S f_g$.

Итак, мы рассмотрели e^+e^--аннигиляцию, глубоконеупругое рассеяние и некоторые адронные взаимодействия — КХД феноменологию на древесном уровне. Однако ничего не говорили о величине α_S, которая вполне может оказаться немалой, и поправки высших порядков станут существенны.

2.11.5. Высшие поправки к глубоконеупругому рассеянию. До сих пор мы считали, что партоны в DIS не взаимодействуют между собой. На самом деле в КХД партоны взаимодействуют. Как будет видно, эти взаимодействия приводят к слабой (логарифмической) зависимости структурных функций от Q^2. Начнем обсуждение поправок высших порядков с кваркового рассеяния.

Эти поправки имеют три составляющих:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{однопетлевые поправки к } eq \to eq;\\ &2)\ eq \to eqg;\\ &3)\ eg \to eq\overline{q}. \end{aligned} \tag{247}$$

Третья поправка относится к КХД и отсутствует в партонной модели. Начнем обсуждение с поправок к процессу (2).

Вклад дают два типа диаграмм. Обозначая импульсы

$$e(k) + q(\eta p) \to e(k') + q(p_1) + g(p_2), \tag{248}$$

получим

$$\sum |M|^2 = \frac{8C_F N_C e^4 e_q^2 g_S^2}{k \cdot k' p_1 \cdot p_2 \eta p \cdot p_2}\left((p_1 \cdot k)^2 + (\eta p \cdot k)^2 + (p_1 \cdot k')^2 + (\eta p \cdot k')^2\right), \tag{249}$$

Элемент фазового пространства (223):

$$dPS = \frac{Q^2}{16\pi^2 s x^2} dQ^2\, dx\, dPS_X. \tag{250}$$

В этом случае X состоит из двух партонов

$$dPS_X = \frac{d\cos\theta\, d\phi}{32\pi^2}, \tag{251}$$

где θ и ϕ относятся к направлению импульса p_1 в системе центра масс $\eta p + q$. Заменим $\cos\theta$ Лоренц-инвариантной переменной z:

$$z = \frac{p_1 \cdot p}{q \cdot p} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta), \tag{252}$$

изменяющейся от $0 < z < 1$. Тогда

$$dPS_X = \frac{dz\, d\phi}{16\pi^2}. \tag{253}$$

Далее будет полезным знать поперечный импульс 4-импульса p_1 в системе центра масс $\eta p + q$:

$$k_\perp^2 = Q^2\left(\frac{\eta}{x} - 1\right) z(1 - z). \tag{254}$$

Случай $\eta = x$ соответствует безмассовому конечному состоянию. Кинематически это означает, что либо p_1 и p_2 очень мягкие (имеют нулевые энергии) или они строго коллинеарны.

Запишем сечение

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{1}{4N_C}\frac{1}{2\widehat{s}}\frac{Q^2}{16\pi^2 sx^2} \times$$
$$\times \int \frac{dz\,d\phi}{16\pi^2}\frac{8C_F N_C e^4 e_q^2 g_S^2}{k\cdot k' p_1\cdot p_2 \eta p\cdot p_2}\big((p_1\cdot k)^2 + (\eta p\cdot k)^2 + (p_1\cdot k')^2 + (\eta p\cdot k')^2\big). \quad (255)$$

Переписывая в переменных $x_p = x/\eta$ и z, а также усредняя по ϕ, получаем

$$\left\langle \frac{(p_1\cdot k)^2 + (\eta p\cdot k)^2 + (p_1\cdot k')^2 + (\eta p\cdot k')^2}{k\cdot k' p_1\cdot p_2 \eta p\cdot p_2}\right\rangle_\phi =$$
$$= \frac{1}{y^2Q^2}\left(\left(1 + (1-y)^2\left[\frac{1+x_p^2}{1-x_p}\frac{1+z^2}{1-z} + 3 - z - x_p + 11x_pz\right] - y^2(8zx_p)\right)\right). \quad (256)$$

Из этого выражения следует, что в рассматриваемом порядке возникает отличная от нуля продольная структурная функция $F_L(x,Q^2)$, и, поскольку интегрирование по z происходит от 0 до 1, появится расходящийся вклад от F_2. Это должно нас насторожить, ведь вычисляется сечение. Собирая все вместе

$$\frac{d^2\sigma(e+q)}{dx\,dQ^2} = \frac{C_F\alpha^2 e_q^2\alpha_S}{2\eta x^2y^2s^2} \times$$
$$\times \int_0^1 dz\left(\left(1 + (1-y)^2\left[\frac{1+x_p^2}{1-x_p}\frac{1+z^2}{1-z} + 3 - z - x_p + 11x_pz\right] - y^2(8zx_p)\right)\right). \quad (257)$$

Отсюда структурная функция

$$F_2(x,Q^2) = \sum_q \int_x^1 dx_p e_q^2 \frac{x}{x_p}\frac{C_F\alpha_S}{2\pi}\left(\frac{1+x_p^2}{1-x_p}\frac{1+z^2}{1-z} + 3 - z - x_p + 11x_pz\right). \quad (258)$$

Расходимость при $z \to 0$ происходит за счет того, что испускаемый глюон коллинеарен с кварком. В фейнмановской диаграмме, в которой глюон связан с исходным кварком, внутренняя кварковая линия оказывается на массовой поверхности, и это вызывает расходимость. Заметим также, что коэффициент при расходящейся части тоже расходятся в точке $x_p = 1$ — для «бесконечно мягкого» глюона.

Попытаемся регуляризовать расходимость, выделив вклад от испусканий глюона с $k_\perp^2 > \mu^2$ (для простоты считаем $\mu^2 \ll Q^2$). Так как $k_\perp^2$ пропорционален $(1-z)$, интеграл уже будет конечным. В любом случае окончательный результат получается в пределе $\mu \to 0$. Итак, функция F_2 представима в виде

$$F_2(x,Q^2) = \sum_q \int_x^1 dx_p e_q^2 \frac{x}{x_p} f_q\left(\frac{x}{x_p}\right)\frac{\alpha_S}{2\pi}\left(\widehat{P}(x_p)\log\frac{Q^2}{\mu^2} + R(x_p)\right), \quad (259)$$

где функция $R(x_p)$ конечна. Функция $\widehat{P}(x_p)$ называется splitting function (нерегуляризованной функцией расщепления):

$$\widehat{P}(x) = C_F\frac{1+x^2}{1-x}. \quad (260)$$

Это вероятность появления кварка в процессе $q \to qg$, несущего долю импульса x от исходного кварка.

Очевидно, что на этом пути расходимость не исчезла, и в пределе $\mu \to 0$ функция F_2 логарифмически расходится. Прежде чем обсуждать, что делать с этой расходимостью, рассмотрим виртуальные однопетлевые поправки к процессу $eq \to eq$. Эта диаграмма имеет две кварк-глюонные связи, поэтому в сечении она дает вклад $O(\alpha_S^2)$. Однако у этой диаграммы те же конечные состояния, что и у диаграммы низшего порядка, поэтому есть интерференция, и ее вклад $\sim O(\alpha_S)$. Так как внешние частицы для двух диаграмм одни и те же, одинакова и кинематика. В частности, их вклад ограничивается точкой $\eta = x$. Как и при e^+e^--аннигиляции, результат интерференции однопетлевой и древесной диаграмм расходится и отрицателен. При этом расходимость сокращается с расходимостью, получаемой в пределе $x_p \to 1$.

С учетом однопетлевой поправки получается формула (259), в которой нерегуляризованная функция $\widehat{P}(x_p)$ заменяется регуляризованной:

$$P(x) = \widehat{P}(x) + P_{\text{вирт.}}(x). \tag{261}$$

Так как однопетлевая поправка имеет ту же кинематику, что и процесс низшего порядка, то $P_{\text{вирт.}} \sim \delta(1-x)$, т. е. $P(x)$ имеет смысл распределения, Чтобы определить $P(x)$, воспользуемся математическим трюком, называемым «плюс-распределением». Для функции $f(x)$, заданной в интервале $0 < x < 1$, определим распределение

$$f(x)_+ = f(x) - \delta(1-x)\int_0^1 dx' f(x'). \tag{262}$$

«Плюс-распределение» особенно удобно, если функция $f(x)$ расходится при $x \to 1$. Любая другая функция $g(x)$, которая не имеет особенности при $x \to 1$, обладает следующим свойством

$$\int_0^1 dx f(x)_+ g(x) = \int_0^1 dx f(x)\big(g(x) - g(1)\big). \tag{263}$$

После включения виртуальной добавки функция расщепления

$$P(x) = C_F\left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-x)\right]. \tag{264}$$

Это только первая поправка в функцию расщепления. В общем случае

$$\mathcal{P}(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha_S}{2\pi}\log\frac{Q^2}{Q_0^2}P(x) + O\left(\alpha_S^2\log^2\frac{Q^2}{Q_0^2}\right). \tag{265}$$

Подставляя (265) в (259), видим, что расходимость при $x_p < 1$ сокращается, но остается расходимость при $x_p < 1$ и $z \to 1$.

Чтобы понять, почему расходимость остается даже после учета петель, обсудим подробнее физическую причину расходимости. Аналогично случаю e^+e^--аннигиляции, сингулярности возникают тогда, когда испускаемые глюоны коллинеарны с исходным кварком, либо глюоны очень мягкие. Все эти вклады присутствовали и в e^+e^--аннигиляции, но там, как, мы видели, они сокращались. В чем отличие? Дело в том, что расходимости возникают в различных областях интеграла по x_p.

В e^+e^--аннигиляции области сингулярности испускания глюона неотличимы от процессов низшего порядка, поскольку глюон с бесконечно малой энергией не может испускаться адроном. Кроме того, струи, порождаемые двумя коллинеарными

партонами, неотличимы от одной струи с суммарным импульсом. Это утверждение справедливо для мягких и коллинеарных вкладов в конечном состоянии, но не для начальных состояний. Во всех сингулярных областях конечные состояния безмассовые, и это фиксирует входящий импульс (равный $Q/(2x)$ в системе Брейта). При этом входящий импульс в диаграмме *в* (рис. 9) больше, чем в диаграммах *а*, *б*, *г*, и расходимость *в* при $\eta > x$ не может сократить другие расходимости при $\eta = x$. Эта расходимость связана с нулевой виртуальностью кварка, но, в соответствии с принципом неопределенности, бесконечно малая виртуальность соответствует очень большим временным масштабам. Казалось бы, это противоречит представлениям партонной модели о том, что виртуальный фотон «видит моментальный снимок» протона.

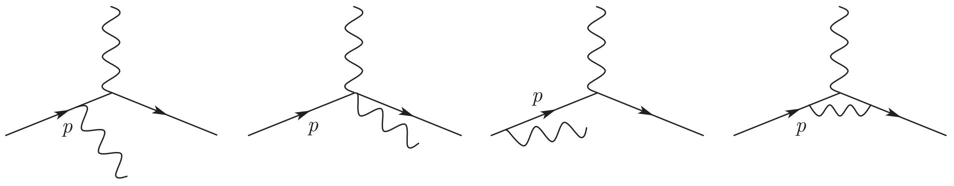


Рис. 9

Проблема заключается в переучете вкладов. Действительно, сначала были введены функции распределения, которые содержат всю информацию о внутренней структуре протона. Вероятно, внутренняя структура протона есть следствие КХД-взаимодействий. Потом мы пытались вычислить КХД-поправки к рассеянию кварков, интегрируя по всем конечным состояниям, т. е. по всем энергетическим масштабам. Но эти поправки уже включены во внутреннюю динамику протона. Чтобы избавиться от этого переучета, следует разделить (или факторизовать) различную физику на разных энергетических масштабах.

Введем масштаб факторизации μ и определим все физические процессы на масштабах, меньших μ, содержащимися в адронной волновой функции, и включим их в партонные функции распределения. Физику на масштабах, больших μ, называют партонной (она описываются коэффициентными функциями). Если физика на масштабах, меньших μ, включена в функции распределения, то эти функции будут зависеть от μ, а структурная функция

$$F_2(x,Q^2) = \sum_q e_q^2 \int\limits_x^1 dx_p \frac{x}{x_p} f_q\Big(\frac{x}{x_p},\mu^2\Big)\Big\{\delta(1-x_p) + \frac{\alpha_S}{2\pi}\Big(P(x_p)\log\frac{Q^2}{\mu^2} + R(x_p)\Big) + O(\alpha_S^2)\Big\}, \tag{266}$$

где функция $R(x_p)$ уже отличается от (259) за счет виртуальных вкладов. Структурные функции уже зависят от Q^2, нарушая бьеркеновский скейлинг. Они также зависят и от μ^2. И это должно беспокоить, ведь физическая величина (сечение) не должна зависеть от μ. Мы вернемся к обсуждению этой проблемы после вычисления зависимостей от μ^2 функций распределения партонов.

2.11.6. DGLAP эволюционные уравнения. Очевидно, что функции распределения определяются непертурбативными эффектами и не могут быть вычислены из «первых принципов». Однако на масштабах $\sim \mu^2$ их можно найти в теории возмущений. Снова, как и в DIS, зная функции распределения на каком либо масштабе μ_0, можно определить их значения и на больших масштабах μ.

Чтобы установить эту зависимость, заметим, что сечение не должно зависеть от μ^2. Поэтому

$$\mu^2 \frac{dF_2(x,Q^2)}{d\mu^2} = 0, \tag{267}$$

или, если вычисления проводились с точностью $O(\alpha_S)$:

$$\mu^2 \frac{dF_2(x,Q^2)}{d\mu^2} = O(\alpha_S^2). \tag{268}$$

Подставляя в (268) в (266), получаем

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f_q(x,\mu^2) = \frac{\alpha_S}{2\pi} \int\limits_x^1 \frac{dx_p}{x_p} f_q\Big(\frac{x}{x_p},\mu^2\Big) P(x_p) + O(\alpha_S^2). \tag{269}$$

Это уравнение называется уравнением Докшицера–Грибова–Липатова–Алтарелли–Паризи (DGLAP) эволюции кварковой функции распределения.

Чтобы выяснить физическое содержание уравнения DGLAP, перепишем функции расщепления в виде

$$P(x) = C_F\left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-x)\right] = C_F\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)_+. \tag{270}$$

Тогда

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f_q(x,\mu^2) = C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \int\limits_x^1 \frac{dx_p}{x_p} f_q\Big(\frac{x}{x_p},\mu^2\Big) \frac{1+x_p^2}{1-x_p} - C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} f_q(x,\mu^2) \int\limits_0^1 dx_p \frac{1+x_p^2}{1-x_p}. \tag{271}$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (271) отражает тот факт, что партонная функция распределения при заданном x «подпитывается» при испускании ими глюонов кварками с большими x. Второе слагаемое в (271) соответствует убыли кварков с заданными x за счет испускания ими глюонов. Оба вклада, очевидно, расходятся при $x_p \to 1$. Обе эти расходимости сокращаются, поскольку число кварков, теряющих свое значение x при испускании легких глюонов, равно числу кварков, которые получают такой x. DGLAP уравнение обычно решается в импульсном пространстве. Для любой функции $f(x)$ определим

$$f_N = \int\limits_0^1 dx x^{N-1} f(x). \tag{272}$$

Это преобразование Меллина. Применяя преобразование Меллина к обеим частям (270), получаем

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f_{qN}(\mu^2) = \frac{\alpha_S}{2\pi} \int\limits_0^1 dx x^{N-1} \int\limits_x^1 \frac{dx_p}{x_p} f_q\Big(\frac{x}{x_p},\mu^2\Big) P(x_p) + O(\alpha_S^2) = \frac{\alpha_S}{2\pi} P_N f_{qN}(\mu^2). \tag{273}$$

Обычно определяют величину

$$\gamma_N(\alpha_s) = \frac{\alpha_S}{2\pi} P_N + O(\alpha_S^2), \tag{274}$$

называемую аномальной размерностью. Если α_S фиксирована, то уравнение (273) с граничным условием на f_{qN} в некоторой точке μ_0 легко решается:

$$f_{qN}(\mu^2) = f_{qN}(\mu_0^2)\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)^{\gamma_N(\alpha_S)}. \tag{275}$$

Однако, как мы уже видели, при ренормировке КХД α_S становится зависящей от μ^2. Согласно уравнению ренормгруппы имеет место равенство

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2}\alpha_S(\mu^2) = \beta\big(\alpha_S(\mu^2)\big) = -\frac{\beta_0}{2\pi}\alpha_S^2(\mu^2) + O(\alpha_S^3). \tag{276}$$

Подставляя «бегущую константу» в (273), получаем

$$f_{qN}(\mu^2) = f_{qN}(\mu_0^2)\left(\frac{\alpha_S(\mu_0)}{\alpha_S(\mu)}\right)^{\frac{P_N}{\beta_0}}. \tag{277}$$

Имея решение для моментов f_q в N-пространстве, нужно перейти назад в x-пространство. Это осуществляется обратным преобразованием Меллина, при этом f_{qN} продолжается в комплексную плоскость

$$f_q(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C dN f_{qN} x^{-N}, \tag{278}$$

где контур C параллелен мнимой оси и проходит справа от всех полюсов. Свойство факторизации, введенное выше, кажется достаточно произвольным, однако оно может быть доказанным во всех порядках теории возмущений. Это можно обнаружить, если вместо обрезания по поперечному импульсу выбрать размерную регуляризацию. При NLO расчетах сечения в d измерениях возникает расходимость $\sim 1/\varepsilon$. В d измерениях структурная функция с точностью $O(\alpha_S)$:

$$F_2(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 \int\limits_x^1 dx_p \frac{x}{x_p}\overline{f}_q\left(\frac{x}{x_p}\right) \times \\ \times \left\{\delta(1-x_p) + \frac{\alpha_S}{2\pi}\left(\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)P(x_p) + R(x_p)\right) + O(\varepsilon)\right\}, \tag{279}$$

где μ — масштаб, введенный для обезразмеривания константы связи. Кроме того, добавлена черта над f_q, которая не зависит от масштаба. Иногда $\overline{f}_q$ называют «голой» функцией распределения.

Очевидно, что функции распределения сами по себе не являются физически наблюдаемыми. Наблюдаемы только их произведения с коэффициентными функциями. Поэтому можно определить модифицированный набор функций распределения

$$x\overline{f}_q(x) = \int\limits_x^1 dx_p \frac{x}{x_p} f_q\left(\frac{x}{x_p}, \mu_F^2\right)\left\{\delta(1-x_p) - \frac{\alpha_S}{2\pi}\left(\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mu_F^2}\right)^{\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)P(x_p) + K(x_p)\right)\right\}, \tag{280}$$

где μ_F — произвольный масштаб факторизации, $K(x_p)$ — произвольная конечная функция. Объединяя (280) и (279), получим для структурной функции

$$F_2(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 \int\limits_x^1 dx_p \frac{x}{x_p} f_q\left(\frac{x}{x_p}, \mu_F^2\right) \times \\ \times \left\{\delta(1-x_p) + \frac{\alpha_S}{2\pi}\left(P(x_p)\log\frac{Q^2}{\mu_F^2} + R(x_p) - K(x_p)\right) + O(\alpha_S^2)\right\}. \tag{281}$$

Видно, что (281) совпадает с (266), за исключением конечной функции $K(x_p)$. Обычно используют две схемы ренормировки. В первой из них ($\overline{MS}$-схеме) $K(x_p) = 0$, во второй (DIS схеме) $K(x_p) = R(x_p)$.

Чтобы прояснить зависимость от схемы ренормировки, вернемся снова к процедуре обрезания. Если бы для разделения функций распределения и коэффициентных функций использовалось обрезание не по поперечному импульсу, а по виртуальности внутренней кварковой линии, то получили бы в результате выражение (266), в котором вместо $R(x_p)$ возникла бы другая функция. Точнее, они отличались бы на $\log[(1-x_p)/x_p)]$, а также нелогарифмическими слагаемыми. Но все логарифмические слагаемые при p_t-обрезании были бы таким же, как $\overline{MS}$-схеме, т. е. для многих целей эти две схемы были бы совершенно эквивалентны. В физических величинах зависимость от схемы ренормировки и масштаба должна отсутствовать, но это происходит только при суммировании всего ряда теории возмущений. В любом конечном порядке зависимость остается. Следовательно, необходима процедура выбора величины μ. Оказывается что структура (266) сохраняется во всех порядках теории возмущений, и каждая степень α_S «сопровождается» степенью $\log(Q^2/\mu^2)$. Каждый порядок теории возмущений включает слагаемые $\sim \alpha_S^n \log^m(Q^2/\mu^2)$, $m < n$. Если μ сильно отличается от Q^2, то логарифм может быть достаточно большим, чтобы компенсировать малость α_S, и ряд теории возмущений будет плохо сходиться. Нужно поэтому выбирать μ «не слишком» отличающейся от Q^2.

Вернемся снова к нахождению $O(\alpha_S)$-поправок к процессу $eg \to eq\overline{q}$. В значительной степени вышеприведенные рассуждения применимы и в этом случае. Хотя нет «мягкой» сингулярности или виртуального слагаемого, сокращающего эту сингулярность, остается коллинеарная сингулярность. Она соответствует двухступенчатому процессу, когда глюон рождает $q\overline{q}$-пару, и фотон взаимодействует с кварком или антикварком. Снова эта сингулярность связана с нулевой виртуальностью кварка, и снова ее можно включить в факторизованную универсальную функцию распределения глюона. Этот процесс вносит дополнительный вклад в структурную функцию:

$$F_2(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 \int_x^1 dx_p \frac{x}{x_p} f_g\left(\frac{x}{x_p}, \mu^2\right) \times \\ \times \left\{ \frac{\alpha_S}{2\pi} \left(P_{qg}(x_p) \log \frac{Q^2}{\mu^2} + R_g(x_p) - K_{qg}(x_p) \right) + O(\alpha_S^2) \right\}, \quad (282)$$

где суммируется по всем «легким» ароматам кварков.

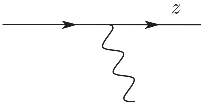
Имеется четыре различных типа функций расщепления (рис. 10).

В этом случае DGLAP превращается в систему связанных между собой уравнений

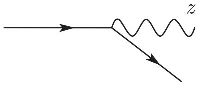
$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f_a(x, \mu^2) = \sum_b \frac{\alpha_S}{2\pi} \int_x^1 \frac{dx_p}{x_p} f_b\left(\frac{x}{x_p}, \mu^2\right) P_{ab}(x_p) + O(\alpha_S^2). \quad (283)$$

В импульсном пространстве эта система становится системой матричных уравнений (в общем случае $(2N_f+1)\times(2N_f+1)$ матриц). Например, для одного аромата кварка система выглядит следующим образом:

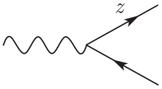
$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \begin{pmatrix} f_{qN} \\ f_{\overline{q}N} \\ f_{gN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{qqN}(\alpha_S(\mu)) & 0 & \gamma_{qgN}(\alpha_S(\mu)) \\ 0 & \gamma_{qqN}(\alpha_S(\mu)) & \gamma_{qgN}(\alpha_S(\mu)) \\ \gamma_{gqN}(\alpha_S(\mu)) & \gamma_{gqN}(\alpha_S(\mu)) & \gamma_{ggN}(\alpha_S(\mu)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{qN} \\ f_{\overline{q}N} \\ f_{gN} \end{pmatrix}. \quad (284)$$



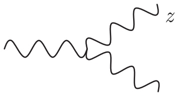
$$P_{qq}(x) = C_F\left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-x)\right]$$



$$P_{qg}(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 + (1-x)^2\right]$$



$$P_{gq}(x) = C_F\left[\frac{1+(1-x)^2}{x}\right]$$



$$P_{gg}(x) = 3\left[\frac{2x}{(1-x)_+} + 2\frac{1-x}{x} + 2x(1-x) + \beta_0\delta(1-x)\right]$$

Рис. 10

Решение этого уравнения в матричной форме

$$\begin{pmatrix} f_{qN}(\mu^2) \\ f_{\bar{q}N}(\mu^2) \\ f_{gN}(\mu^2) \end{pmatrix} = \exp\int\limits_{\mu_0^2}^{\mu^2}\frac{d{\mu'}^2}{{\mu'}^2}\begin{pmatrix} \gamma_{qqN}(\alpha_S(\mu')) & 0 & \gamma_{qgN}(\alpha_S(\mu')) \\ 0 & \gamma_{qqN}(\alpha_S(\mu')) & \gamma_{qgN}(\alpha_S(\mu')) \\ \gamma_{gqN}(\alpha_S(\mu')) & \gamma_{gqN}(\alpha_S(\mu')) & \gamma_{ggN}(\alpha_S(\mu')) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{qN}(\mu_0^2) \\ f_{\bar{q}N}(\mu_0^2) \\ f_{gN}(\mu_0^2) \end{pmatrix}. \quad (285)$$

Конечно, нужно снова сделать обратное преобразование Меллина. Как правило, это делается с помощью численных методов. Факторизация сингулярностей в начальном состоянии вводит логарифмическую зависимость от Q^2 в структурные функции, нарушая бьеркеновский скейлинг.

2.12. Непертурбативные методы в КХД

К сожалению, о непертурбативных методах в теории поля вообще, и в КХД в частности, известно довольно мало, хотя именно непертурбативные эффекты в конечном счете определяют структуру адронов. Среди непертурбативных методов следует отметить численное моделирование на решетках, квазиклассические методы, метод правил сумм и метод эффективных лагранжианов. Интересные результаты получены для бесконечного числа цветов $N_C \to \infty$. Ниже мы не будем более подробно обсуждать этот подход. Отметим лишь, что его идея состоит в том, что основные свойства калибровочных теорий не зависят от N_C, если величина $g^2 N_C = \lambda$ фиксирована. Поправки на конечность N_C можно рассматривать как возмущения, не изменяющие структуры теории. Фермионные петли при этом пропорциональны $\sim n_f/N_C^{n/2}$, n_f — число легких кварков, n — число вершин. За исключением $n = 2$, все процессы, определяющие β-функцию теории, вносят малые поправки. Решеточные вычисления подтверждают эти предположения.

2.12.1. Решеточные калибровочные теории. Огромное преимущество решеточной версии КХД состоит в том, что она обеспечивает ультрафиолетовое обрезание, но сохраняет при этом локальную калибровочную инвариантность. С другой стороны, решеточная версия нарушает трансляционную и вращательную симметрию. Забудем, однако, на время об этой проблеме и рассмотрим пока бескварковую теорию на решетке.

Фундаментальной операцией в решеточной калибровочной теории является «параллельное перемещение», а основными объектами — 3×3 унитарные матрицы U с единичным определителем. Они находятся на ориентированных ребрах кубической гиперповерхности в 4-х измерениях и осуществляют параллельное перемещение.

Таким образом, динамическая переменная — матрица $U_{r,\widehat{\mu}}$, ассоциированная с ребром, исходящим из точки r и оканчивающимся в $r + \widehat{\mu}a$, где a — шаг решетки. Матрица, ассоциированная с тем же ребром, но ориентированная в противоположном направлении $U_{r+\widehat{\mu}a,-\mu} = U^{-1}_{r,\widehat{\mu}}$.

Если бы калибровочный потенциал A_μ был непрерывным, то параллельное перемещение

$$U_{r,\widehat{\mu}} = \overline{p}\exp\Big(i\int\limits_{r}^{r+\widehat{\mu}a} A_\mu\,dx^\mu\Big), \tag{286}$$

где $\overline{p}$ обозначает обратное упорядочение. Действительно, это решение уравнения

$$\nabla_\mu U = (\partial_\mu + iA_\mu)U = 0, \tag{287}$$

имеющее указанные концевые точки. Локальные калибровочные преобразования $\Omega(r)$ действуют на узлы решетки и преобразуют матрицы U следующим образом:

$$\tilde{U}_{r,\widehat{\mu}} = \Omega(r)U_{r,\widehat{\mu}}\Omega^{-1}(r + \widehat{\mu}a). \tag{288}$$

Очевидно, что $\Omega(r)$ являются матрицами 3×3.

Чтобы получить члены с взаимодействием, инвариантным относительно преобразований (288), надо взять след от произведения матриц U по пути из ребер, образующему замкнутую петлю. Простейшая возможность — взять след от произведения матриц на элементарном квадрате решетки — плакете:

$$\operatorname{tr} Pl_{r,\widehat{x}\widehat{y}} = \operatorname{tr}(U_{r,\widehat{x}}U_{r+a\widehat{x},\widehat{y}}U_{r+a\widehat{x}+a\widehat{y},-\widehat{x}}U_{r+a\widehat{y},-\widehat{y}}). \tag{289}$$

Подставляя в (289) выражение (286) и разлагая при малых a, находим первый нетривиальный член

$$\operatorname{tr} Pl_{r,\widehat{x}\widehat{y}} \to \operatorname{tr}\Big(1 - \frac{a^4}{2}F^{xy}F_{xy}\Big) + O(a^6). \tag{290}$$

Таким образом, простейшее калибровочно-инвариантное решеточное действие (вильсоновское действие)

$$S_W = \frac{1}{4g^2}\sum_{\text{плакет}}(3 - \operatorname{tr} Pl_\square) \tag{291}$$

сводится в пределе $a \to 0$ к непрерывному действию.

Для вычисления корреляционной функции операторов $\langle O_1O_2\ldots\rangle$ нужно вычислить интеграл

$$\langle O_1O_2\ldots\rangle = \frac{\int dMe^{-S_W}O_1O_2\ldots}{\int dMe^{-S_W}}, \tag{292}$$

где $dM = \prod\limits_{\text{ребра}\,r,\widehat{\mu}} U^{-1}_{r,\widehat{\mu}}dU_{r,\widehat{\mu}}$ — произведение инвариантных интегралов на калибровочной группе. Решеточная регуляризация дает возможность сформулировать в пределе сильной связи теорию возмущений по величине $1/g^2$. Если g становится большой, то можно разложить e^{-S_W} в ряд по степеням $1/g^2$.

Для исследования конфайнмента обычно используется метод петель Вильсона–Полякова. Этот метод состоит в вычислении следов произведений матриц U вдоль петель. При этом следует рассматривать, в отличие от действия, большие петли. Обсудим более подробно мотивацию этого метода. Пусть мы поместили в систему очень тяжелый кварк. Он будет находиться в некоторой фиксированной точке пространства, поэтому его мировая линия — это прямая линия в $\widehat{\tau}$ (евклидово время) направлении. $\mathrm{tr}(j \cdot A)$-связь этого цветного источника будет генерировать произведение U-матриц вдоль ребер мировой линии. Поэтому для измерения потенциала между тяжелым кварком и тяжелым антикварком, находящимся на расстоянии R, нужно найти энергию, необходимую для создания подобной «линии», а также подобной же линии с U^{-1}-матрицами на расстоянии R. Если допустить, что подобная конфигурация существует в течение евклидова времени T, то вероятность такой конфигурации $e^{-V(R)T}$. Для того, чтобы представить измерение потенциала более отчетливо, выберем петлю с короткими сегментами вверху и внизу (рис. 11).

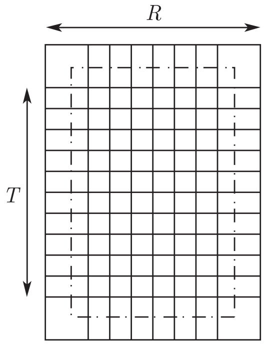


Рис. 11

Это соответствует рождению кварк-антикварковой пары, раздельному «сосуществованию» кварка и антикварка в течение «длительного» времени и затем их аннигиляции.

Полагая $R \ll T$, получаем формулу для потенциала

$$V(R) = \lim_{T\to\infty} \frac{(-1)}{T} \ln \frac{\int dMe^{-S_W}\Pi}{\int dMe^{-S_W}}, \tag{293}$$

где Π — след от упорядоченного произведения матриц U вдоль периметра прямоугольника на рис. 11, имеющего длины сторон R и T.

Теперь можно понять, как в пределе сильной связи возникает конфайнмент. Интеграл от одной U-матрицы по групповому многообразию $\int U^{-1}dUU$ обращается в ноль. В самом деле, изменение переменных $U \to gU$ оставляет меру инвариантной. Поэтому, если $\int U^{-1}dUU = K$, то за счет изменения переменных получим $gK = K$ для любого g, а это означает, что $K = 0$. В пределе сильной связи вильсоновская петля разбивается на отдельные плакеты, причем число плакетов пропорционально площади RT (рис. 12).

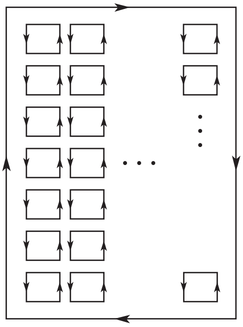


Рис. 12

Поэтому в пределе сильной связи

$$V(R) \sim -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{1}{g^2}\right)^{RT} \sim R. \tag{294}$$

Линейность потенциала означает, что невозможно разнести цветовые источники на бесконечность, т. е. имеет место конфайнмент.

2.12.2. Нарушение киральной симметрии. В расчетах на пространственно-временных решетках обнаружено нарушение киральной симметрии КХД. Оказывается, что вакуумное среднее

$$\langle \overline{q}_{Li} q_{Rj} \rangle \sim v\delta_{ij} \neq 0 \tag{295}$$

в теории с безмассовыми кварками. Подобная конденсация кварк-антикварковых пар вполне аналогична спонтанному намагничиванию в ферромагнетике.

Предположим, что основное состояние физической системы (например, ферромагнетика или КХД при нулевой температуре) характеризуется существованием конденсата

$$\langle \eta | M^a_b | \eta \rangle = \eta^a_b, \tag{296}$$

который нарушает непрерывную симметрию основополагающих уравнений системы (например, вращательную или киральную симметрию). Пусть симметрия g теории характеризуется унитарным оператором $U(g)$, причем $U^{-1}(g)MU(g) = \rho(g)M$. Тогда, если $\rho(g)\eta \neq \eta$, что является сигнатурой нарушения симметрии, то состояние

$$U(g)|\eta\rangle \equiv |\rho(g)\eta\rangle \tag{297}$$

будет физически отличаться от основного состояния, хотя и будет энергетически вырождено с ним. Медленно изменяя многообразие состояний, мы могли бы ожидать новых состояний, чья энергия стремится к нулю, если длина волны соответствующих вариаций стремится к бесконечности. На языке частиц, кванты поля, создающие такие конфигурации, должны быть безмассовыми. Если нарушенная симметрия является внутренней симметрией, то кванты должны быть бесспиновыми частицами.

Возвращаясь к сильным взаимодействиям, заметим, что π-мезоны имеют спин 0, и они гораздо легче других адронов. Поэтому можно ожидать, что π-мезоны связаны с нарушением приближенной внутренней симметрии. Псевдоскалярная природа π-мезонов, а также тот факт, что они образуют изотриплет, дает основание ожидать, что происходит следующее нарушение симметрии

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_{L+R}. \tag{298}$$

Эвристическая модель нарушения киральной симметрии была предложена Намбу–Иона–Ласинио задолго до КХД (см. также приложение 1 к главе 3 части II).

Предположим, что имеется притягивающее 4-фермионное взаимодействие

$$L_{int} = -g(\overline{\psi}\psi)(\overline{\psi}\psi). \tag{299}$$

Пусть оказывается энергетически выгодным сформировать конденсат

$$\langle \overline{\psi}\psi \rangle = v \neq 0, \tag{300}$$

поскольку именно конденсату соответствует отрицательная энергия взаимодействия. Действительно, если конденсат настолько велик, что можно пренебречь квантовыми флуктуациями, то плотность энергии конденсата

$$\Delta\varepsilon = -\Delta L = -g\langle \overline{\psi}\psi \rangle^2. \tag{301}$$

В самом деле, чтобы это увидеть, следует записать

$$(\overline{\psi}\psi)^2 = (\overline{\psi}\psi - v)^2 + 2v\overline{\psi}\psi - v^2 \tag{302}$$

и в лагранжиане взаимодействия отбросить флуктуирующий первый член (это справедливо в режиме слабой связи). Остальные слагаемые, совместно со стандартным кинетическим слагаемым, образуют лагранжиан свободных массивных фермионов. Далее можно диагонализовать этот квадратичный лагранжиан, построить основное состояние и вычислить значение $\langle \overline{\psi}\psi \rangle$ в этом состоянии. Для самосогласованности следует приравнять вычисленное значение $\langle \overline{\psi}\psi \rangle$ первоначальному значению v. Это уравнение самосогласованности известно как уравнение для щели, и оно вполне аналогично уравнению БКШ в теории сверхпроводимости. Если уравнение для щели имеет нетривиальное решение, то при формировании конденсата энергия состояния понижается.

В КХД в кварк-антикварковом синглетном канале при одноглюонном обмене взаимодействие имеет характер притяжения. Чтобы создать скалярный конденсат в этом канале, нужно «спарить» левые антикварки с правыми кварками.

2.12.3. Инстантонный вакуум. Попытки выхода за рамки теории возмущений были предприняты после открытия классических решений КХД с конечным действием (инстантонов), имеющих нетривиальную топологию (см. приложение 2).

При вычислении обычных интегралов методом седловой точки подразумевается суммирование по всем стационарным точкам фазы:

$$\int dx e^{f(x)} \simeq \sum_{x_n} \int d(\delta x_n) e^{f(x_n)+\frac{f''}{2}\delta x_n^2} \sum_k \frac{(\Delta f_n)^k}{k!}, \tag{303}$$

$$\Delta f_n = f - f(x_n) - \frac{f''}{2}\delta x_n^2.$$

Точно так же при вычислении фейнмановских интегралов методом седловой точки следует учесть все стационарные точки действия. Обычное пертурбативное разложение учитывает только тривиальную стационарную точку $q = 0$. Если же имеются и другие минимумы с конечным действием, то гауссово приближение дает

$$Z = \sum_n \int d\delta q_n e^{-S_n^0[q]} e^{-\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S}{\delta q_\alpha \delta q_\beta}\Big|_{S=S_0 \delta q^\alpha \delta q^\beta}} \sum_k \frac{(\Delta f_n)^k}{k!}, \tag{304}$$

где $S^0[q_n]$ — действие классической конфигурации q_n, $\delta q_n = q - q_n$,

$$\Delta S = S - S^0[q_n] - \frac{1}{2}\frac{\delta^2 S}{\delta q_\alpha \delta q_\beta}\Big|_{q_n} \delta q_\alpha^n \delta q_\beta^n. \tag{305}$$

В конце 70-х годов прошлого века значительные усилия были посвящены учету непертурбативных эффектов в (304). При этом учитывались дополнительные слагаемые, помимо тривиальной стационарной точки $q = 0$. Существовали надежды, что доминирующий вклад будут вносить инстантоны малых размеров, т. е. достаточно учесть лишь несколько членов в непертурбативном разложении возле инстантонных решений, чтобы получить описание физики адронов. Эти попытки встретились с большими трудностями, связанными с инфракрасными проблемами, в частности, с конфайнментом. Однако инстантонный подход имеет несомненные успехи при описании киральной симметрии адронов (см. приложение 2).

2.12.4. Правила сумм и вакуумные конденсаты в КХД. Рассмотрим вильсоновское операторное разложение коррелятора двух токов (см. также приложение 3)

$$\Pi^{\mu\nu}(x) = T(j^\mu(x) j^\nu(0)) = C_I^{\mu\nu}(x) I + C_4^{\mu\nu}(x)\frac{\beta(g)}{g} G_{\alpha\beta}^a G_{\alpha\beta}^a + C_\psi^{\mu\nu}(x) m\overline{\psi}\psi + \ldots \tag{306}$$

Если провести Фурье-преобразование этого соотношения, то получим

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \equiv \int d^4x e^{iqx} \langle 0| j_\mu(x) j_\nu(0) |0\rangle = \left(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}\right)\left[\Pi(q^2) - \Pi(0)\right], \tag{307}$$

$$\Pi(q^2) - \Pi(0) = C_1 + \frac{C_4}{q^2} G_2 + \frac{C_\psi}{q^4} G_\psi + \ldots, \tag{308}$$

где $G_2 = \langle 0|(\beta(g)/g) G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a|0\rangle$ имеет размерность $[m^4]$ и называется глюонным конденсатом; $G_\psi = \langle 0|m\overline{\psi}\psi|0\rangle$ имеет размерность $[m^4]$, связан с нарушением киральной

симметрии и называется киральным конденсатом: C_1, C_4, C_ψ — безразмерные константы, зависящие от α_S. Величины G_2, G_ψ не определяются в теории возмущений. Дисперсионное представление (см. приложение 3) для $\tilde{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$ имеет вид

$$\tilde{\Pi}(q^2) = -q^2 \int\limits_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{R(s)}{s - q^2 + i\varepsilon}, \tag{309}$$

где $R(s)$ — хорошо известное отношение

$$R(s) = \frac{\sigma_{e^+e^- \to h}(s)}{\sigma_{e^+e^- \to \mu^+\mu^-}(s)}. \tag{310}$$

В теории возмущений только C_1 получает в каждом порядке вклад $\sim \log s$. Физика, однако, не является масштабно-инвариантной. Масштабную инвариантность нарушают резонансы, и это нарушение описывается конденсатами (см. приложение 3). Это основная идея правила сумм Шифмана–Вайнштейна–Захарова, в которых используется соотношение

$$-q^2 \int\limits_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{R(s)}{s - q^2 + i\varepsilon} \simeq C_1 + \frac{C_{G_2}}{q^4} G_2 + \frac{C_\psi}{q^4} G_\psi. \tag{311}$$

Это выражение выполняется «в среднем», т. е. обе части не равны друг другу при любых q^2, а лишь при усреднении по q^2. В выражении (311) коэффициенты C вычисляются в некотором порядке теории возмущений, тогда феноменологические значения конденсатов следуют из сравнения с экспериментальными данными.

Согласно современным данным

$$\begin{gathered} G_2 = (0{,}240 \pm 0{,}011)\ \text{ГэВ}^4, \\ \langle \overline{\psi}\psi \rangle_{q^2 = 1\ \text{ГэВ}^2} = -0{,}13\ \text{ГэВ}^3. \end{gathered} \tag{312}$$

2.13. Квантовая хромодинамика при высоких плотностях энергии

Целью «традиционной» ядерной физики было изучение свойств ядерной материи при плотностях энергии, сравнимых с плотностями энергии атомных ядер

$$\varepsilon_0 \simeq 0{,}15\ \text{ГэВ/фм}^3. \tag{313}$$

Ядерная физика высоких энергий дает возможность изучения свойств ядерной материи при плотностях энергии, превышающих (313) в десятки и сотни раз. При таких условиях возможно возникновение новых форм материи, таких как кварк-глюонная плазма и конденсат цветового стекла (CGC). Кварк-глюонная плазма — это новое состояние ядерного вещества, в котором кварки, антикварки и глюоны находятся в фазе деконфайнмента. CGC — это универсальный вид материи (независящий от сорта адрона), существующий на масштабах, больших по сравнению с микроскопическими масштабами, характерными для сильных взаимодействий.

Под микроскопическим размером расстояний понимается 1 фм, а микроскопический временной масштаб $t \sim 10^{-23}$ с. CGC назван так потому, что он состоит из цветных частиц, эволюционирует на временных масштабах, гораздо больших

микроскопических временных масштабов, (подобно стеклам) и представляет собой конденсат глюонов с большой плотностью.

2.13.1. Что такое кварк-глюонная плазма? Материя при низких плотностях энергии состоит из электронов, протонов и нейтронов. Если каким-то образом «нагреть» систему, то в ней возникают температурные возбуждения, которые включают такие легкие сильновзаимодействующие частицы, как π-мезоны. Как мы надеемся, протоны, нейтроны и другие сильновзаимодействующие частицы состоят из кварков, антикварков и глюонов.

При высоких плотностях энергии сильновзаимодействующие частицы начинают перекрываться, система переходит в состояние деконфайнмента кварков и глюонов. При очень больших плотностях энергии взаимодействие между кварками и глюонами становится очень слабым, и это есть следствие асимптотической свободы сильных взаимодействий. Как известно, на малых расстояниях сильные взаимодействия становятся слабыми.

Очевидно, что кварк-глюонная плазма существовала некоторое время после Большого Взрыва.

В начальный момент Большого Взрыва при температурах $T \sim 10^{19}$ ГэВ, по-видимому, динамика определялась эффектами квантовой гравитации, которые мы до сих пор мало понимаем. При несколько меньших температурах имело место объединение всех взаимодействий, за исключением гравитации. При температурах $T \sim 100$ ГэВ происходит нарушение электрослабой симметрии. Возможно, что на этой стадии происходит нарушение барионной симметрии. При $T \sim 1$ ГэВ кварки и глюоны образуют адроны. Ускоритель RHIC предназначен для исследования свойств ядерной материи при этих температурах. Если температура становится порядка $T \sim 1$ МэВ, то происходит образование легких элементов. При $T \sim 1$ эВ возникают связанные состояния электронов в атомах, Вселенная переходит от состояния ионизованного газа к газу нейтральных атомов и т. д.

Кварк-глюонная плазма формируется, как ожидается, при плотностях энергии ~ 1 ГэВ/фм^3. Как уже отмечалось, при высоких температурах, константа КХД становится малой. В этом случае газ кварков, антикварков и глюонов можно считать идеальным. Каждый сорт частиц вносит свой вклад в плотность энергии идеального газа:

$$\varepsilon = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_i \frac{E_i}{e^{\beta E_i} \pm 1}, \tag{314}$$

где знак минус относится к бозонам, а плюс — к фермионам. При очень высоких температурах можно пренебречь массами частиц и ± 1 в знаменателе (314), тогда

$$\varepsilon \sim \frac{\pi^2}{30} N T^4, \tag{315}$$

где N — число степеней свободы частиц. При низких температурах, когда массы частиц важны, в плотность энергии основной вклад вносят только самые легкие частицы — пионы, при этом $\varepsilon \sim e^{-m_\pi/T}$. Для идеального газа пионов число степеней свободы равно трем. В кварк-глюонной плазме имеется два спиральных состояния и восемь цветовых состояний для каждого глюона, а для каждого кварка — три цвета, два спиновых состояния. Аналогично — для каждого антикварка. Поэтому число степеней свободы в кварк-глюонной плазме $N \simeq 2 \times 8 + 4 \times 3 \times N_F$, где N_F — число имеющихся кварковых ароматов ($N_F = 3$). Тогда $N \simeq 50$, т. е. при переходе от адронного газа к кварк-глюонной плазме число степеней свободы увеличивается на порядок. Основная причина этого увеличения — цветовые степени свободы КХД.

В пределе очень большого N_C число степеней свободы КГП пропорционально N_C^2, а в фазе конфайнмента — порядка единицы. В этом пределе плотность энергии имеет бесконечный скачок вблизи фазового перехода. Поэтому (для $N_C \to \infty$) должна существовать предельная адронная температура. Это так называемая хагедороновская температура. В реальном мире $N_C = 3$, поэтому имеется температура, при которой плотность энергии меняется на порядок величины.

Гипотетическая фазовая диаграмма показана на рис. 13. На этом рисунке вертикальная ось соответствует температуре, а горизонтальная ось — барионному химическому потенциалу μ_B. Сплошные линии означают фазовый переход первого рода, пунктирная линия — плавный переход (кроссовер). При высоких температурах и фиксированной барионной плотности существуют аналитические и численные методы вычисления фазовой диаграммы КХД. При высоких плотностях, но фиксированной температуре, предсказывается существование нескольких фаз сверхпроводящей кварковой материи. Очевидно, что «решающее слово» в определении фазовой диаграммы принадлежит уже осуществляемой программе по столкновениям релятивистских ядер на RHIC, а также будущему ускорителю LHC. Много информации о поведении КХД при конечных плотностях энергии получено в решеточных калибровочных теориях.

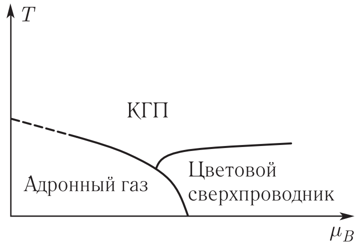


Рис. 13

Напомним, что при конечных температурах статсумма большого канонического ансамбля частиц:

$$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H}. \tag{316}$$

Вычисление величины Z означает нахождение среднего

$$Z = \langle e^{-itH} \rangle \tag{317}$$

для $-it = \beta$, т. е. нужно найти среднее от оператора эволюции для мнимого времени. Величина Z может быть представлена как интеграл по путям. При изменении переменных действие $iS = i\int dtL$ переходит в действие $S = -\int\limits_0^\beta d\tau L$, где L — лагранжиан системы.

Для большого канонического ансамбля глюонов

$$Z = \int [dA] e^{-S[A]}. \tag{318}$$

При этом глюонные поля удовлетворяют периодическим граничным условиям. Фермионы (кварки) тоже можно учесть в большом каноническом ансамбле, но для них граничные условия — апериодические. Ожидаемое значение (вакуумное среднее) какой либо величины O:

$$\langle O \rangle = \frac{\mathrm{tr}\, O e^{-\beta H}}{\mathrm{tr}\, e^{-\beta H}}. \tag{319}$$

В решеточных вычислениях по методу Монте-Карло большой канонический ансамбль представлен полями на конечной решетке, поэтому интеграл по путям становится конечномерным. Конфигурации полей выбираются в соответствии с действием. Это оправдано, поскольку фактор $e^{-\beta H}$ положителен и вещественен. В решеточных теориях вычислена плотность энергии как функция температуры. На рис. 14 изображена зависимость ε/T^4 как функция T.

Как упоминалось выше, эта зависимость определяет число степеней свободы системы как функцию T. При температурах $T_C \sim 160 \div 190$ МэВ число степеней свободы резко возрастает, напоминая фазовый переход от адронов к кварк-глюонной плазме. На следующем рис. 15 показана скорость звука как функция температуры.

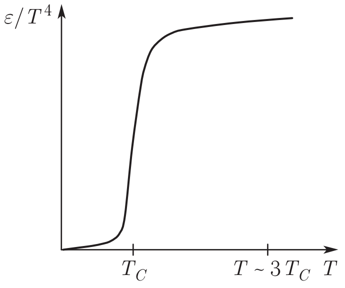


Рис. 14

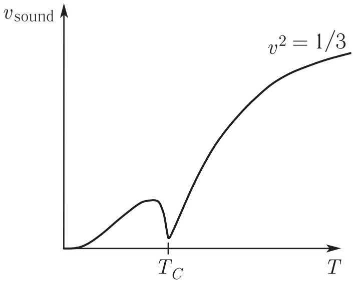


Рис. 15

При высоких температурах скорость звука стремится к значению, характерному для идеального газа $v^2 = 1/3$. Вблизи фазового перехода скорость звука очень мала. Дело в том, что вблизи T_C плотность энергии имеет скачок, а давление изменяется плавно, при этом $v^2 = d\varepsilon/dp$.

Решеточные вычисления позволяют судить, как фазовый переход связан с силами, обеспечивающими конфайнмент. В теории, содержащей только глюоны, потенциал для цветных источников, находящихся в фундаментальном представлении калибровочной группы, в фазе конфайнмента линейно растет с увеличением расстояния. Если учитываются также и фермионы, потенциал перестает расти на расстояниях, для которых энергетически выгодно создать кварк-антикварковую пару. Попытаемся понять, как конфайнмент исчезает при высоких температурах.

Рассмотрим вильсоновскую линию, распространяющуюся от точки $(0, \vec{x})$ до точки $(\beta, \vec{x})$. Вильсоновская линия, как известно, — упорядоченная экспонента:

$$L(x) = P \exp \int\limits_0^\beta dt A^0(t, \vec{x}). \tag{320}$$

Можно показать, что ожидаемое значение вильсоновской линии связано со свободной энергией изолированного кварка:

$$e^{-\beta F} = \frac{1}{N_C} \langle \operatorname{tr} L(x) \rangle. \tag{321}$$

Выберем теперь калибровочное преобразование, которое сохраняет периодические граничные условия, наложенные на калибровочные поля.

Наиболее общее калибровочное преобразование такого сорта имеет вид:

$$U(\beta, \vec{x}) = ZU(0, \vec{x}). \tag{322}$$

Очевидно, что $[Z, \tau^a] = 0$ и $\nabla^i Z = 0$. Поскольку Z — элемент калибровочной группы, то $\det Z = 1$. Этим условиям удовлетворяет преобразование

$$Z = e^{\frac{2\pi i j}{N_C}}. \tag{323}$$

Заметим, что это глобальная симметрия, т. е. она не зависит от пространственно-временной точки. Эта симметрия (Z_N-симметрия) может быть нарушенной. Если такое нарушение происходит, свободная энергия кварка становится бесконечной, так как

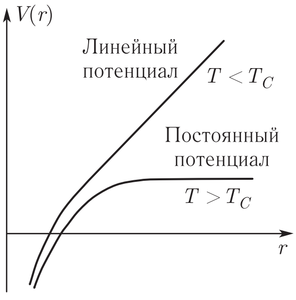


Рис. 16

при этом преобразовании $L \to ZL$ и $\langle L \rangle = 0$. Итак, если Z_N-симметрия нарушена, кварки становятся свободными.

Решеточные вычисления позволяют измерить кварк-антикварковый потенциал как функцию T. При температуре деконфайнмента линейно растущий потенциал становится постоянным (рис. 16).

Кроме деконфайнмента, имеется дополнительная симметрия, которая реализуется при высоких температурах. В природе u- и d-кварки имеют очень малые, практически нулевые массы. В пределе $m_q \to 0$ возникает киральная симметрия при вращениях фермионных полей с помощью оператора $e^{i\gamma_5\theta}$. Если бы эта симметрия была точной, то либо барионы были безмассовыми, либо происходило удвоение дублетов по четности. Ни того, ни другого в природе не наблюдается. Нуклоны имеют массу около 1 ГэВ-а и не имеют противоположных партнеров по четности с той же массой. Следует считать, что подобная симметрия нарушена, и, как следствие, нуклон приобретает массу, а π-мезон становится почти безмассовым голдстоуновским бозоном.

Оказывается, что при фазовом переходе конфайнмент-деконфайнмент происходит восстановление киральной симметрии. Это видно из рис. 17, где величина, пропорциональная массе нуклона, представлена как функция температуры.

Восстановление киральной симметрии имеет интересные динамические следствия. В фазе конфайнмента масса нуклона $\sim N_C \Lambda_{\text{КХД}}$, а в фазе деконфайнмента $\sim T$. Поэтому в фазе конфайнмента больцмановский вес $e^{-M/T}$ очень мал. Попытаемся представить, что происходит, если рассматривать эволюцию системы, начиная с температур, больших T_C. Сначала система находится полностью в состоянии КГП. При расширении температура уменьшается, вблизи T_C начинают формироваться капли адронной материи. Нуклонам предпочтительнее находиться в фазе КГП, поскольку их больцмановский фактор больше. При дальнейшем расширении капли КГП сжимаются, но барионное число сосредоточено, главным образом, в этих каплях. Поэтому в конце смешанной фазы создаются большие флуктуации барионного числа.

Вообще говоря, фазовые переходы деконфайнмента и восстановления киральной симметрии могли бы быть и не связанными друг с другом. В самом деле, фазовый переход деконфайнмента относится к свойствам симметрии при бесконечных кварковых массах. Киральный же фазовый переход связан со свойствами симметрии безмассовых кварков. Можно проследить за эволюцией фазового перехода как функции масс кварков (рис. 18). При больших и малых кварковых массах имеется фазовый переход,

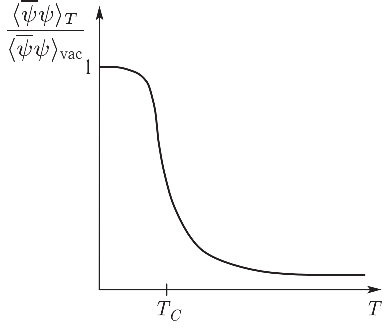


Рис. 17

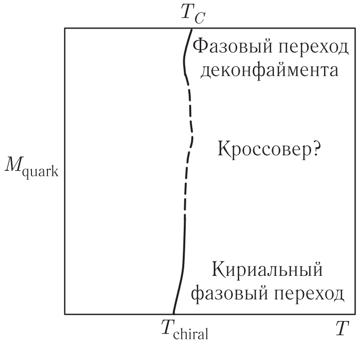


Рис. 18

сопровождающийся скачками в физических величинах. При промежуточных значениях кварковых масс, вероятно, происходит быстрый кроссовер, но не фазовый переход.

По-видимому, в реальном мире массы кварков таковы, что переход ближе к кроссоверу, чем к фазовому переходу.

2.13.2. Что такое конденсат цветового стекла (CGC)? Конденсат цветового стекла — новая форма ядерной материи, определяющая свойства сильных взаимодействий при очень высоких энергиях. Она универсальна и не зависит от конкретного состояния адрона. Она должна описывать сечения при высоких энергиях, распределения рожденных частиц, распределения составляющих адрона при малых x, а также начальные условия в столкновениях тяжелых ионов.

Именно вследствие своей универсальности эта форма ядерной материи вызывает фундаментальный интерес.

При высоких энергиях в волновую функцию адрона дают вклад глюоны, кварки и антикварки с энергиями от энергий адрона до $E \sim 200$ МэВ — массы легчайшего адрона.

Удобной переменной для описания составляющих адрона является

$$x = \frac{E_{\text{constituent}}}{E_{\text{hadron}}}. \tag{324}$$

Очевидно, чем больше энергия рассматриваемого адрона, тем меньше x для его составляющих. Иногда удобно выбрать быстроту составляющих адрона $y \sim \ln(1/x)$.

Плотность партонов при малых x:

$$\frac{dN}{dy} = xG(x, Q^2). \tag{325}$$

В этом выражении введен масштаб Q^2, поскольку число составляющих адрона зависит от «разрешения», с которым мы «рассматриваем» адрон. Отметим, что масштаб разрешения обратно пропорционален импульсу пробника, которым обычно является виртуальный фотон. Примерный график зависимости $xG(x, Q^2)$ для глюонов в протоне при различных x и Q^2, измеренный на ускорителе HERA, показан на рис. 19.

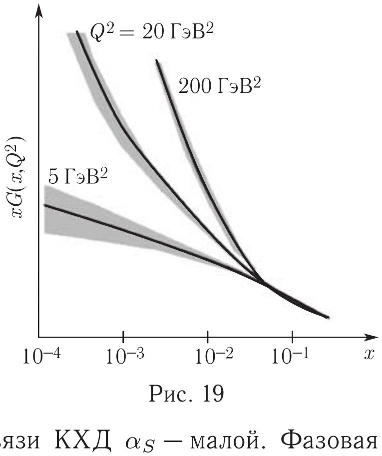


Рис. 19

Видно, что глюонная плотность быстро растет при малых x. Это так называемая проблема малых x. Действительно, плотность глюонов с малыми импульсами растет с ростом энергии адрона (рис. 20).

Если плотность глюонов на единицу площади и единицу быстроты возрастает, характерное поперечное расстояние между глюонами уменьшается. Это означает, что ядерная материя при высоких энергиях становится очень плотной, а константа связи КХД α_S — малой. Фазовая плотность таких глюонов определяется оценкой

$$\rho \simeq \frac{1}{\pi R^2}\frac{dN}{dp_\perp^2} \sim \frac{1}{\alpha_S}. \tag{326}$$

При этом глюоны интенсивно взаимодействуют между собой. Эта ситуация напоминает явление Бозе-конденсации, в котором нестабильность пропорциональна плот-

ности ρ и компенсируется взаимодействиями, пропорциональными $\alpha_S \rho^2$, и которые становятся одного порядка при $\rho \sim 1/\alpha_S$. Таким образом, такую глюонную материю можно рассматривать как цветовой конденсат.

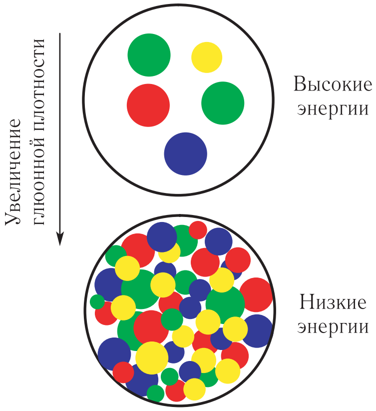


Рис. 20

«Стекольное» происхождение CGC означает, что конденсатные поля генерируются составляющими протона с большими импульсами. Эти высокоэнергетичные составляющие имеют характерные временные масштабы, Лоренц-сжатые по сравнению с собственными временами. Поэтому поля, ассоциированные с конституентами малых импульсов, изменяются на больших временных масштабах. Чем меньше импульс конституента, тем ближе он по своим свойствам к стеклу: времена их эволюции гораздо больше «естественных» масштабов времен.

Имеется другой типичный масштаб, приписываемый CGC — импульс насыщения. Это масштаб импульсов, на котором фазовая плотность глюонов $\rho \leq 1/\alpha_S$. При очень больших импульсах поля CGC можно рассматривать как классические поля, подобно электрическим и магнитным полям. Поскольку поля CGC соответствуют быстро движущимся партонам, они плоскополяризованы, с взаимно-перпендикулярными цветовыми электрическими и магнитными полями, и перпендикулярными направлению движения адронов.

2.13.3. Почему CGC важен? Подобно тому, как ядра и электроны входят в состав атомов, нуклоны при высоких энергиях включают CGC-поля как фундаментальные поля. CGC имеет потенциал, способный из первых принципов объяснить свойства адронной (ядерной) материи при высоких энергиях. Например, рост полного сечения протон-протонного взаимодействия с энергией. CGC — это квантовомеханическое состояние, описывающее ядро. На ранних стадиях ядро-ядерных столкновений ядерная материя не слишком «уходит» от этих состояний. Таким образом, CGC «реализует» начальные условия для формирования кварк-глюонной плазмы в ядро-ядерных взаимодействиях. Пространственно-временная картина ядро-ядерных взаимодействий показана на рис. 21. При очень малых временах CGC эволюционирует в распределение глюонов. Позже эти глюоны термализуются и формируют кварк-глюонную плазму. Еще позже возможно формирование смешанной фазы и фазы адронного газа.

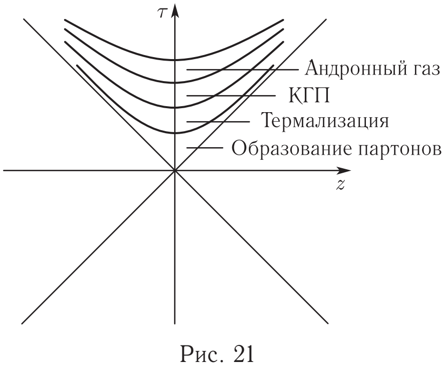


Рис. 21

2.13.4. Ультрарелятивистские ядерные столкновения. Столкновение тяжелых ионов при ультрарелятивистских энергиях можно рассматривать как столкновение двух «листов» цветовых стекол (рис. 22).

При этом происходит «таяние» цветовых стекол, возникают кварки и глюоны. Эти кварки и глюоны в собственной системе отсчета формируют характерный микроскопический временной масштаб. Для насыщенного цветового стекла этот временной масштаб имеет порядок обратной величины импульса насыщения в системе покоя

рожденной частицы (кварка или глюона). Если частица имеет большой импульс вдоль оси пучка, это время замедляется за счет релятивистских эффектов. Это означает, что сначала рождаются медленные частицы вблизи области взаимодействия, а быстрые частицы рождаются позже и уже вне области взаимодействия.

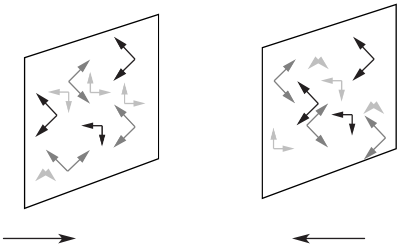


Рис. 22

Эта корреляция между пространственной координатой и импульсом напоминает поведение материи при хаббловском расширении в космологии. Как известно, Вселенная расширяется. Подобное происходит и при столкновениях ядер. Но если система расширяется, происходит охлаждение. Если рожденные кварки и глюоны в некоторый момент времени термализуются, то КГП при расширении остывает, переходит в смешанное состояние (если фазовый переход первого рода), и, наконец, в газ адронов, распадающийся на невзаимодействующие частицы, попадающие в детектор.

Прежде чем приступить к изучению свойств адронов при высоких энергиях, введем удобные кинематические переменные. Определим импульс на световом конусе:

$$p^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E \pm p_z) \tag{327}$$

и координату

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \pm z). \tag{328}$$

Тогда

$$p \cdot x = p^+ x^- + p^- x^+ - p_\perp x_\perp. \tag{329}$$

Сопряженными переменными являются $x^{\pm}$ и $p^{\mp}$. Квадрат 4-импульса

$$p^2 = 2p^+ p^- - p_\perp^2 = M^2, \tag{330}$$

а принцип неопределенности

$$\Delta x^{\pm} \Delta p^{\mp} \geq 1. \tag{331}$$

Причина, почему переменные светового конуса являются удобными, состоит в том, что при высоких энергиях частица, движущаяся налево, имеет $p_z \sim E$, поэтому $p^+ \sim \sqrt{2}E$, но $p^- \sim m_\perp^2/p_z \simeq 0$. Для частиц, движущихся направо, p^- — большой, а p^+ очень мал. При Лоренц-преобразованиях вдоль оси сталкивающихся пучков переменные светового конуса просто умножаются на константу. Поэтому отношение импульсов на световом конусе инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Доля импульса на световом конусе составляет $x = p_i^+/P^+$, где P^+ — импульс адрона, p_i^+ — импульс конституента в адроне. Очевидно, что $0 \leq x \leq 1$. Таким образом, x — бьеркеновская переменная, для быстро движущегося адрона она практически совпадает с фейнмановской переменной $x_{\text{Feynman}} = E_i/E$. Заметим, что именно переменную x используют для описания глубоконеупругого рассеяния. В этом случае индекс i соответствует кварку или глюону. Иногда удобно ввести также переменную быстроты:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p_i^+}{p_i^-} \sim \ln \frac{2E_i}{M_\perp}. \tag{332}$$

Если не учитывать массы частиц, то быстрота изменяется в интервале $-y_{\text{project.}} < y < y_{\text{project.}}$.

В адронных взаимодействиях, в основном, рождаются легкие частицы (пионы). Их распределения по быстротам при различных энергиях столкновения дают важную информацию о динамике столкновений адронов. На рис. 23 изображено распределение пионов по быстроте при двух различных энергиях.

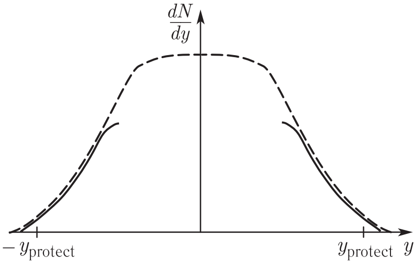


Рис. 23

Замечательно, что за исключением самых медленных частиц в системе центра масс ($y \simeq 0$), распределения практически идентичны. Можно сказать, что при переходе к большим энергиям добавляются новые степени свободы в области малых x адронной волновой функции. При низких энергиях эти степени свободы кинематически несущественны. С другой стороны, при переходе к большим энергиям «быстрые» степени свободы адрона остаются неизменными. Поэтому для анализа степеней свободы можно использовать аппарат ренорм-группы. Так как при переходе к высоким энергиям импульсы «быстрых» степеней свободы фиксированы, то по ним можно проинтегрировать. При этом можно получить эффективное действие для степеней свободы с малыми импульсами.

Распределение глюонов в адроне показано на рис. 24, где использована переменная $y = y_{\text{адр.}} - \ln(1/x)$. Это распределение напоминает распределение вторичных пионов, но только для положительных быстрот. Существенная разница в том, что на рис. 24 изображено распределение конституентов адрона.

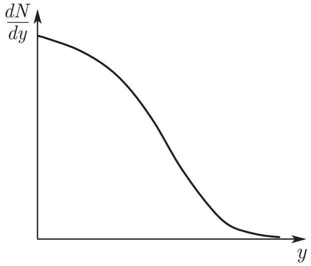


Рис. 24

В пределе высоких энергий, как уже обсуждалось выше, плотность глюонов быстро возрастает. Введем следующий фактор плотности партонов:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\pi R^2}\frac{dN}{dy}. \tag{333}$$

Определим импульс насыщения $Q^2_{\text{sat}} \sim \alpha_S \Lambda^2$ — это типичный импульс частиц в системе с большой плотностью. Заметим, что $\alpha_S \ll 1$ на масштабе насыщения. При этом характерный поперечный импульс $p^2_\perp \sim Q^2_{\text{sat}} \gg 1/R^2_{\text{адр.}}$. Поэтому распределение партонов, как слабовзаимодействующей системы, локализовано в поперечной плоскости. Партоны с большими импульсами несут степени свободы, которые должны быть «заморожены», и их можно рассматривать локализованными на бесконечно тонком «листе». Если мы изучаем систему с масштабом разрешения $\Delta x \ll 1/\Lambda_{\text{КХД}}$, то можно использовать методы теории возмущений.

Перепишем определение быстроты

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{p^+}{p^-} = \ln\frac{2p^+}{M_\perp} = \ln\frac{2p^+_{\text{адр.}}}{M_\perp} + \ln\frac{p^+}{p^+_{\text{адр.}}} = y_{\text{адр.}} - \ln\frac{1}{x}. \tag{334}$$

В этом выражении $M_\perp$ — поперечная масса частицы, причем мы пренебрегли в (334) общим сдвигом порядка единицы. Часто используется и быстрота в координатном пространстве. Если $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$, то

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{x^+}{x^-} = \ln\frac{2\tau}{x^-}. \tag{335}$$

Выбирая $\tau \sim 1/M_\perp$ и используя принцип неопределенности $x^\pm \sim 1/p^\pm$, получаем, что координатные и импульсные представления быстроты одинаковы.

Если представить распределение составляющих в адроне в терминах быстроты, то в продольном направлении «лист» будет иметь некоторое протяжение (рис. 25).

Положение частицы вдоль оси z скоррелированно с продольным импульсом. Наиболее быстрые частицы имеют наибольшие быстроты. В обычном координатном пространстве самые быстрые частицы подвержены наибольшим Лоренц-сдвигам. Если «заглянуть» внутрь трубки с поперечным размером $\Delta x \ll 1/\Lambda_{\text{КХД}}$, то обнаружим случайным образом распределенные составляющие адрона. Очевидно, что цветовой заряд трубки случаен. И только если поперечный радиус трубки возрастает, могут возникнуть цветовые корреляции. Если энергия адрона велика, т. е. доступны очень малые x, то в каждой трубке размером Δx будет сосредоточен достаточно большой цветовой заряд, и цветовой заряд можно описывать на классическом уровне. Этому описанию соответствует картина классических источников случайных зарядов на «тонком листе». Соответствующие токи

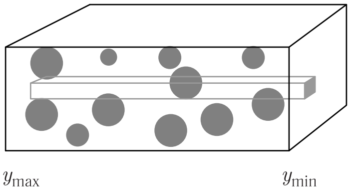


Рис. 25

$$J_a^\mu = \delta^{\mu+}\delta(x^-)\rho_a(x_\perp). \tag{336}$$

Приближение δ-функции в (336) — весьма неплохое для многих целей, но иногда нужно учесть и продольную структуру

$$J_a^\mu = \delta^{\mu+}\rho_a(y, x_\perp), \tag{337}$$

а также то, что носитель источника имеет большую быстроту y.

Конденсат цветового стекла описывается интегралом по путям

$$\int [dA][d\rho]\exp\bigl[iS[A,\rho] - W(\rho)\bigr], \tag{338}$$

где $S[A,\rho]$ — действие Янга–Миллса в присутствие источников (336) и (337).

Функция W обозначает веса различных конфигураций цветового заряда. В простейшей версии CGC функция W выбирается в виде гауссиана

$$W = \frac{1}{2}\int dy\, d^2x_\perp \frac{\rho^2(y, x_\perp)}{\mu^2(y)}. \tag{339}$$

В этом приближении $\mu^2(y)$ — плотность цветового заряда на единицу площади и единицу быстроты, умноженная на цветовой фактор $(1/N_C^2 - 1)$. Теорию можно обобщить и на менее тривиальные формы весовой функции. Формула (339) применима при малых поперечных разрешениях $\Delta x \ll 1/Q_{\text{sat}}$. С увеличением поперечного разрешения нужно «лучше» определять вид весовой функции W. Оказывается, что для масштабов разрешения $1/Q_{\text{sat}} \ll \Delta x \ll 1/\Lambda_{\text{КХД}}$ гауссова форма (339) вполне приемлема.

При усреднении по быстрым компонентам (внешним полям) теория CGC напоминает теорию спиновых стекол. Решение классических уравнений движения дает для напряженностей глюонных полей $F^2 \sim 1/\alpha$, т. е. взаимодействие глюонных полей очень сильное, а их числа заполнения — большие, поэтому и говорят о конденсате.

Рассматриваемая модель CGC имеет обрезание по продольному импульсу. Частицы с импульсом, большим импульса обрезания, трактуются как источники, с меньшими — как поля. При вычислении физических величин сначала вычисляются

классические поля, а затем производится усреднение по источникам ρ. Это хорошее приближение, если продольный импульс в секторе полей не слишком меньше обрезания по продольному импульсу Λ^+. С учетом квантовых поправок параметром разложения является

$$\alpha_S \ln \frac{\Lambda^+}{p^+}. \tag{340}$$

Чтобы определить теорию при меньших параметрах обрезания $\overline{\Lambda}^+$, нужно, чтобы выполнялось условие $\alpha_S \ln(\Lambda^+/\overline{\Lambda}^+) \ll 1$. При этом теория воспроизводит ту же структуру, но на других масштабах. Именно такие теории способен описывать подход, основанный на ренорм-групповом анализе. Форма классических полей может быть легко установлена. Слева и справа от «листа», на котором они локализованы, поля обращаются в ноль. Они не зависят от времени, и в калибровке светового конуса $A^+ = 0$. Желательно, чтобы поля были поперечными. В силу непрерывности $F^{ij} = 0$, при этом $F^{i-} = 0$, поскольку F^{i-} не зависит от временной переменной светового конуса x^+ и предположения $A^- = 0$. $F^{i+} \sim \delta(x^-)$ вследствие изменения x^- при пересечении листа. Это означает, что $F^{i0} \sim -F^{iz}$ или $E \perp B \perp \vec{z}$, т. е. поля действительно поперечные. Эти поля, называемые полями Вайцзеккера–Вильямса, являются случайными полями в двумерной плоскости, поскольку их источники случайны.

2.13.5. Глюонные распределения и насыщение. Функция распределения глюонов задается вакуумным средним от операторов $\langle a^+(p)a(p)\rangle$ чисел заполнения, и ее можно определить, вычислив вакуумные средние от глюонных полей $\langle A(p)A(-p)\rangle$. При больших $p_\perp$ функция распределения

$$\frac{dN}{dyd^2p_\perp} \sim \frac{1}{\alpha_S}\frac{Q_{\text{sat}}^2}{p_\perp^2} \tag{341}$$

имеет вид, типичный для тормозного излучения. При малых $p_\perp$:

$$\frac{dN}{dyd^2p_\perp} \sim \frac{1}{\alpha_S}\ln\frac{Q_{\text{sat}}^2}{p_\perp^2}. \tag{342}$$

Причину более мягкого поведения при малых $p_\perp$ легко понять. На малых расстояниях, соответствующих большим $p_\perp$, заряды оказываются точечными. При малых $p_\perp$ заряды экранируют друг друга, приводя к продольной форме полей.

Очевидно, что Q_{sat}^2 может расти при увеличении энергии. Действительно, степени свободы с малыми импульсами (ниже масштаба насыщения) растут очень медленно $\sim \ln Q_{\text{sat}}^2$, поскольку глюонное отталкивание препятствует более быстрому росту. С другой стороны, всегда можно добавить глюоны с большими импульсами, поскольку «пространство» быстрых глюонов не заполнено. Как это согласуется с унитарностью? Унитарность ограничивает поведение сечений при фиксированных Q^2. Если $Q^2 > Q_{\text{sat}}^2$, то глюонная функция распределения быстро растет $\sim Q_{\text{sat}}^2$ при увеличении энергии. С другой стороны, если $Q_{\text{sat}}^2 > Q^2$, то число глюонов

$$xG(x,Q^2) \sim \pi R^2 \int\limits_0^{Q^2} d^2p_\perp \frac{dN}{dydp_\perp} \tag{343}$$

изменяется лишь логарифмически. При этом число глюонов пропорционально площади поперечного сечения.

2.13.6. Столкновения адронов. На рис. 22 столкновение адронов представлено как столкновение двух листов цветовых стекол. До столкновения адрон, движущийся слева, нес следующие поля:

$$\begin{aligned} F^{i+} &\sim \delta(x^-), \\ F^{ij} &\sim 0, \\ F^{i-} &\sim 0, \end{aligned} \tag{344}$$

а для адрона, движущегося справа

$$\begin{aligned} F^{i-} &\sim \delta(x^+), \\ F^{ij} &\sim 0, \\ F^{i+} &\sim 0. \end{aligned} \tag{345}$$

Будем рассматривать центральные столкновения адронов.

Все поля плоскополяризованы и имеют случайные цветовые состояния. Можно найти решения классических уравнений Янга–Миллса, требуя, чтобы поля являлись двумерными калибровочными преобразованиями вакуумных полей везде, за исключением переднего светового конуса. В центре светового конуса при $t = z = 0$ уравнения сингулярны, и глобальное решение требует, чтобы поля переносили энергию и импульс в передний световой конус. На очень малых временах эти поля нелинейны, и только за времена $\tau \sim 1/Q_{\text{sat}}$ они линеаризуются. Только после их линеаризации можно говорить о классическом поле излучения.

Эта ситуация заметно отличается от случая квантовой электродинамики. Из-за самовзаимодействия глюонов оказывается возможным превращение энергии исходного ядра в излучение. В квантовой электродинамике заряженные частицы — фермионы, и их нельзя рассматривать на классическом уровне. Излучение возникает вследствие аннигиляции или тормозного излучения.

Решение полевого уравнения в переднем световом конусе инвариантно относительно сдвигов в интервале быстрот $\Delta y \ll 1/\alpha_S$. При больших импульсах полевые уравнения решаются по теории возмущений, и распределение имеет характерный тормозной спектр

$$\frac{dN}{dyd^2p_\perp} \sim \frac{1}{\alpha_S}\pi R^2 \frac{Q_{\text{sat}}^4}{p_\perp^4}. \tag{346}$$

Одной из проблем множественного рождения является вычисление полной множественности рожденных глюонов. В CGC эта проблема решаема. При $p_\perp \leq Q_{\text{sat}}$ становятся существенными нелинейные эффекты и рост $\sim 1/p_\perp^4$ прекращается:

$$\frac{dN}{dyd^2p_\perp} \sim \frac{1}{\alpha_S}\pi R^2. \tag{347}$$

Тогда полная множественность глюонов

$$N \sim \frac{1}{\alpha_S}\pi R^2 Q_{\text{sat}}^2. \tag{348}$$

Если $Q_{\text{sat}}^2 \sim A^{1/3}$, то полная множественность $\sim A$. Дифференциальная множественность при больших $p_\perp$ растет $\sim A^{4/3}$, как можно ожидать для жестких некогерентных процессов. При малых $p_\perp$ дифференциальная множественность растет $\sim A^{2/3}$, поскольку эти частицы возникают в результате излучения «черных» дисков, т. е. только с поверхности.

На рис. 26 показаны различные кинематические области рождения глюонов. В столкновениях тяжелых ионов медленные частицы возникают как вблизи точки столкновения, так и на более поздних этапах. Таким образом, возникает градиент в начальном распределении материи, при этом сопутствующий элемент объема расширяется $\sim 1/\tau$, где τ — собственное время этого элемента. Чтобы понять наличие фактора $\sim 1/\tau$, заметим, что $dN/dz = (dN/dy)(dy/dz) = (dN/dy)(1/t)$. При этом мы воспользовались определением пространственно-временной быстроты, и оценка произведена при $z = 0$. Это физическая система покоя для $z = 0$.

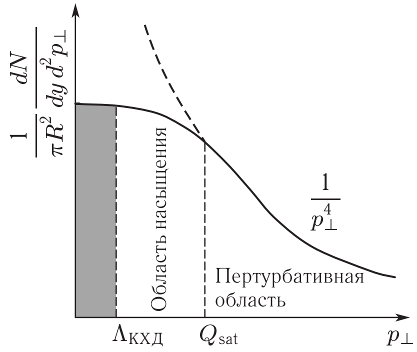


Рис. 26

Если энтропия сохраняется, как в случае термализованной системы со временем расширения, меньшим времени столкновения

$$S \sim T^3 \tau R^2, \tag{349}$$

то при фиксированном S выполняется $T \sim \tau^{-1/3}$. Поэтому для термализованной системы плотность энергии $\sim \tau^{-4/3}$ уменьшается до тех пор, пока не прекратятся все перерассеяния и поперечные импульсы не перестанут изменяться.

При начальных условиях, типичных для CGC, создать термализацию очень непросто. На начальных стадиях столкновения типичные поперечные импульсы большие, порядка масштаба насыщения. На этих масштабах $\alpha_S(Q_{\rm sat}) \ll 1$. Чтобы оценить характерное время рассеяния, нужно знать плотность и среднюю длину пробега. На начальной стадии плотность пропорциональна поперечному размеру, деленному на время продольного расширения системы:

$$\rho = \frac{\langle p_\perp^2 \rangle}{\tau}. \tag{350}$$

С другой стороны, сечение $\sigma \sim \alpha_S^2(\ln \rho/\langle p_\perp^2 \rangle)$. Отметим, что логарифмическое обрезание возникает за счет дебаевского экранирования кулоновского сечения.

Для термализации необходимо, чтобы $\tau \gg \tau_{scat}$, так как τ — характеристическое время расширения. Тогда

$$\tau \geq \exp\left(\frac{c}{\alpha_S}\right)\frac{1}{Q_{\rm sat}}. \tag{351}$$

Как видно из этого соотношения, для слабосвязанной системы только за счет упругих столкновений термализация не происходит. Термализация, если она происходит, осуществляется за счет неупругих столкновений.

Система начинает эволюционировать с характерными $p_\perp \sim Q_{\rm sat}$, при этом константа связи мала, и система не может термализоваться за счет упругих рассеяний. Система расширяется и становится достаточно разреженной по сравнению с характерной плотностью, связанной с масштабом поперечных импульсов $\sim p_\perp^3$. В такой системе длина дебаевского экранирования велика. Сечение многоглюонных процессов расходится пропорционально дебаевской длине, в то время как сечения упругих процессов расходятся как логарифм этой длины. Поэтому, если дебаевская длина становится $\sim 1/\alpha_S$, то многоглюонное рождение более важно, чем упругое рассеяние. Это реализуется на масштабах времен $\tau \sim 1/(\alpha_S Q_{\rm sat})$. Современные оценки времени термализации для условий RHIC дают значения в интервале 0,3 фм $< \tau <$ 3 фм.

2.13.7. Экспериментальные свидетельства в пользу существования конденсата цветового стекла. В этом разделе будут рассмотрены данные HERA и RHIC, свидетельствующие в пользу гипотезы конденсата цветового стекла.

1. *Геометрический скейлинг.* Экспериментально установлено, что сечение глубоконеупругого рассеяния виртуального фотона на протоне, которое зависит от Q^2 и x, на самом деле является функцией от отношения Q^2/Q^2_{sat}:

$$\sigma^{\gamma^* p} \sim F\left(\frac{Q^2}{Q^2_{\text{sat}}}\right), \tag{352}$$

где импульс насыщения

$$Q^2_{\text{sat}} \sim \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\lambda} \text{ ГэВ}^2 \tag{353}$$

и $\lambda \simeq 0{,}3$ и $x \sim 10^{-4}$.

Скейлинговое поведение справедливо для $x \leq 10^{-2}$ и всех имеющихся экспериментальных данных по Q^2.

Легко понять, почему этот скейлинг справедлив для $Q^2 < Q^2_{\text{sat}}$. Это область конденсата цветового стекла; имеется только один размерный параметр, характеризующий систему — масштаб насыщения.

2. *Качественное описание полных адронных сечений.* Как известно, упругие и полные сечения слабо изменяются с энергий $\sim \ln^2 E$. Чтобы понять это поведение, представим себе, что с помощью некоторого пробника мы пытаемся проникнуть внутрь адрона. Сечение определяется прицельным параметром, при котором адрон становится непрозрачным. Как ожидается, при фиксированном x распределение материи по прицельному параметру при больших b ведет себя $\sim e^{-2m_\pi b}$.

При фиксированном прицельном параметре число глюонов растет $\sim (x_0/x)^\lambda$.

Полагая

$$\left(\frac{x_0}{x_{\min}}\right)^{\lambda} e^{-2m_\pi b} \sim 1, \tag{354}$$

получаем

$$\sigma \sim b^2 \sim \ln^2 \frac{1}{x_{\min}} \sim \ln^2 E. \tag{355}$$

В выражении (355) $x_{\min}$ — минимально достижимое x при заданной энергии E: $x_{\min} \sim \Lambda_{\text{КХД}}/E$.

Выражение (355) позволяет качественно понять наблюдаемую зависимость от энергии полных адронных сечений.

3. *Множественность андронов.* Конденсат цветового стекла дает возможность вычисления множественности в адронных и ион-ионных столкновениях.

С учетом рождения струй адронов, полная множественность в инфракрасной области расходится. Это следствие зависимости $\sim 1/p_\perp^4$ для рождения глюона в теории возмущений:

$$\frac{1}{\pi R^2}\frac{dN}{dy d^2 p_\perp} \sim \frac{1}{\alpha_S}\frac{Q^4_{\text{sat}}}{p_\perp^4}. \tag{356}$$

Для конденсата цветового стекла при $p_\perp < Q_{\text{sat}}$ формула (356) модифицируется следующим образом:

$$\frac{1}{\pi R^2}\frac{dN}{dy} \sim \frac{1}{\alpha_S} Q^2_{\text{sat}}. \tag{357}$$

В модели конденсата цветового стекла коэффициент пропорциональности в выражении (357) вычисляется, и полученные данные на RHIC хорошо согласуются с предсказаниями (357).

Приложение 1. Сечение трехструйных событий в e^+e^--аннигиляции в адроны

Найдем в α_S порядке сечение

$$e^+e^- \to q\bar{q}g. \tag{1}$$

Для этого выберем глюонный пропагатор в фейнмановской калибровке:

$$S_{ab}^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}\delta_{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \tag{2}$$

и будем считать кварки и лептоны безмассовыми.

Фейнмановская амплитуда процесса

$$\begin{gathered} M = M_a + M_b = -ie^2 g t_a \overline{v}'_r(l')\gamma_\mu u_r(l)\frac{g_{\mu\nu}}{s+i\varepsilon}\overline{u}_s(p), \\ \left(\gamma_\rho \frac{\widehat{p}+\widehat{k}}{(p+k)^2}\gamma_\nu - \gamma_\nu \frac{\widehat{p}'+\widehat{k}}{(p'+k)^2}\gamma_\rho\right) v'_s(p')\varepsilon^\rho_{ah}(k), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\widehat{p} = \gamma_\mu p_\mu$, $s = q^2$, $q = l + l'$ и l, l' — 4-импульсы электрона и позитрона. Далее нужно взять квадрат модуля амплитуды, усреднить по спиральностям начальных частиц, просуммировать по спиральностям и поляризациям частиц в конечном состоянии:

$$\frac{1}{4}\sum_{rr'ss'h} |M|^2, \tag{4}$$

используя при этом формулы

$$\sum_r u_r(p)\overline{u}_r(p) = \widehat{p}, \quad \sum_r v_r(p')\overline{v}_r(p') = \widehat{p}', \quad \sum_h \varepsilon_{h\mu}(k)\varepsilon_{h\nu}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{5}$$

Заметим, что член $k_\mu k_\nu/k^2$ в фотонной сумме по поляризациям вклада не дает, поскольку диаграмма КЭД-типа.

Следующий шаг — учесть фазовый объем конечных состояний

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \tag{6}$$

и фактор нормировки в начальном состоянии

$$\frac{1}{2l_0}\frac{1}{2l'_0} = \frac{1}{4E_b^2}, \tag{7}$$

а также δ-функцию, сохраняющую 4-мерный импульс,

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(q - p - p' - k) \tag{8}$$

и разделить на относительную скорость v_{rel} e^+e^--пары в системе центра масс:

$$v_{\text{rel}} = \frac{ll'}{l_0 l'_0} = 2. \tag{9}$$

При этом две частицы двигаются в противоположных направлениях практически со скоростью света. Тогда

$$d\sigma = \frac{1}{2^{13}\pi^5 E_b^2}\sum_{rr'ss'h}|M|^2\delta^{(4)}(q-p-p'-k)\frac{d^3p}{p_0}\frac{d^3p'}{p'_0}\frac{d^3k}{k_0} = -\frac{C_F e^4 g^2}{2^{13}\pi^5}\frac{1}{E_b^2 s^2}L_{\mu\nu}(l,q)T^{\mu\nu}(q), \tag{10}$$

где лептонный и адронный тензоры

$$L_{\mu\nu}(l,q) = \operatorname{tr}\left[\widehat{l}\gamma_\mu \widehat{l'}\gamma_\nu\right],$$
$$T_{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^3p}{p_0}\frac{d^3p'}{p'_0}\frac{d^3k}{k_0}\delta^{(4)}(p+p'+k-q)H_{\mu\nu}(p,p',k), \tag{11}$$

$$H_{\mu\nu} = \operatorname{tr}\left[\widehat{p}\left(\gamma_\rho\frac{\widehat{p}+\widehat{k}}{(p+k)^2}\gamma_\mu - \gamma_\mu\frac{\widehat{p'}+\widehat{k}}{(p'+k)^2}\gamma_\rho\right)\widehat{p'}(\gamma_\nu\frac{\widehat{p}+\widehat{k}}{(p+k)^2}\gamma^\rho - \gamma^\rho\frac{\widehat{p'}+\widehat{k}}{(p'+k)^2}\gamma_\nu)\right]. \tag{12}$$

Эти тензоры симметричны относительно перестановок импульсов с индексами μ и ν, вследствие сохранения электромагнитного тока поперечны по отношению к q_μ:

$$q_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad q_\mu L^{\mu\nu} = 0. \tag{13}$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ можно параметризовать следующим образом

$$T^{\mu\nu}(q) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)T(q^2), \tag{14}$$

так что

$$T(q^2) = \frac{1}{3}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}(q). \tag{15}$$

Свертка тензоров дает

$$L_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{3}g^{\mu\nu}L_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma} = -\frac{4}{3}q^2 g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}. \tag{16}$$

Тензоры можно «расщепить» с помощью проектора $g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}/3$, поэтому нужно вычислить лишь свертку

$$g^{\mu\nu}H_{\mu\nu}(p,p',k) = \operatorname{tr}\left[\widehat{p}(\gamma_\rho\frac{\widehat{q}-\widehat{p'}}{(q-p')^2}\gamma_\mu - \gamma_\mu\frac{\widehat{q}-\widehat{p}}{(q-p)^2}\gamma_\rho)\widehat{p'}(\gamma^\mu\frac{\widehat{q}-\widehat{p'}}{(q-p')^2}\gamma^\rho - \gamma^\rho\frac{\widehat{q}-\widehat{p}}{(q-p)^2}\gamma^\mu)\right]. \tag{17}$$

С помощью δ-функции имеем

$$p+k = q-p',$$
$$p'+k = q-p. \tag{18}$$

Тогда

$$g^{\mu\nu}H_{\mu\nu}(p,p',q-p-p') = \frac{X_{11}}{((q-p')^2)^2} + \frac{X_{12}}{(q-p)^2(q-p')^2} + \frac{X_{21}}{(q-p)^2(q-p')^2} + \frac{X_{22}}{((q-p)^2)^2}, \tag{19}$$

где

$$X_{11} = \operatorname{tr}\left[\widehat{p}\gamma_\rho(\widehat{q}-\widehat{p'})\gamma_\mu\widehat{p'}\gamma^\mu(\widehat{q}-\widehat{p'})\gamma^\rho\right],$$
$$X_{12} = -\operatorname{tr}\left[\widehat{p}\gamma_\rho(\widehat{q}-\widehat{p'})\gamma_\mu\widehat{p'}\gamma^\rho(\widehat{q}-\widehat{p})\gamma^\mu\right],$$
$$X_{21} = -\operatorname{tr}\left[\widehat{p}\gamma_\mu(\widehat{q}-\widehat{p})\gamma_\rho\widehat{p'}\gamma^\mu(\widehat{q}-\widehat{p'})\gamma^\rho\right],$$
$$X_{22} = \operatorname{tr}\left[\widehat{p}\gamma_\mu(\widehat{q}-\widehat{p})\gamma_\rho\widehat{p'}\gamma^\rho(\widehat{q}-\widehat{p})\gamma^\mu\right]. \tag{20}$$

Вычисление этих величин дает

$$X_{11} = 4\operatorname{tr}\left[\widehat{p}(\widehat{q}-\widehat{p'})\widehat{p'}(\widehat{q}-\widehat{p'})\right] = 4\operatorname{tr}\left[\widehat{p}\widehat{q}\widehat{p'}\widehat{q}\right] = 16(2(p\cdot q)(p'\cdot q) - q^2(p\cdot p')),$$
$$X_{12} = 2\operatorname{tr}\left[\widehat{p}\gamma_\rho(\widehat{q}-\widehat{p'})(\widehat{q}-\widehat{p})\gamma^\rho\widehat{p'}\right] = 8(q-p)(q-p')\operatorname{tr}\left[\widehat{p}\widehat{p'}\right] = 32(p\cdot p')(q-p)(q-p'),$$
$$X_{21} = X_{12}, \quad X_{22} = X_{11}, \tag{21}$$

причем использованы тождества

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma^\mu &= -2\gamma_\rho,\\ \mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] &= 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}-g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}),\\ \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu &= -2\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\alpha.\end{aligned} \tag{22}$$

Суммируя все члены, получаем

$$g^{\mu\nu}H_{\mu\nu} = 16\big(2(p\cdot q)(p'\cdot q)-q^2(p\cdot p')\big)\left[\frac{1}{(q-p)^4}+\frac{1}{(q'-p)^4}\right]+\frac{64(p\cdot p')(q-p)(q-p')}{(q-p)^2(q-p')^2}. \tag{23}$$

Теперь следует выполнить интегрирование в системе центра масс, где

$$\vec{q}=0. \tag{24}$$

Сначала интегрируем $\delta^{(3)}(\vec{p}+\vec{p'}+k)$ по 3-импульсу глюона, что дает

$$\vec{k}=-\vec{p}-\vec{p'}, \tag{25}$$

поэтому

$$k_0 = |\vec{p}+\vec{p'}| = \sqrt{p_0^2+{p_0'}^2+2p_0p_0'\cos\theta_{q\bar{q}}}. \tag{26}$$

Выберем систему отсчета таким образом, чтобы вектор $\vec{p}$ был направлен вдоль оси z и проинтегрируем по полярному углу вектора $\vec{p'}$:

$$\frac{d^3p'}{p_0'} = p_0'\,dp_0'\,d\cos\theta'\,d\phi'. \tag{27}$$

Учет сохраняющей энергию δ-функции $\delta(k_0+p_0+p_0'-q_0)$ дает

$$\int\frac{p_0\,dp_0\,d\Omega p_0'\,dp_0'\,d\phi'\,d\cos\theta'}{k_0}\delta(q_0-p_0-p_0'-k_0)g_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = \int dp_0\,d\Omega\,dp_0'\,d\phi' g_{\mu\nu}H^{\mu\nu}, \tag{28}$$

поскольку

$$\left[\frac{\partial k_0}{\partial\cos\theta'}\right]^{-1} = \frac{k_0}{p_0p_0'}. \tag{29}$$

Интегрирование по $d\Omega d\phi'$ тривиально и дает фактор $8\pi^2$:

$$\int dp_0\,dp_0'\,d\Omega\,d\phi' g_{\mu\nu}H^{\mu\nu} = 8\pi^2E_b^2\,dx_1\,dx_2 g_{\mu\nu}H^{\mu\nu}. \tag{30}$$

Выразим теперь адронный след (23) в терминах переменных x_1 и x_2. Для этого поделим числители и знаменатели (23) на E_b^4 и заменим скалярные произведения:

$$p\cdot q = 2x_1,\quad p\cdot q' = 2x_2,\quad q^2=4,\quad p\cdot p' = 2(x_1+x_2-1). \tag{31}$$

Тогда

$$g^{\mu\nu}H_{\mu\nu} = 8\left[\frac{1-x_1}{1-x_2}+\frac{1-x_2}{1-x_1}+\frac{2(x_1+x_2-1)}{(1-x_1)(1-x_2)}\right] = 8\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}. \tag{32}$$

Собирая все слагаемые вместе, получаем окончательный результат для сечения:

$$d\sigma = \frac{2C_F}{3}\frac{\alpha^2\alpha_S}{s}dx_1\,dx_2\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}, \tag{33}$$

совпадающий с выражением (137) главы 2, умноженным на величину $\sigma_0 = \dfrac{4\pi}{3}\dfrac{\alpha^2}{s}$.

Приложение 2. Инстантоны и их роль в КХД

1. Инстантоны. Найдем нетривиальные решения классической теории Янга–Миллса в евклидовом пространстве с конечным действием. Эти решения играют важную роль в квантовой теории поля.

Сделаем замену $t \to -i\tau$, где τ — евклидово время. Тогда евклидово действие теории Янга–Миллса

$$S_E \equiv -iS_M(t=-i\tau) = \frac{1}{4g^2}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $d^4x = d^3x d\tau$, $F^a_{\mu\nu}$ — антисимметричный евклидов тензор, а величина S_E положительно определена.

Остановимся на рассмотрении полевых конфигураций с конечным евклидовым действием. Чтобы интеграл (1) сходился, необходимо достаточно быстрое убывание напряженности $F^a_{\mu\nu}$. Однако это не означает, что векторный потенциал A_μ обращается в ноль на бесконечности. Достаточно, чтобы A_μ был «чисто калибровочным» потенциалом

$$A_\mu = -i(\partial_\mu \Omega)\Omega^+, \tag{2}$$

для которого тензор $F_{\mu\nu}$ обращается в ноль на бесконечности. Вообще говоря, Ω и A_μ зависят от направления n_μ ($n^2_\mu = 1$), в котором достигается евклидова бесконечность. Матрица $\Omega(n_\mu)$ характеризует отображение трехмерной сферы S^3 на пространство группы. Пространство всех таких отображений представляет собой бесконечный набор изолированных компонент, причем таких, что отображения, относящиеся к различным компонентам, не могут быть непрерывным образом деформированы друг в друга. В математике такие компоненты называют гомотопическими классами. Для отображения $S^3 \to G$ эти классы характеризуются целыми числами n или топологическими зарядами. В математике это означает, что гомотопическая группа $\pi_3(G) = Z$, причем это свойство относится ко всем простым группам Ли.

Для примера рассмотрим группу $SU(2)$. Топологически $SU(2) \equiv S^3$, и мы имеем дело с отображением $S^3 \to S^3$. Тогда топологически нетривиальное отображение с $n = 1$ имеет вид

$$\Omega(n_\mu) \equiv \Omega_0(n_\mu) = n_0 + in_i\sigma_i, \tag{3}$$

где σ_i — матрицы Паули.

Соотношение (3) есть не что иное, как представление евклидовой сферы унитарными матрицами. Каждая $SU(2)$-матрица соответствует отдельной точке на S^3, т. е. степень отображения равна единице. Примером отображения с $n = -1$ служит $\Omega^+_0(n_\mu)$, а отображение с $n = 7 - \Omega^7_0(n_\mu)$ (семь различных точек n_μ на S^3 соответствуют одной и той же $SU(2)$-матрице).

Важно, что топологический заряд любого отображения можно выразить через интеграл по трехмерной сфере.

Прежде чем обратиться к четырехмерной теории, представляющей особый интерес, рассмотрим более простую модель: абелева калибровочная теория в 2-х евклидовых измерениях (модель Швингера). В этой модели конфигурации с конечным действием, стремящиеся к «чистой калибровке» на евклидовой бесконечности, имеют вид

$$\begin{gathered} A_\mu = -i(\partial_\mu \Omega)\Omega^+, \\ \Omega(x) = e^{i\chi(x)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Поле может зависеть от направления ϕ, вдоль которого достигается бесконечность. В этом случае $\Omega(\phi) = e^{i\alpha(\phi)}$ реализует отображение $S^1 \to U(1) \equiv S^1$, а топологический заряд — это число «намоток» n: $\pi_1[U(1)] = Z$. Для отображений с топологическим зарядом n имеем

$$a(\phi + 2\pi) = a(\phi) + 2\pi n. \tag{5}$$

Легко видеть, что n можно выразить через интеграл

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_\phi d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_C \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu d\sigma_\mu, \tag{6}$$

где $d\sigma_\mu$ — элемент длины протяженного контура C (не обязательно кругового цикла), умноженный на единичный вектор внешней нормали.

Напомним, что мы интересуемся конфигурациями калибровочного поля, определенными на двумерной плоскости. Тогда по теореме Гаусса получаем

$$n = \frac{1}{2\pi} \int\int d^2x \partial_\mu(\varepsilon_{\mu\nu} A_\nu) = \frac{1}{4\pi} \int\int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Квантование интеграла (7) связано с тем, что мы требуем, чтобы $\Omega(\phi)$ была однозначно определенной функцией, т. е. предполагаем компактность калибровочной группы. Это утверждение усиливается, если теория, помимо калибровочного поля A_μ, содержит заряженные поля. В чистой фотодинамике влияние калибровочного преобразования сводится к сдвигу A_μ на величину $\partial_\mu \chi$, т. е. компактность группы «не просматривается». Но заряженные поля при этом умножаются на экспоненциальный фактор $e^{i\chi} \in U(1)$. Условие квантования следует из того, что $e^{i\chi(x)}$ однозначно определено. Если перейти к стандартной нормировке A_μ, то интегралы (6) и (7) следует умножать на электрический заряд. Условие квантования (7) имеет то же происхождение, что и условие квантования магнитного потока в сверхпроводниках

$$\Phi = \frac{e}{2\pi} \int\int dx\, dy H_z(x, y). \tag{8}$$

Математики называют интеграл (7) первым классом Черна, а ток $j_\mu = 1/(2\pi)\varepsilon_{\mu\nu} A_\nu$ — током Черна–Саймона.

Эта математическая конструкция обобщается на расслоения любых пространств с четным числом измерений. Нас интересуют неабелевы расслоения четырехмерного пространства. Сформулируем сначала результат. Для несингулярных калибровочных полей, стремящихся на бесконечности к «чистой калибровке» (2), топологический заряд отображения $\Omega(n_\mu)$ выражается через интеграл (называемый вторым классом Черна или индексом Понтрягина)

$$n = \frac{1}{16\pi^2} \int d^n x \, \mathrm{tr}\{F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}\}, \tag{9}$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = (1/2)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$.

Чтобы понять этот результат, заметим, что подынтегральная функция в (9) является полной производной:

$$\frac{1}{16\pi^2} \mathrm{tr}\{F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}\} = \partial_\mu K_\mu = \partial_\mu \left[\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \,\mathrm{tr} \left\{ A_\nu \left(\partial_\alpha A_\beta - \frac{2i}{3} A_\alpha A_\beta \right) \right\} \right]. \tag{10}$$

По теореме Гаусса

$$n = \int_{S^3} d\sigma_\mu K_\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \int d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \,\mathrm{tr}\big\{(\partial_\nu \Omega)\Omega^+ (\partial_\alpha \Omega)\Omega^+ (\partial_\beta \Omega)\Omega^+\big\}, \tag{11}$$

где использованы асимптотическое свойство $F_{\alpha\beta} \to 0$ и форма (2) для A_μ. Если в (11) подставить отображение (3) с $n = 1$, то действительно получится тождество. В самом деле, подынтегральная функция в (11) инвариантна относительно левых или правых умножений $\Omega(x)$ на элемент группы $SU(2)$, т. е. просто является мерой Хаара на группе. При этом коэффициент выбран так, чтобы объем группы был нормирован на единицу. Интеграл (11) не изменяется, если одна параметризация деформируется в другую $\Omega(x) \to \omega_0(x)\Omega(x)$ таким образом, чтобы существовало непрерывное семейство калибровочных преобразований $\omega(\alpha, x)$ со свойствами: $\omega(0, x) = 1$, $\omega(1, x) = \omega_0(x)$.

Инстантоном является конфигурация с топологическим зарядом $n = 1$, минимизирующая действие. Построение такого решения классических уравнений движения можно разбить на несколько этапов. Прежде всего, заметим, что действие правомерно записать в виде

$$S = \frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\{F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\} = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\big\{(F_{\mu\nu} - \tilde F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} - \tilde F_{\mu\nu})\big\} +$$
$$+ \frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\big\{F_{\mu\nu}\tilde F_{\mu\nu}\big\} = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\big\{(F_{\mu\nu} - \tilde F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} - \tilde F_{\mu\nu})\big\} + \frac{8\pi^2 q}{g^2} \geq \frac{8\pi^2 q}{g^2}. \quad (12)$$

Таким образом, действие на любой полевой конфигурации с положительным n ограничено снизу величиной $8\pi^2 n/g^2$. Кроме того, минимум действия реализуется на самодуальных конфигурациях

$$F_{\mu\nu} = \tilde F_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Для конфигураций с отрицательными n действие

$$S = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\big\{(F_{\mu\nu} + \tilde F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} + \tilde F_{\mu\nu})\big\} - \frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\{F_{\mu\nu}\tilde F_{\mu\nu}\} =$$
$$= \frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\big\{(F_{\mu\nu} + \tilde F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} + \tilde F_{\mu\nu})\big\} - \frac{8\pi^2 q}{g^2} \geq \frac{8\pi^2 |q|}{g^2}. \quad (14)$$

При этом минимум соответствует антисамодуальным конфигурациям

$$F_{\mu\nu} = -\tilde F_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Чтобы это увидеть, надо решить уравнения самодуальности (13), (15). Сделаем это для случая $n = 1$.

Заметим, что любой самодуальный антисимметричный тензор $S^{\text{s.d.}}_{\mu\nu}$ можно выбрать в виде

$$(S^{\text{s.d.}}_{\mu\nu}) = \eta^a_{\mu\nu} c^a, \quad (16)$$

где $\eta^a_{\mu\nu}$ — символы т'Хоофта:

$$\eta^a_{00} = 0, \quad \eta^a_{ij} = \varepsilon_{ajj}, \quad \eta^a_{0i} = -\delta_{ai}, \quad \eta^a_{i0} = \delta_{ai}. \quad (17)$$

Эти символы не столь уж загадочны. Они становятся понятными, если заметить, что антисимметричный самодуальный тензор является неприводимым представлением $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ группы Лоренца $\equiv SU(2) \times SU(2)$ и $\eta^a_{\mu\nu}$ есть просто коэффициенты Клебша–Гордона при построении $(S^{\text{s.d.}}_{\mu\nu})$ из двух 4-векторов

$$\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \oplus \ldots \quad (18)$$

Аналогично, антисамодуальный антисимметричный тензор

$$(A_{\mu\nu})^{\text{a.s.d.}} = \overline{\eta}^a_{\mu\nu} c^a, \tag{19}$$

где $\overline{\eta}^a_{\mu\nu}$ отличаются от $\eta^a_{\mu\nu}$ знаком компонент: $\overline{\eta}^a_{0i} = -\overline{\eta}^a_{i0} = \delta_{ai}$.

Существует несколько замечательных соотношений, относящихся к символам $\eta^a_{\mu\nu}$. Нам потребуется два из них:

$$\varepsilon^{abc}\eta^b_{\mu\rho}\eta^c_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\nu}\eta^a_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\eta^a_{\rho\nu} + \delta_{\rho\sigma}\eta^a_{\mu\nu} - \delta_{\rho\nu}\eta^a_{\mu\sigma}, \quad \eta^a_{\mu\nu}\eta^a_{\mu\nu} = 12. \tag{20}$$

Простейший выбор для тензора плотности самодуального поля —

$$F^a_{\mu\nu}(x) = \eta^a_{\mu\nu} B(x), \tag{21}$$

где $B(x)$ — скалярная функция.

Однако не любой подобный тензор может играть роль плотности тензора, выражающегося через потенциалы согласно определению

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{22}$$

Выберем пробный потенциал в виде

$$A^a_\mu(x) = \eta^a_{\mu\nu}\partial_\nu \ln\phi(x) \tag{23}$$

и попытаемся найти, при каких условиях соответствующий полевой тензор будет самодуальным. Используя определение (22) и первое соотношение из (20), получаем

$$F^a_{\mu\nu} = \eta^a_{\nu\rho}\big[\partial_\mu\partial_\rho \ln\phi + (\partial_\mu \ln\phi)(\partial_\rho \ln\phi)\big] - (\mu \leftrightarrow \nu) + \eta^a_{\mu\nu}(\partial_\rho \ln\phi)^2. \tag{24}$$

Вообще говоря, только последнее слагаемое в (24) имеет желаемую самодуальную форму. Достаточным условием того, чтобы в целом выражение было самодуальным, является

$$[\ldots]_{\mu\rho} = \frac{\partial_\mu\partial_\rho\phi}{\phi} \sim \delta_{\mu\rho} \tag{25}$$

для квадратных скобок в выражении (24). Простейший способ удовлетворения этого условия — выбор $\phi(x) = x^2/\rho^2$. При подстановке $\phi(x)$ в (23) получим $F^a_{\mu\nu} = 0$. Это не то решение, которое мы хотели бы найти, но соответствующая полевая конфигурация

$$A^a_\mu = 2\eta^a_{\mu\nu}\frac{x_\nu}{x^2} \tag{26}$$

тоже физически значима. Это топологически нетривиальная «чисто калибровочная» конфигурация $\Omega = \Omega_0$ в (3) с $n_\mu = x_\mu/x^2$. Инстантонное решение задается соотношением (23) с функцией

$$\phi(x) = 1 + \frac{x^2}{\rho^2}. \tag{27}$$

Оно имеет вид

$$A^a_\mu = \frac{2\eta^a_{\mu\nu}x_\nu}{x^2 + \rho^2}. \tag{28}$$

При этом тензор напряженности

$$F^a_{\mu\nu} = -\frac{4\rho^2\eta^a_{\mu\nu}}{(x^2 + \rho^2)^2}. \tag{29}$$

Действие, вычисленное на этом решении с помощью второго соотношения (20) дает, как ожидалось, значение $8\pi^2/g^2$.

Решение (28), (29) локализовано в евклидовом пространстве. Оно записано в определенной калибровке. Множество решений другой формы можно записать, применяя локальные калибровочные преобразования к формулам (28), (29). Можно доказать, что все решения евклидовых уравнений движения в топологическом секторе $n = 1$ представимы в виде (28), (29) с точностью до рескейлинга, трансляций и калибровочных преобразований.

Аналогично можно рассмотреть случай топологического заряда $n = -1$.

Уравнения (13) разрешимы и для больших значений n. Это сделали Атья, Дринфельд, Хитчин и Манин. Заметим, что инстантонные решения существуют и для высших унитарных групп.

Физическое значение инстантонного решения становится ясным при рассмотрении классического гамильтониана Янга–Миллса (в калибровке $A_0 = 0$):

$$H = \frac{1}{2g^2}\int d^3x(E_i^2 + B_i^2), \tag{30}$$

где E_i^2 и B_i^2 соответствуют кинетической и потенциальной энергии. Классический вакуум включает конфигурации с нулевой напряженностью поля. Как уже отмечалось выше, для неабелевых полей это ограничение приводит к «чистой калибровке» A_i (2). Такие конфигурации характеризуются топологическим числом n, различающим калибровочные преобразования Ω, которые не связаны непрерывным образом между собой. Это означает, что имеется бесконечный набор классических вакуумов, отличающихся значением n. Инстантоны — это решения классических уравнений движения, связывающие различные вакуумы. Эти решения имеют потенциальную энергию $B^2 > 0$ и кинетическую энергию $E^2 < 0$, причем сумма этих энергий в любой момент времени обращается в ноль. Так как инстантонное действие конечно, барьер между топологическими вакуумами может быть проницаемым и истинный вакуум является линейной комбинацией

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n\rangle. \tag{31}$$

Такой вакуум в КХД называют θ-вакуумом. В КХД величина θ является внешним параметром. Если $\theta \neq 0$, то КХД-вакуум нарушает CP-инвариантность. Из экспериментальных данных по магнитному моменту нейтрона следует, что $\theta < 10^{-9}$. Почему величина θ столь мала? В этом состоит проблема сильного CP-нарушения. Вероятность туннелирования между топологическими вакуумами определяется квазиклассическим методом (WKB). Для одноинстантонного действия

$$P_{\text{тун.}} \sim \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2}\right). \tag{32}$$

Предэкспоненциальный фактор можно найти, рассматривая флуктуации $A_\mu = A_\mu^{\text{кл.}} + \delta A_\mu$ возле классического инстантонного решения. Такие вычисления были выполнены т'Хоофтом. Распределение инстантонов по размерам ρ определяется формулой

$$dn_{\text{ин.}} = \frac{0{,}47e^{-1{,}68N_C}}{(N_C-1)!(N_C-2)!}\left(\frac{8\pi^2}{g^2}\right)^{2N_C} e^{-\frac{8\pi^2}{g^2(\rho)}}\,\frac{d^4z\,d\rho}{\rho^5}, \tag{33}$$

где $g^2(\rho)$ — бегущая константа на масштабе размера инстантона.

2. Нулевые моды и $U(1)_A$-аномалия. Инстантоны связывают различные топологические вакуумы КХД. А можно ли эти вакуумы каким-либо образом различить? На этот вопрос можно ответить положительно, если в теории присутствуют легкие фермионы, поскольку различные вакуумы имеют разный аксиальный заряд. Это замечание является ключевым в понимании киральных аномалий.

Аномалии возникают в контексте теории возмущений. Из треугольной диаграммы, содержащей внешний аксиально-векторный ток, следует, что синглетный по аромату ток, сохраняющийся на классическом уровне, на квантовом уровне имеет аномальную дивергенцию

$$\partial_\mu j_\mu^5 = \frac{N_f}{16\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a. \tag{34}$$

Эта аномалия играет важную роль в КХД, поскольку объясняет отсутствие девятого голдстоуновского бозона. Это так называемая $U(1)_A$-проблема.

Очевидно, что механизм аномалии связан с инстантонами. Интеграл от правой части (34) равен $2N_f n$, где n — топологический заряд. Это означает, что в инстантонном поле происходит нарушение аксиального заряда на $2N_f$ единицы. Важнейшее свойство инстантонов, установленное т'Хоофтом, — наличие нулевых мод оператора Дирака $iD\psi_0(x) = 0$ в инстантонном поле. Для инстантона в сингулярной калибровке волновая функция нулевой моды

$$\psi_0(x) = \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{(x^2+\rho^2)^{3/2}} \frac{\gamma \cdot x}{\sqrt{x^2}} \frac{1+\gamma_5}{2} \phi, \tag{35}$$

где $\phi^{\alpha m} = \varepsilon^{\alpha m}/\sqrt{2}$ — постоянный спинор, связанный с цветовым индексом α и спиновым индексом $m = 1, 2$. Заметим, что решение (35) имеет левую киральность $\gamma_5\psi_0 = -\psi_0$. Аналогично, в поле антиинстантона существует правая нулевая мода.

Теперь можно понять, как при туннелировании может нарушаться аксиальный заряд. Для этого рассмотрим дираковский гамильтониан $i\alpha D$ в инстантонном поле. Присутствие 4-мерной нормированной нулевой моды подразумевает существование левого состояния, которое при туннелировании изменяет знак энергии с положительного на отрицательный. Действительно, в адиабатическом приближении решение уравнения Дирака

$$\psi_i(\vec{x}, t) = \psi_i(\vec{x}, t = -\infty) \exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{t} dt' \varepsilon(t')\Big). \tag{36}$$

Единственный способ иметь нормируемую 4-мерную волновую функцию, как видно из (36), — считать $\varepsilon_i > 0$ для $t \to \infty$ и $\varepsilon_i < 0$ для $t \to -\infty$. Тем самым находим объяснение нарушению аксиального заряда при туннелировании.

3. Эффективное взаимодействие кварков. Переходя от глюодинамики к КХД с легкими кварками, мы сталкиваемся с проблемой кварковых взаимодействий. Однако в присутствии легких кварков вероятность туннелирования пропорциональна фермионному детерминанту, который задается произведением собственных значений оператора Дирака. Но при $m \to 0$ амплитуда туннелирования обращается в ноль, и отдельные инстантоны существовать не могут. Этот вывод связан с аномалией: при туннелировании аксиальный заряд вакуума изменяется, т. е. инстантоны должны сопровождаться фермионами. Амплитуда туннелирования отлична от нуля только в присутствии внешних кварковых источников. Действительно, нулевые моды в знаменателе кваркового пропагатора могут сокращаться нулевыми модами детерминанта.

Рассмотрим фермионный пропагатор в инстантонном поле

$$S(x,y) = \frac{\psi_0(x)\psi_0^+(y)}{im} + \sum_{\lambda\neq 0} \frac{\psi_\lambda(x)\psi_\lambda^+(y)}{\lambda + im}, \tag{37}$$

где $iD\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$. Для N_f легких кварковых ароматов инстантонная амплитуда пропорциональна m^{N_f}. Вместо амплитуды туннелирования вычислим $2N_f$-кварковую функцию Грина $\langle\prod\limits_f \overline{\psi}_f(x_f)\Gamma\psi_f(y_f)\rangle$, содержащую один кварк и один антикварк каждого аромата. Эта функция содержит N_f фермионных пропагаторов (37), поэтому вклад нулевых мод включает фактор m^{N_f} в знаменателе. Результат можно записать в терминах эффективного лагранжиана. Для $N_f = 1$

$$L_{N_f=1} = \int d\rho n_0(\rho)\Big(m\rho - \frac{4}{3}\pi^2\rho^3\overline{q}_R q_L\Big), \tag{38}$$

где $n_0(\rho)$ — скорость туннелирования. Отметим, что вклад нулевой моды выглядит как массовый член. Для $N_f = 1$ имеется только одна киральная $U(1)$-симметрия, которая аномальна. Это означает, что аномалия нарушает киральную симметрию и создает фермионный массовый член. Это не так для более чем одного аромата. Для $N_f = 2$

$$L_{N_f=2} = \int d\rho n_0(\rho)\Big[\prod_f \Big(m\rho - \frac{4}{3}\pi^2\rho^3\overline{q}_{f,R}q_{f,L}\Big) + \\ + \frac{3}{32}\Big(\frac{4}{3}\pi^2\rho^3\Big)^2\big(\overline{u}_R\lambda^a u_L\overline{d}_R\lambda^a d_L - \overline{u}_R\sigma_{\mu\nu}\lambda^a u_L\overline{d}_R\sigma_{\mu\nu}\lambda^a d_L\big)\Big]. \tag{39}$$

При этом взаимодействие $SU(2)\times SU(2)$-инвариантно, но $U(1)_A$ нарушена. Лагранжиан (39) имеет вид, схожий с лагранжианом Намбу–Иона–Ласинио, и часто используется как модель нарушения киральной симметрии, а также для описания киральной динамики при низких энергиях.

4. Кварковый конденсат в приближении среднего поля. Как мы видели выше, туннелирование происходит, если присутствует N_f фермионов, которые имеют свои киральности. Но в вакууме КХД киральная симметрия нарушена, и кварковый конденсат $\langle\overline{q}q\rangle = \langle\overline{q}_L q_R + \overline{q}_R q_L\rangle$ отличен от нуля. Это означает, что амплитуда, соответствующая изменению киральности кварка, конечна. Конечна и плотность инстантонов.

Для достаточно «разреженной» системы инстантонов, инстантонную плотность в КХД можно оценить с помощью вакуумного среднего $2N_f$-фермионного оператора в эффективном лагранжиане (39). При этом фактор $\prod\limits_f m_f$ в инстантонной плотности следует заменить на $\prod\limits_f m_f^*$, где эффективная масса кварка

$$m_f^* = m_f - \frac{2}{3}\pi^2\rho^2\langle\overline{q}_f q_f\rangle. \tag{40}$$

Таким образом, если киральная симметрия нарушена, инстантонная плотность в киральном пределе конечна. Возникает вопрос: а не может ли кварковый конденсат «генерироваться» инстантонами?

Для ответа на этот вопрос можно использовать эффективный лагранжиан (39) и вычислить кварковый конденсат в приближении среднего поля (приближение

Хартри — Фока). В результате получается уравнение для щели в спектре:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M^2(k)}{k^2 + M^2(k)} = \frac{N}{2N_C V}, \tag{41}$$

определяющее массу «конституентного» кварка в терминах инстантонной плотности N/V. В выражении (41) $M(k) = M(0)k^2\phi'^2(k)/(2\pi\rho)$ — зависящая от импульса эффективная масса кварка; $\phi'(k)$ — Фурье-преобразование нулевой моды.

Тогда кварковый конденсат

$$\langle \overline{q}q \rangle = -4N_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M(k)}{M^2(k) + k^2}. \tag{42}$$

Используя стандартные параметры $N/V = 1$ фм^3 и $\rho = 1/3$ фм, получаем $\langle \overline{q}q \rangle = -(255$ МэВ$)^3$ и $M(0) = 320$ МэВ. Параметрически, $\langle \overline{q}q \rangle \sim (N/V)^{1/2} 1/\rho$ и $M(0) \sim (N/V)^{1/2}\rho$. Заметим, что обе величины пропорциональны не $(N/V)^1$, а $(N/V)^{1/2}$. Это означает, что спонтанное нарушение киральной симметрии — это не одноинстантонный эффект, он включает бесконечное число инстантонов.

На микроскопическом уровне нарушение киральной симметрии возникает при рассмотрении распределения собственных значений оператора Дирака. Общее выражение, связывающее спектральную плотность оператора Дирака с кварковым конденсатом (соотношение Бенкса–Кашера)

$$\langle \overline{q}q \rangle = -\pi\rho(0). \tag{43}$$

Этот результат аналогичен формуле Кондо для электрической проводимости. Подобно тому, как проводящие свойства определяются плотностью состояний вблизи поверхности Ферми, кварковый конденсат зависит от плотности уровней при нулевой виртуальности λ. Для разупорядоченной, случайной системы инстантонов взаимодействие нулевых мод формирует полосу состояний с $\lambda = 0$. В результате собственные состояния оказываются делокализованными, а киральная симметрия нарушенной. С другой стороны, если инстантоны сильно скоррелированны, например, связаны в топологически нейтральные молекулы, собственные состояния локализованы, а киральная симметрия — не нарушена. Какой из этих двух сценариев реализуется, зависит от параметров теории, таких как число легких ароматов и температура. В реальной КХД с двумя сортами легких ароматов при температуре $T = 0$ киральная симметрия нарушена.

5. Структура адронов и КХД корреляционные функции. Рассмотрим два тока, разделенных пространственно-подобным значением x(которое может быть пространственным расстоянием или евклидовым временем) и введем корреляционные функции пиона

$$K(x) = \big\langle T(J(x)J(0)) \big\rangle, \tag{44}$$

где $J(x) = \overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$. Матрицы Γ содержат γ_μ для векторных токов, γ_5 для псевдоскалярных и 1 для скалярных токов.

В релятивистской теории поля для изучения спектра теории широко используются корреляционные функции калибровочно-инвариантных локальных операторов. При этом корреляционные функции могут быть вычислены по физическим состояниям (мезонов, барионов, глюболов) или в терминах фундаментальных полей теории (кварков и глюонов). В последнем случае речь идет об операторном разложении и моделях КХД на решетке. По этой причине корреляционные функции являются своеобразным

«мостиком» между адронной феноменологией с одной стороны и структурой вакуума КХД с другой стороны. Иначе говоря, адронные корреляционные функции играют ту же роль в понимании сил взаимодействия между кварками, что и фазовые сдвиги в NN-рассеянии в случае ядерных сил.

Для кварков, однако, конфайнмент препятствует обычному определению амплитуд рассеяния. Вместо этого следует рассматривать поведение калибровочно-инвариантных корреляционных функций на малых и промежуточных масштабах.

При малых x следует ожидать $K(x) \simeq K_0(x)$, причем $K_0(x)$ отвечает практически свободному распространению безмассовых легких кварков. Причем $K_0(x) = 12/(\pi^4 x^6)$, что соответствует квадрату безмассового кваркового пропагатора. Поправка первого порядка за счет непертурбативных эффектов вычисляется с помощью вильсоновского операторного разложения (OPE). Для скалярного и псевдоскалярного каналов

$$\frac{K(x)}{K_0(x)} = 1 + \frac{x^4}{384}\langle (gG)^2 \rangle + \ldots \tag{45}$$

Входящий в это выражение «глюонный конденсат», как предполагается, состоит из мягких вакуумных полей. Так называемое «стандартное значение глюонного конденсата» оценивается с помощью правил сумм для чармония:

$$\langle (gG)^2 \rangle_{\text{SVZ}} \simeq 0{,}5 \text{ ГэВ}^4. \tag{46}$$

Таким образом, OPE предполагает следующий масштаб, на котором корреляционная функция становится равной своему первому члену в разложении

$$x_{\text{OPE}} = \left(\frac{384}{\langle (gG)^2 \rangle} \right)^{1/4} \simeq 1 \text{ фм}. \tag{47}$$

Это значение соответствует используемому приближению. Однако это приближение не применимо к описанию каналов $J^P = 0^{\pm}$.

Приложение 3. Правила сумм КХД

1. Дисперсионные соотношения. Основу метода правил сумм составляет дисперсионное соотношение для функции $G(q^2)$, описывающей распространение системы с квантовыми числами адрона.

В простейшей форме

$$G(q^2) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\operatorname{Im} G(k^2)}{k^2 - q^2}dk^2. \tag{1}$$

В квантовой механике $G(q^2)$ — пропагатор частицы. В теории поля надо иметь в виду, что в различных областях q^2 следует использовать разные степени свободы. Например, для системы с барионными и электрическим зарядами, равными единице ($Q = B = 1$), мнимая часть $\operatorname{Im} G(q^2) = 0$ при $k^2 < m^2$, m — положение наиболее низко лежащего полюса. При больших значениях k^2 имеются и другие сингулярности. Есть и разрезы, соответствующие системам «протон + пионы» и т. д.

С другой стороны, можно рассматривать систему как три взаимодействующих кварка. Такое описание из-за асимптотической свободы КХД становится все более адекватным при $q^2 \to -\infty$. Это означает, что при $q^2 \to -\infty$ функцию $G(q^2)$ можно разложить по степеням q^{-2} (и КХД константы связи α_S). Коэффициентами этого разложения являются вакуумные средние локальных операторов, построенных из кварковых и глюонных полей. Эти вакуумные средние называются конденсатами. Такое представление, известное как операторное разложение (OPE), дает возможность учесть «непертурбативную» физику в конденсатах кварковых и глюонных полей.

Начнем обсуждение с общего представления функции

$$G(q^2) = i\int d^4xe^{iqx}\langle 0|T\{\eta(x)\overline{\eta}(0)\}|0\rangle, \tag{2}$$

где η — локальный оператор с квантовыми числами рассматриваемой системы. Оператор $\eta(x)$ включает кварковые поля. Для каждого кваркового поля можно записать в низшем порядке по α_S (опуская цветовые индексы)

$$\langle 0|Tq_\alpha(x)\overline{q}_\beta(0)|0\rangle = \frac{i}{2\pi^2}\frac{\widehat{x}_{\alpha\beta} + (im_q/2)x^2}{x^4} - \frac{1}{4}\sum_A \Gamma^x_{\alpha\beta}\langle 0|{:}\overline{q}(0)\Gamma^x q(x){:}|0\rangle, \tag{3}$$

где $\widehat{x} = x_\mu\gamma^\mu$. Такая запись есть прямое следствие теоремы Вика. В выражении (3) α, β — лоренцевские индексы, m_q — масса кварка; Γ^x — полный набор 4×4 матриц Дирака со скалярной, векторной, псевдоскалярной, псевдовекторной и тензорной структурами. Первый же член в (3) — свободный пропагатор.

В теориях с «пустым» вакуумом (например, в квантовой электродинамике) второе слагаемое в (3) вследствие нормального упорядочения обращается в ноль. В любой полевой теории все структуры, за исключением скалярной, из-за Лоренц-инвариантности отсутствуют. Таким образом,

$$\langle 0|Tq^a_\alpha(x)\overline{q}^b_\beta(0)|0\rangle = \frac{i}{2\pi^2}\frac{\widehat{x}_{\alpha\beta} + (im_q/2)x^2}{x^4} - \frac{1}{12}\langle 0|\overline{q}^a_\alpha(0)q^a_\beta(0)|0\rangle, \tag{4}$$

где a и b — цветовые индексы.

Заметим, что соотношение (4) имеет простую физическую интерпретацию. Кварк способен распространяться между пространственно-временными точками 0 и x свободно или путем обмена с вакуумом кварк-антикварковых пар. Однако выражения (3) и (4) не являются калибровочно-инвариантными (оператор $q(x)$ зависит от кали-

бровки глюонных полей). Калибровочно-инвариантная форма выражения (4) имеет вид:

$$\langle 0|Tq^a_\alpha(x)\overline{q}^b_\beta(0)|0\rangle = \frac{i}{2\pi^2}\frac{\widehat{x}_{\alpha\beta} + (im_q/2)x^2}{x^4}\delta_{ab} - \frac{1}{12}\langle 0|\overline{q}^a(0)q^a(0)|0\rangle + O(x^2), \tag{5}$$

с разложением по степеням x^2, соответствующим разложению $G(q^2)$ по степеням q^{-2}.

Чтобы продемонстрировать возможности дисперсионных соотношений, получим известное соотношение Гелл-Манна, Оаксеа, Рейнера (GMOR):

$$\langle 0|\overline{u}u + \overline{d}d|0\rangle = -\frac{2f_\pi^2 m_\pi^2}{m_u + m_d}, \tag{6}$$

где f_π и m_π — пионная константа и масса пиона. Заметим, что выражение (6) справедливо в киральном пределе $m_\pi^2 \to 0$, $m_q \to 0$. Квантовые числа пиона несет как аксиальный $A_\mu(x) = \overline{u}(x)\gamma_\mu\gamma_5 d(x)$, так и псевдоскалярный ток $P(x) = \overline{u}(x)\gamma_5 d(x)$. Рассмотрим дисперсионное соотношение для функции

$$G(q^2) = i\frac{q^\mu \int d^4x e^{iqx}\langle 0|TA_\mu(x)\overline{P}(0)|0\rangle}{q^2}, \tag{7}$$

используя при этом (5) для кварковых пропагаторов. Соответствующий интеграл в (7) расходится при малых x. Вводя обрезание $x^2 \geq L^2$, в пределе $\alpha_S \simeq 0$ находим

$$G(q^2) = i(m_u + m_d)\frac{3}{8\pi^2}\ln\frac{L^2}{(-q^2)} + i\frac{\langle 0|\overline{u}u + \overline{d}d|0\rangle}{q^2}. \tag{8}$$

Чтобы получить правую часть (8), вспомним о частичном сохранении аксиального тока (PCAC) $D^\mu A_\mu(x) = \sqrt{2}f_\pi m_\pi^2\phi(x)$, где $\phi(x)$ — пионное поле.

Тогда

$$\operatorname{Im} G(k^2) = \langle 0|A_\mu K^\mu|\pi(k)\rangle\langle\pi(k)|\overline{P}|0\rangle\delta(k^2 - m_\pi^2) + R(k^2), \tag{9}$$

слагаемое $R(k^2)$ описывает вышележащие состояния. Согласно PCAC, член $R(k^2)$ должен содержать один дополнительный фактор m_π^2 по сравнению с первым членом в правой части (9). Следовательно, в киральном пределе можно пренебречь слагаемым $R(k^2)$, как и первым членом в правой части (8). Таким образом, дисперсионное соотношение сводится к выражению

$$i\frac{\langle 0|\overline{u}u + \overline{d}d|0\rangle}{q^2} = \frac{\langle 0|A_\mu K^\mu|\pi(k)\rangle\langle\pi(k)|\overline{P}|0\rangle}{m_\pi^2 - q^2}. \tag{10}$$

Вычисляя матричные элементы в правой части (10) с помощью PCAC и предполагая $-q^2 \gg m_\pi^2$, приходим к желаемому соотношению (6).

2. Правила сумм. К сожалению, пример, рассмотренный выше, — единственный, в котором дисперсионное соотношение имеет простую форму. Обычно нет причин для пренебрежения вышележащими физическими состояниями по сравнению с низшим. Если вторая сингулярность — разрез, начинающийся в точке $W^2_{\rm ph}$, то

$$\operatorname{Im} G(k^2) = \lambda^2\delta(k^2 - m^2) + f(k^2)\theta(k^2 - W^2_{\rm ph}), \tag{11}$$

где λ^2 является вычетом, а $f(k^2)$ — спектральная функция. Следуя предыдущему рассуждению, левую часть (1) можно разложить по степеням q^{-2}, тогда

$$G_{\rm OPE}(q^2) = \frac{\lambda^2}{m^2 - q^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{W^2_{\rm ph}} \frac{f(k^2)dk^2}{k^2 - q^2} \tag{12}$$

с неизвестными параметрами m, λ^2 и неизвестной спектральной функцией $f(k^2)$. Цель правил сумм состоит в том, чтобы получить параметры низколежащего состояния. Поэтому второе слагаемое в (12) трактуется приближенно. Приближение диктует асимптотическое поведение

$$f(k^2) = \frac{1}{2i}\Delta G_{\mathrm{OPE}}(k^2) \tag{13}$$

при $k^2 \gg |q^2|$. Интеграл по $k^2 \gg |q^2|$ дает члены типа $\sim \ln(-L^2/q^2)$, превышающие вклад полюса на этот фактор.

Стандартная процедура состоит в экстраполировании (12) к малым k^2 с заменой физического порога W^2_{ph} неизвестным эффективным порогом W^2:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{W^2_{\mathrm{ph}}}^{\infty} \frac{f(k^2)}{k^2 - q^2} dk^2 = \frac{1}{2\pi^2 i}\int\limits_{W^2}^{\infty} \frac{\Delta G_{\mathrm{OPE}}(k^2)}{k^2 - q^2} dk^2. \tag{14}$$

Тогда дисперсионное соотношение (1) принимает вид

$$G_{\mathrm{OPE}}(q^2) = \frac{\lambda^2}{m^2 - q^2} + \frac{1}{2\pi^2 i}\int\limits_{W^2}^{\infty} \frac{\Delta G_{\mathrm{OPE}}}{k^2 - q^2} dk^2. \tag{15}$$

Такое приближение спектра известно как «полюс + континуум»-модель. Левая часть (15) содержит КХД-конденсаты. Правая часть — неизвестные параметры m, λ^2 и W^2. Однако, как левая, так и правая части зависят от q^2. Операторное разложение становится все более адекватным при больших $(-q^2)$. Модель «полюс + континуум» имеет смысл, если вклад континуума, трактуемый приближенно, не превышает вклад полюса, трактуемого точно. Таким образом, модель становится все более точной при малых $|q^2|$. Проблема состоит в том, чтобы найти область $|q^2|$, в которой как OPE, так и модель «полюс+континуум» были бы применимы.

Такая область не обязательно существует для любого канала в (15). Для улучшения перекрытия между КХД и феноменологическим описанием используется преобразование Бореля:

$$Bf(Q^2) = \lim_{Q^2, n \to \infty} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!}\left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^n f(Q^2) \equiv \overline{f}(M^2), \tag{16}$$

$Q^2 = -q^2$, $M^2 = Q^2/n$.

Преобразование Бореля имеет несколько весьма удобных особенностей. Оно исключает расходящиеся члены в левой части (15), вызванные кварковыми петлями. Это происходит потому, что преобразование Бореля исключает все полиномы по q^2. Поэтому нет необходимости в вычитаниях. Кроме того, вследствие соотношения

$$B\frac{1}{Q^2 + m^2} = e^{-m^2/M^2} \tag{17}$$

усиливается вклад низколежащих состояний в левую часть (15).

Преобразованные «по Борелю» дисперсионные соотношения

$$\tilde{G}_{\mathrm{OPE}}(M^2) = \lambda^2 e^{-m^2/M^2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W^2}^{\infty} dk^2 e^{-k^2/M^2} \Delta G_{\mathrm{OPE}}(k^2) \tag{18}$$

использовались для анализа как векторных мезонов, так и нуклонов. Б. Л. Иоффе вычислил мезонную массу как функцию КХД-конденсатов:

$$m = c\langle 0|\overline{u}u|0\rangle. \tag{19}$$

При этом $c < 0$ является функцией глюонного конденсата и 4-кваркового конденсата $\langle 0|\overline{q}q\overline{q}q|0\rangle$. 4-кварковый конденсат можно рассматривать как разложение двухкваркового пропагатора (аналогично (3)).

Метод правил сумм КХД был успешно применен к вычислению статических свойств мезонов и нуклонов. Величина глюонного конденсата $g_0 = \langle 0|\frac{\alpha_S}{\pi}G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}|0\rangle$ была получена из анализа лептонных распадов ρ- и ϕ-мезонов, а также из спектра чармония. Этот конденсат — очень важная характеристика КХД-вакуума, поскольку он непосредственно связан с вакуумной плотностью энергии. Согласно современным данным, величина глюонного конденсата

$$g_0 = (0{,}240 \pm 0{,}011)\ \text{ГэВ}^4, \tag{20}$$

а кваркового конденсата

$$\langle\overline{q}q\rangle = -0{,}13\ \text{ГэВ}^3. \tag{21}$$

Приложение 4. Сильное CP-нарушение

1. Введение. Первоначально считалось, что КХД в качестве параметров содержит калибровочную константу, определенную на некотором масштабе, а также массы кварков. Однако КХД включает и так называемый θ-параметр, входящий в лагранжиан

$$L = \theta \frac{1}{16\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu a}, \tag{1}$$

где

$$\tilde{F}^{\mu\nu a} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma a}. \tag{2}$$

Как мы увидим ниже, это слагаемое в лагранжиане является полной производной, и казалось бы, не важно для физики, но это не так. Поскольку θ-член нарушает CP-инвариантность, он вносит вклад в электрический дипольный момент нейтрона d_n. Согласно современным экспериментальным данным по дипольному моменту нейтрона, величина $\theta \ll 10^{-9}$. Почему параметр θ столь мал? Этот вопрос является основным в проблеме сильного CP-нарушения, которую мы будем обсуждать.

Прежде чем рассматривать проблему CP-нарушения в КХД, обсудим более простую теорию, содержащую кварк одного аромата. Лагранжиан этой модели

$$L = -\frac{1}{4g^2} F^2_{\mu\nu} + \overline{q} \not{q}^* + q \not{q}^* m \overline{q} q + m^* \overline{q}^* q^* \tag{3}$$

записан в терминах двухкомпонентных фермионов, при этом массы не обязательно вещественны

$$m = |M| e^{i\theta}. \tag{4}$$

В терминах же четырехкомпонентных фермионов лагранжиан

$$L = \operatorname{Re} m q \overline{q} + \operatorname{Im} m \overline{q} q \gamma_5 q. \tag{5}$$

Чтобы получить массовый член в привычном виде, без матриц γ_5, можно попытаться переопределить кварковые поля

$$q \to e^{-i\theta/2} q, \quad \overline{q} \to e^{-i\theta/2} \overline{q}. \tag{6}$$

Но при этом возникает серьезная трудность, связанная с аномалией. Предположим, что параметр M в теории очень большой. В этом случае при интегрировании по кварковым полям получим низкоэнергетическую эффективную теорию. Для этого следует вычислить интеграл

$$Z = \int [dA_\mu] \int [dq][d\overline{q}] e^{iS}. \tag{7}$$

Снова предположим $m = e^{i\theta} M$, причем θ — мал и параметр M — вещественный. Чтобы сделать m вещественной, снова проведем преобразования (6). При интегрировании по кварковым полям получим

$$Z = \int [dA_\mu] e^{iS_{\text{eff}}}, \tag{8}$$

где S_{eff} — эффективное действие, описывающее взаимодействие глюонов на масштабах, меньших M.

Поскольку переопределение полей, исключающее θ, — это по сути изменение переменных в интеграле, то можно ожидать, что эффективное действие не содержит зависимости от θ. Но это опять-таки не так. Чтобы это увидеть, предположим, что величина $\theta \ll 1$, и разложим экспоненту по этому параметру. Выделим член в эффективном действии, содержащий два внешних калибровочных бозона

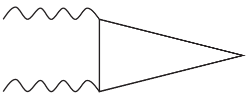


Рис. 1

Соответствующий член в действии задается формулой

$$\delta L_{\text{eff}} = -i\frac{\theta}{2}g^2 M \operatorname{tr}(T^a T^b) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}\left(\gamma_5 \frac{1}{\not k + \not q_1 - M} \not\varepsilon_1 \frac{1}{k - M} \not\varepsilon_2 \frac{1}{\not k - \not q_2 - M}\right). \tag{9}$$

Здесь q_i — импульсы глюонов, ε_i — их поляризации, a и b — цветовые индексы глюонов. Для вычисления интеграла (9) удобно ввести фейнмановские параметры и сдвинуть интеграл по k:

$$\delta L_{\text{eff}} = -i\theta g^2 M \operatorname{tr}(T^a T^b) \int d\alpha_1\, d\alpha_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}\Big(\gamma_5(\not k - \alpha_1 \not q_1 + \alpha_2 \not q_2 + \not q_1 + M)\varepsilon_1 \times$$
$$\times \frac{(\not k - \alpha_1 \not q_1 + \alpha_2 \not q_2 + M)\varepsilon_2(\not k - \alpha_1 \not q_1 + \alpha_2 \not q_2 - \not q_2 + M)}{(k^2 - M^2 + O(q_i^2))^3}\Big). \tag{10}$$

Для малых q можно пренебречь q-зависимостью в знаменателе. После вычисления следов и интегрирования по α_i получаем:

$$\delta L_{\text{eff}} = g^2 M^2 \theta \operatorname{tr}(T^a T^b) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_1^\mu q_2^\nu \varepsilon_1^\rho \varepsilon_2^\sigma \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^3}. \tag{11}$$

Это как раз слагаемое в эффективном действии, получающееся при интегрировании по k и включающее фактор два для двух калибровочных бозонов:

$$\delta L_{\text{eff}} = \frac{1}{32\pi^2} \theta \operatorname{tr}(F\tilde{F}). \tag{12}$$

Почему так произошло? На уровне интеграла преобразование (11) является простой заменой переменных, которое, казалось бы, не имеет каких-либо последствий. С другой стороны, диаграмма на рис. 1 содержит линейно расходящийся вклад, который следует регуляризовать. Простейший способ регуляризации диаграммы — введение членов Паули–Вилларса, т. е. вычитаний соответствующей амплитуды при очень большой массе Λ. Однако, как мы только что видели, результат не зависит от Λ. Это свидетельствует о наличии в теории аномалии.

Рассмотрим теперь случай $m \ll \Lambda_{\text{КХД}}$. В этом случае нам не нужно интегрировать по кварковым полям, но следует учесть регуляризующие диаграммы. Для малых m классическая теория имеет приближенную симметрию относительно преобразований

$$q \to e^{i\alpha} q, \quad \overline{q} \to e^{i\alpha} \overline{q} \tag{13}$$

(при 4-х компонентах $q \to e^{i\alpha\gamma_5} q$). В частности, можно определить ток

$$j_5^\mu = \overline{q}\gamma_5\gamma_\mu q, \tag{14}$$

причем на классическом уровне

$$\partial_\mu j_5^\mu = m\overline{q}\gamma_5 q. \tag{15}$$

При вариации лагранжиана получаем

$$\delta L = \alpha\partial_\mu j_5^\mu = m\alpha\overline{q}\gamma_5 q. \tag{16}$$

Но, как мы видели выше, дивергенция тока содержит также другой, не зависящий от m член:

$$\partial_\mu j_5^\mu = m\overline{q}\gamma_5 q + \frac{1}{32\pi^2}F\tilde{F}. \tag{17}$$

Аномальный член, содержащийся в (17), имеет важные следствия для физики частиц:

1) π^0-распад. Дивергенция аксиального изоспинового тока

$$(j_5^3)^\mu = \overline{u}\gamma_5\gamma^\mu u - \overline{d}\gamma_5\gamma^\mu d \tag{18}$$

содержит электромагнитную аномалию, обеспечивающую связь π^0 с двумя фотонами.

2) Аномалии в калибровочных токах свидетельствуют о несогласованности теории. Их наличие означает, что утрачена калибровочная инвариантность. Отсутствие калибровочных аномалий — одна из замечательных особенностей стандартной модели (см. приложение 2 к главе 4 части I).

Что еще поучительного мы узнали из рассмотрения простейшей модели? Требование вещественности кварковых масс приводит к наличию в лагранжиане слагаемого (1). В КЭД такой член, на первый взгляд, не имеет значения. В самом деле

$$\int d^4x F\tilde{F} \tag{19}$$

есть интеграл от полной производной

$$F\tilde{F} = \vec{E}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varepsilon^\mu_{\nu\rho\sigma}A^\nu F^{\rho\sigma}, \tag{20}$$

и поэтому не вносит вклада в классические уравнения движения. Можно ожидать, что θ-член не вносит вклада и на квантово-механическом уровне. В евклидовом интеграле по путям конфигурации с конечным действием имеют напряженности $F_{\mu\nu}$, убывающие быстрее $1/r^2$, а поля A убывают быстрее $1/r$, т. е. поверхностными членами в L_θ можно пренебречь. В неабелевых калибровочных теориях ситуация несколько иная. По-прежнему $F\tilde{F}$ можно записать через полную производную

$$F\tilde{F} = \partial^\mu K_\mu, \quad K_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Big(A^a_\nu F^a_{\rho\sigma} - \frac{2}{3}f^{abc}A^a_\nu A^b_\rho A^c_\sigma\Big). \tag{21}$$

Но теперь из утверждения о том, что F убывает быстрее $1/r^2$ уже не следует ограничения на убывание A. Как мы увидим ниже, существуют классические решения с конечным действием, для которых $F \sim 1/r^4$, но $A \sim 1/r$, т. е. поверхностным слагаемым уже нельзя пренебрегать. Такие конфигурации называются инстантонами. Мы приступаем к их обсуждению.

2. Двумерный случай. Прежде чем обратиться к 4-м измерениям, рассмотрим во многих отношениях более простой случай двух измерений.

2.1. *Аномалии в двух измерениях.* Начнем обсуждение с электродинамики безмассового фермиона в двух измерениях. Используя так называемый метод расщепления, представим ток

$$j_5^\mu = \overline{\psi}(x + i\varepsilon)e^{i\int_x^{x+\varepsilon}A_\rho dx^\rho}\gamma^\mu\psi(x). \tag{22}$$

Для очень малых ε можно выявить лидирующую сингулярность в произведении $\psi(x+i\varepsilon)\psi(x)$ путем операторного разложения, замечая при этом, что лидирующий член содержит единичный оператор с коэффициентом, пропорциональным $1/\varepsilon$. Запишем этот член в виде вакуумного среднего

$$\langle\overline{\psi}(x+\widehat{\varepsilon})\psi(x)\rangle = \frac{1}{2\pi}\frac{\widehat{\varepsilon}}{\varepsilon^2}. \tag{23}$$

Разложение фактора в экспоненте (22) с точностью до ε дает

$$\partial_\mu j_5^\mu = \text{«обычная часть»} + \frac{i}{2\pi}\partial_\mu\varepsilon_\rho A^\rho \operatorname{tr}\left(\frac{\widehat{\varepsilon}}{\varepsilon^2}\gamma^\mu\gamma^5\right). \tag{24}$$

Вычисление следа дает $\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^\nu$, при усреднении ε по углам ($\langle\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\rangle = (1/2)\eta_{\mu\nu}\varepsilon^2$) приводит к выражению

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{25}$$

Заметим, что ситуация вполне аналогична четырем измерениям. Дивергенция тока сама по себе является полной производной:

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu. \tag{26}$$

Возникает возможность определения нового тока

$$J^\mu = j_5^\mu - \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu. \tag{27}$$

Однако именно в 4-мерном случае этот ток не является калибровочно-инвариантным. Существует полевая конфигурация, для которой A не убывает на бесконечности — это поле точечного заряда. В самом деле, если на бесконечности имеются заряды $\pm\theta$, то они создают постоянное электрическое поле $F_{0i} = e\theta$. Очевидно, что физика модели периодична по параметру θ. Если $\theta > q$, то энергетически выгодно создать пару зарядов из вакуума, которые экранируют заряд на бесконечности.

2.2. *CP^N-модель: асимптотически свободная теория.* Рассмотренная выше модель не похожа на КХД, по крайней мере, в двух отношениях. Во-первых, в ней нет инстантонов; во-вторых, константа связи e — размерная. Гораздо ближе к КХД так называемая CP^N-модель. В этой модели имеются поля Z_i, $i = 1, \ldots, N+1$, принадлежащие к пространству CP^N, определяемому ограничением:

$$\sum_i |Z_i|^2 = 1, \tag{28}$$

причем точка Z_i эквивалентна $e^{i\alpha}Z_i$. Чтобы учесть это ограничение, введем в действие множитель Лагранжа $\lambda(x)$. Идентификация точек в CP^N должна быть для каждой точки в обычном пространстве–времени, т. е. имеется $U(1)$ калибровочная симметрия. Вводя калибровочное поле A_μ и соответствующую ковариантную производную, получаем лагранжиан

$$L = \frac{1}{g^2}\left[|D_\mu Z_i|^2 - \lambda(x)(|Z_i|^2 - 1)\right]. \tag{29}$$

Заметим, что в модели отсутствует кинетический член для A_μ, поскольку он исключается из действия с помощью уравнений движения.

Поэтому лагранжиан

$$L = \frac{1}{g^2}\left[|\partial_\mu Z_i|^2 + |Z_j^* \partial_\mu Z_j|^2\right]. \tag{30}$$

Проще, однако, сохранить A_μ в действии. Тогда действие квадратично по Z, т. е. можно проинтегрировать по полям Z:

$$Z = \int [dA][d\lambda][dZ_i] \exp[-L] = \int [dA][d\lambda] \exp\left(\int d^2x \Gamma_{\text{eff}}[A,\lambda]\right) =$$

$$= \int [dA][d\lambda] \exp\left[-N \operatorname{tr}\log(-D^2 - \lambda) - \frac{1}{g^2}\int d^2x\lambda\right]. \tag{31}$$

2.3. *Предел больших* N. Сам по себе результат (31) выглядит сложно: поля A_μ и λ имеют нелокальные взаимодействия. Ситуация значительно упрощается в пределе больших N: $N \to \infty$, но g^2N — фиксировано. В этом случае взаимодействия λ и A_μ подавлены степенями N. При больших N интеграл определяется конфигурацией, для которой

$$\frac{\delta\Gamma_{\text{eff}}}{\delta\lambda} = 0. \tag{32}$$

Или, при стремлении калибровочного поля к нулю

$$N\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2+\lambda} = \frac{1}{g^2}. \tag{33}$$

Отсюда получаем

$$\lambda = m^2 = M \exp\left(-\frac{2\pi}{g^2N}\right). \tag{34}$$

Здесь M — параметр обрезания расходящегося интеграла (33). Результат (34) весьма примечателен. Теория, которая на классическом уровне масштабно-инвариантна, содержит нетривиальные массы, связанные с параметром обрезания реном-инвариантным образом. Именно это явления (размерная трансмутация) объясняет в КХД массы протона, нейтрона и другие размерные величины. Таким образом, рассматриваемая модель вполне аналогична КХД. Можно записать лидирующий член β-функции с помощью известной формулы:

$$m = Me^{-\int \frac{dg}{\beta(g)}}, \tag{35}$$

т. е. при

$$\beta = -\frac{1}{2\pi}g^3 b_0 \tag{36}$$

коэффициент $b_0 = 1$.

Для наших же целей наиболее актуален вопрос о θ-члене. В модели CP^N θ-член вводится следующим образом:

$$L_\theta = \frac{\theta}{2\pi}\int d^2x \varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{37}$$

где $F^{\mu\nu}$ выражается в терминах фундаментальных полей Z_i. Как обычно, выражение (37) — интеграл от полной производной. Но, как и в $(1+1)$-электродинамике, этот член имеет физическое значение. В теории возмущений модели это не вполне

очевидно. Другая ситуация в пределе больших N. В низшем порядке действие для A_μ тривиально, но в одной петле (порядке $1/N$) возникает кинетический член

$$L_{\text{кин.}} = \frac{N}{2\pi m^2} F_{\mu\nu}^2. \tag{38}$$

В этом порядке эффективная теория состоит из калибровочного поля и динамически массивного поля λ. При этом θ соответствует ненулевому фоновому электрическому полю от заряда на бесконечности, т. е. теория действительно содержит нетривиальную θ-зависимость.

Можно в теорию добавить другие легкие поля, например, безмассовые фотоны. В этом случае снова получаем аномальную $U(1)$-симметрию. При низких энергиях получаем теорию фермиона, связанного с $U(1)$ калибровочным полем, т. е. имеет место нетривиальное нарушение симметрии.

2.4. *Роль инстантонов.* Существует, однако, и другой подход к нарушению $U(1)$-симметрии и θ-зависимости в теории. В евклидовом функциональном интеграле имеются стационарные точки подынтегральной функции — классические решения евклидовых уравнений движения. Чтобы эти точки были потенциально важными, им необходимо иметь конечное действие, т. е. они должны быть локализованы в евклидовом пространстве–времени. По этой причине подобные решения названы т'Хоофтом инстантонами (см. подробнее приложение 2).

Такие решения нетрудно найти в CP^N-модели, и мы сделаем это ниже. Здесь же заметим, что эти решения несут ненулевой топологический заряд

$$\frac{1}{2\pi}\int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = n \tag{39}$$

и имеют действие $2\pi n$. Их вклад в функциональный интеграл

$$Z_{\text{inst}} = e^{-\frac{2\pi n}{g^2}} e^{in\theta} \int [d\delta Z_j] \exp\left(-\delta Z_i \frac{\delta^2 S}{\delta Z_i \delta Z_j} \delta Z_j + \ldots\right). \tag{40}$$

Из соотношений (39)–(40) следует:

а) инстантоны формируют θ-зависимость;

б) в пределе больших N инстантонные эффекты сильно подавлены.

Построим теперь инстантонное решение в модели CP^1. Вместо того, чтобы записывать теорию в терминах калибровочного поля, как это делалось выше, удобнее параметризовать теорию в терминах одного комплексного поля ϕ. Например, определить $\phi = Z_1/Z_2$. Лагранжиан модели в терминах поля ϕ запишется в виде

$$L = (\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi^*) \frac{1}{1+\phi^*\phi} - \frac{\phi^*\phi}{(1+\phi^*\phi)^2}. \tag{41}$$

Можно считать поле ϕ «живущим» в пространстве с метрикой, задаваемой тензором $g_{\phi\phi^*}$. Оказывается, что эта метрика возникает при стереографическом отображении сферы в комплексную плоскость. Это отображение задается следующим преобразованием

$$Z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \tag{42}$$

Обратное преобразование

$$x_1 = \frac{z+z^*}{1+|z|^2}, \quad x_2 = \frac{z-z^*}{i(1+|z|^2)}, \quad x_3 = \frac{|z^2|-1}{|z^2|+1}. \tag{43}$$

Уравнения движения, следующие из лагранжиана (41), имеют вид

$$\partial^2\phi g_{\phi\overline{\phi}} + \partial_\mu\phi\left(\partial_\mu\overline{\phi}\frac{\partial g}{\partial\overline{\phi}} + \partial_\mu\phi\frac{\partial g}{\partial\phi}\right) = 0. \tag{44}$$

Отсюда следует, что если ϕ — аналитическая функция, то уравнения движения удовлетворяются, а простое решение, имеющее конечное действие определяется формулой

$$\phi(z) = \rho z. \tag{45}$$

Для этого решения топологический заряд

$$\frac{1}{2\pi}\int d^2x\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 1. \tag{46}$$

Вообще говоря, топологический заряд — это число, показывающее сколько раз ϕ отображает комплексную плоскость в самое себя. Для $\phi = z^n$, например, топологический заряд равен n.

В более общем случае $\phi az + b/(cz+d)$ является решением с действием 2π. Параметры $a, \ldots, d$ называются коллективными координатами. Они соответствуют трансляционным, сдвиговым, вращательным симметриям, а также специальным конформным преобразованиям, образующим группу $SL(2, C)$. Другими словами, любое заданное конечное действие нарушает симметрии.

3. Пример КХД. Для простоты будем обсуждать КХД с двумя легкими кварками. Массы u- и d-кварков $\sim (5 \div 10)$ МэВ гораздо меньше масштаба КХД, поэтому сначала рассмотрим теорию с массами кварков, равными нулю. Как известно, в этом пределе теория обладает $SU(2)_L \times SU(2)_R$-симметрией. Эта симметрия спонтанно нарушена, в результате имеются голдстоуновские бозоны — π-мезоны. Введем два дублета кварков и антикварков

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{d} \end{pmatrix}), \tag{47}$$

при этом две $SU(2)$-симметрии действуют независимо на q и $\overline{q}$. Параметром порядка для нарушения симметрии является конденсат

$$M_0 = \langle\overline{q}q\rangle. \tag{48}$$

Голдстоуновские бозоны можно рассматривать как небольшие флуктуации в пространстве средних значений, поэтому введем оператор

$$\mathsf{M} = \overline{q}q = M_0 e^{\frac{i\pi_a(x)\tau^a}{f_\pi}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Тогда кварковый массовый член в лагранжиане (для простоты $m_u = m_d = m_q$)

$$m_q\mathsf{M}. \tag{50}$$

При разложении M по степеням π/f_π очевидно, что минимум потенциала находится при $\pi_a = 0$. При разложении до второго порядка

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = m_q M_0. \tag{51}$$

Что касается симметрий, теория имеет также две $U(1)$-симметрии:

$$\begin{aligned} q &\to e^{i\alpha}q, & \overline{q} &\to e^{i\alpha}\overline{q}, \\ q &\to e^{-i\alpha}q,' & \overline{q} &\to e^{-i\alpha}\overline{q}. \end{aligned} \tag{52}$$

Первая из них соответствует барионному числу и не является киральной (не нарушена конденсатом). Вторая — аксиальная $U(1)_5$, она уже нарушена конденсатом. Поэтому, в дополнение к π-мезонам, должен быть другой голдстоуновский бозон. Наилучший кандидат — η-мезон, но, как мы увидим ниже, он слишком тяжелый для этой роли. Отсутствие этого четвертого (девятого для трех легких кварков) голдстоуновского бозона известно как $U(1)$-проблема. $U(1)_5$-симметрия связана с аномалией

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{2}{32\pi^2} F\tilde{F}. \tag{53}$$

Запишем снова правую часть в виде полной производной

$$F\tilde{F} = \partial_\mu K^\mu, \tag{54}$$

где

$$K_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(A_\nu^a F_{\rho\sigma}^a - \frac{2}{3} f^{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c\right). \tag{55}$$

Если этот член «ответственен» за отсутствие голдстоуновского бозона, то нужно показать, что в функциональном интеграле есть конфигурации, для которых правая часть (55) не убывает слишком быстро на бесконечности.

Для этого проще изучать евклидову версию теории. В функциональном интеграле

$$Z = \int [dA][dq][d\bar{q}]e^{-S} \tag{56}$$

нужно рассмотреть стационарные точки эффективного действия, являющиеся классическими решениями. Уравнения Янга–Миллса достаточно сложны, но для нахождения общего решения можно использовать следующую процедуру. Заметим, что действие Янга–Миллса удовлетворяет неравенству

$$\int (F \pm \tilde{F})^2 = \int (F^2 + \tilde{F}^2 \pm 2F\tilde{F}) = \int (2F^2 + 2F\tilde{F}) \geq 0. \tag{57}$$

Таким образом, действие ограничено интегралом $F\tilde{F}$, причем граница достигается при

$$F = \pm\tilde{F}, \tag{58}$$

т. е. когда калибровочное поле является самодуальным. Уравнение (58) — первого порядка, и его легко решить, если ограничиться $SU(2)$-подгруппой полной калибровочной группы. В качестве пробной функции выберем функцию, инвариантную как относительно обычных, так и глобальных $SU(2)$ калибровочных преобразований

$$A_\mu = f(r^2) + h(r^2)\vec{x}\cdot\vec{r}, \tag{59}$$

где использовано матричное обозначение для калибровочных полей. Можно поступить и следующим образом. Определим калибровочное преобразование

$$g(x) = \frac{x_4 + i\vec{x}\cdot\vec{\tau}}{r} \tag{60}$$

и

$$A_\mu = f(r^2) g\partial_\mu g^{-1}. \tag{61}$$

При подстановке в уравнения Янга–Миллса получаем

$$f = \frac{r^2}{r^2 + \rho^2}, \tag{62}$$

где ρ — произвольная величина с размерностью длины.

Вполне очевидно, почему для этого решения $\int \partial_\mu K^\mu$ не обращается в ноль: на бесконечности $A \sim 1/r$. Поскольку $F = \tilde{F}$, то для этого решения

$$\int F^2 = \int \tilde{F}^2 = 32\pi^2. \tag{63}$$

Этот результат можно интерпретировать на топологическом уровне: преобразование g соответствует отображению «сферы на бесконечности» на пространство калибровочной группы. Величина

$$\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F\tilde{F} \tag{64}$$

учитывает число отображений сферы на бесконечности на пространство группы. Таким образом, мы нашли важные вклады в функциональный интеграл, которые нарушают $U(1)$-симметрию. Как проявляется это нарушение симметрии? Если найдено классическое решение, то мы хотели бы проинтегрировать по малым флуктуациям относительно конфигураций, соответствующих этим решениям:

$$Z = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} e^{i\theta} \int [d\delta A][dq][d\overline{q}] e^{i\delta_2 S}. \tag{65}$$

В этом выражении S содержит фактор $1/g^2$. Флуктуации подавлены по отношению к лидирующему вкладу величиной g^2. Однопетлевой функциональный интеграл дает произведение определителей для фермионов и обратных корней квадратных из определителей для бозонов.

Рассмотрим сначала интеграл по фермионам. Если массы кварков равны нулю, то фермионные функциональные интегралы дают ноль, поскольку для каждого фермиона существует нулевая мода, т. е. как для q, так и для $\overline{q}$ имеются решения уравнений

$$\not{D} u = 0, \quad \not{D} \overline{u} = 0, \tag{66}$$

аналогично и для d, $\overline{d}$.

Решения (66) имеют вид

$$u = \frac{\rho}{(\rho^2 + (x - x_0)^2)^{3/2}} \xi, \tag{67}$$

где ξ — постоянный спинор.

Это значит, что, для того чтобы интеграл был отличен от нуля, нужно учесть столько вставок q и $\overline{q}$, сколько нужно для поглощения нулевых мод. Иными словами, ненулевые функции Грина должны иметь вид

$$\langle \overline{u} u \overline{d} d \rangle \tag{68}$$

и нарушать симметрию. Заметим, что симметрия нарушается именно так, как предсказывается уравнением аномалии:

$$\Delta Q_5 = 4 \frac{1}{\pi^2} \int d^4x F\tilde{F} = 4. \tag{69}$$

К сожалению, приведенное выражение не является самосогласованным. Трудность состоит в том, что среди вариаций полей, по которым нужно проинтегрировать,

содержатся изменения в локализации инстантона (трансляции), вращения инстантона и масштабные преобразования. С трансляциями проще всего — достаточно проинтегрировать по x_0. Аналогично интегрируется по ρ, при этом из якобиана возникает степень ρ, которую можно определить из размерных соображений. Для функции Грина (68), имеющей размерность шесть, получаем

$$\int d\rho\rho^{-7}. \tag{70}$$

Существует, однако, и дополнительная зависимость от ρ, поскольку квантовая теория нарушает масштабную симметрию. Эту зависимость можно понять, если учесть, что $g^2 = g^2(\rho)$ и

$$e^{-8\pi^2 g^2(\rho)} \simeq (\rho M)^{b_0} \tag{71}$$

для малых ρ. Для КХД с 3 сортами кварков $b_0 = 9$ и интеграл (70) расходится при больших ρ. Это означает, что интеграл определяется инфракрасной областью, где константа КХД становится большой. Итак, мы привели аргументы в пользу разрешения $U(1)$-проблемы в рамках КХД. Как обстоит дело с θ-зависимостью? Найдем сначала θ-зависимость вакуумной энергии. Чтобы получить ненулевой результат, нужно считать кварки массивными. Учитывая массу кварка как возмущение, получим

$$E(\theta) = C\Lambda^9_{\text{КХД}} m_u m_d \cos(\theta) \int d\rho\rho^{-3}\rho^9. \tag{72}$$

Снова мы получили зависимость от θ, не проводя конкретных вычислений. Невозможность проведения вычислений не удивительна: в КХД нет малого параметра. К счастью, для исследования $U(1)$-проблемы оказывается возможным использование других аргументов (скейлинговых, размерных).

4. Проблема сильного CP-нарушения. Разрешение $U(1)$-проблемы с помощью аномалии вызывает другую проблему. Поскольку $\int d^4xF\tilde{F}$ имеет физическое значение, то и θ-член в действии тоже должен иметь наблюдаемые следствия. θ-член CP-нечетен, поэтому в сильных взаимодействиях могли бы проявляться эффекты CP-нарушения. Эти эффекты должны исчезать в пределе нулевых масс кварков, так как в этом случае за счет переопределения полей можно исключить θ-зависимость из лагранжиана. В присутствии кварковых масс физические величины будут зависеть от θ.

Рассмотрим, например, вакуумную энергию. В КХД кварковый массовый член имеет вид:

$$L_m = m_u\overline{u}u + m_d\overline{d}d + \text{э.с.} \tag{73}$$

Независимо от аномалии, путем переопределения кварковых полей, величины m_u и m_d можно считать вещественными.

Можно действовать и по-другому: определить поля так, чтобы не было слагаемого $\theta F\tilde{F}$ в действии, но при этом появятся фазы в m_u и m_d. Очевидно, что при таком выборе есть определенный произвол. Если m_u и m_d одинаковые, то и фазы естественно выбрать одинаковыми. Ниже будет дано пояснение, как следует поступать, если массы неодинаковые.

Пусть θ — общая фаза лагранжиана

$$L_m = (m_u\overline{u}u + m_d\overline{d}d)\cos\frac{\theta}{2} + \text{э.с.} \tag{74}$$

Мы хотели бы трактовать этот член как возмущение. В первом порядке он вносит вклад в энергию основного состояния, пропорциональный вакуумному среднему. Как уже отмечалось выше, билинейные кварковые операторы имеют ненулевые вакуумные средние, т. е.

$$E(\theta) = (m_u + m_d)e^{i\theta}\langle\overline{q}q\rangle. \tag{75}$$

При низких энергиях единственными возбужденными степенями свободы являются пионы, поэтому параметризуем

$$\overline{q}q = \Sigma = \langle\overline{q}q\rangle e^{i\frac{\pi^a(x)\sigma^a}{2f_\pi}}. \tag{76}$$

Тогда кварковый массовый член

$$L_m = e^{i\theta}\,\mathrm{tr}\,M_q\Sigma. \tag{77}$$

Игнорируя сначала θ-член, получаем

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = (m_u + m_d)\langle\overline{q}q\rangle. \tag{78}$$

Поэтому вакуумная энергия как функция θ:

$$E(\theta) = m_\pi^2 f_\pi^2 \cos\theta. \tag{79}$$

Это выражение легко обобщается на случай трех легких кварков. Как видим, с величиной θ связана реальная физика. Вычислим теперь электрический дипольный момент нейтрона как функцию θ. На рис. 2 изображена диаграмма, в которой CP-нарушающая связь пиона с нейтроном вносит вклад в дипольный момент нейтрона.

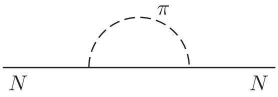


Рис. 2

Электрический дипольный момент нейтрона

$$d_n = g_{\pi NN}\frac{-\theta m_u m_d}{f_\pi(m_u + m_d)}\langle N_f|\overline{q}\tau^a q|N_i\rangle \ln(M_N/m_\pi)\frac{1}{4\pi^2}M_N. \tag{80}$$

Численное значение $d_n \simeq 5{,}2\cdot 10^{-16}\theta$ см. Экспериментальное ограничение на d_n приводит к величине $\theta < 10^{-10} \div 10^{-9}$.

Почему CP-нарушение в сильных взаимодействиях столь мало?

Вероятно, наиболее популярным объяснением малости θ является введение гипотетической частицы, называемой аксионом. Обратимся в выражении (75) к вакуумной энергии как функции θ. Эта энергия имеет минимум при $\theta = 0$, т. е. в CP-сохраняющей точке. Предположим, что имеется частица a (аксион), связанная с КХД:

$$L_{\text{аксион}} = (\partial_\mu a)^2 + \frac{(a/f_a + \theta)}{32\pi^2}F\tilde{F}, \tag{81}$$

где f_a — аксионная константа распада. Предположим, что теория обладает симметрией, называемой симметрией Печеи–Куина,

$$a \to a + \alpha \tag{82}$$

для постоянного α. Тогда, сдвигая поле a, можно исключить θ. Потенциальная энергия аксиона имеет минимум при $\theta = 0$. Таким образом, проблема сильного CP-нарушения находит свое разрешение. Масса аксиона

$$m_a^2 \simeq \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{f_a^2}. \tag{83}$$

Если $f_a \sim$ ТэВ, то масса $m_a \sim$ КэВ. При $f_a \sim 10^{16}$ ГэВ масса аксиона $m_a \simeq 10^{-9}$ эВ. Можно ли обнаружить аксион экспериментально? Аксион связан не только с $F\tilde{F}$ в КХД, но и с аналогичной величиной в КЭД. Это означает, что в сильном магнитном поле аксион способен превращаться в фотон. Кроме того, аксионы могли бы рождаться в ранней Вселенной.

ГЛАВА 3

КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

3.1. Введение

Существование слабых взаимодействий было постулировано для объяснения экспериментальных данных по временам жизни нейтрона, π-мезона и μ-мезона:

$$\begin{aligned} n &\to pe^-\overline{\nu}_e, & \tau_n &= 920 \text{ с}; \\ \pi^- &\to \mu^-\overline{\nu}_\mu, & \tau_{\pi^-} &= 2{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ с}; \\ \mu^- &\to e^-\overline{\nu}_e\nu_\mu, & \tau_{\mu^-} &= 2{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ с}. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти времена гораздо больше времен жизни частиц, распадающихся по сильным и электромагнитным взаимодействиям:

$$\Delta \to p\pi, \quad \tau_\Delta \simeq 10^{-23} \text{ с}; \tag{2}$$

$$\pi^0 \to \gamma\gamma, \quad \tau_{\pi^0} \simeq 10^{-16} \text{ с}. \tag{3}$$

Вообще история развития представлений о слабых взаимодействиях до создания электрослабой ($SU(2)_L \times U(1)_Y$) теории являет собой интересный пример взаимосвязи теории и эксперимента. В то время существовало множество феноменологических моделей, которые проверялись и отвергались при сравнении с экспериментальными данными. Среди этих теорий следует отметить: теорию Ферми, $V - A$-теорию Фейнмана и Гелл-Манна, а также IVB (промежуточный векторный бозон) теорию Ли, Янга и Глэшоу.

В 1957 году Швингер предложил модель, объединяющую электромагнитные и слабые взаимодействия. Эта модель была основана на группе $O(3)$ с триплетом калибровочных полей (V^+, V^-, V^0). Заряженные калибровочные бозоны ассоциировались со слабыми бозонами, нейтральный бозон V^0 — с фотоном. Заметим, что эта модель предложена задолго до установления $V - A$-структуры слабых токов.

Первая попытка учета $V - A$-структуры в калибровочной теории слабых взаимодействий была предпринята в 1958 г. Блудманом. В этой модели уже использовалась слабая $SU(2)$ изоспиновая группа с тремя векторными бозонами. При этом нейтральный векторный бозон был массивным, и именно он «отвечал» за слабые взаимодействия без обмена зарядом (нейтральные токи).

В 1961 году Глэшоу заметил, что для объединения слабых и электромагнитных взаимодействий не следует ограничиваться лишь $SU(2)$ изоспиновой структурой. Он предложил калибровочную группу $SU(2) \times U(1)$, причем $U(1)$ ассоциирована с лептонным гиперзарядом Y, слабым изоспином T и электрическим зарядом Q, которые связаны между собой формулой, аналогичной формуле Гелл-Манна–Нишиджимы ($Q = T_3 + Y/2$). В этой модели уже присутствовало четыре калибровочных бозона: триплет (W^1, W^2, W^3), относящийся к генераторам $SU(2)$ и нейтральное поле B, свя-

занное с $U(1)$. Заряженные слабые бозоны проявляют себя как линейные комбинации W^1 и W^2, а фотон и нейтральный слабый бозон Z^0 являются смесью W^3 и B. При этом массы $W^{\pm}$ и Z^0 вводились «руками». Однако эта процедура, как оказалось, нарушала калибровочную инвариантность теории. В 1967 г. С. Вайнберг и А. Салам в 1968 г. для придания масс калибровочным бозонам предложили использовать идею спонтанного нарушения симметрии и механизм Хиггса. Замечательно, что эта процедура сохраняет калибровочную инвариантность и делает теорию перенормируемой (т'Хоофт, 1971 г.). Обсудим более подробно структуру слабых взаимодействий и их закономерности. Затем будут рассмотрены более подробно основные идеи предшественников электрослабой теории.

3.2. Токи. Структура слабых токов. Матрица Кобаяши–Маскава

Электромагнитное взаимодействие можно описать как взаимодействие электромагнитного тока с фотонами. Пример упругого электромагнитного взаимодействия $ee \to ee$ изображен на рис. 1.

Аналогично электромагнитному взаимодействию, слабое взаимодействие можно рассматривать как взаимодействие слабого тока с промежуточными W^+-, W^-- и Z^0-бозонами. Слабые токи, связанные с испусканием и поглощением $W^{\pm}$-бозонов, называются заряженными токами, так как они изменяют электрические заряды входящих в них частиц. Пример таких токов приведен на рис. 2.

Источником Z^0-бозонов являются нейтральные токи $e\overline{e}$, $\overline{\nu}_\mu \nu_\mu$, $\overline{\mu}\mu$ и т. д., в которых входящие и выходящие частицы одинаковые. С нейтральными токами связано, например, рассеяние $\nu_\mu e \to \nu_\mu e$ (рис. 3).

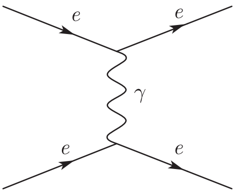


Рис. 1

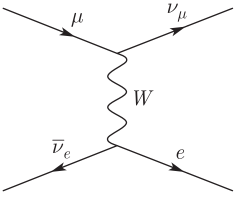


Рис. 2

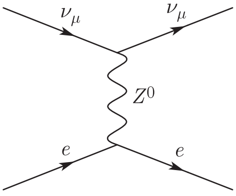


Рис. 3

Заряженные и нейтральные токи содержат лептонную и адронную части. Сейчас известно три поколения лептонов:

$$\begin{array}{c}\nu_e\\ e^-\end{array};\quad \begin{array}{c}\nu_\mu\\ \mu^-\end{array};\quad \begin{array}{c}\nu_\tau\\ \tau^-\end{array}. \tag{4}$$

У каждого заряженного лептона есть свое нейтрино. Лептон со своим нейтрино образует заряженный лептонный ток j_l:

$$j_l = \overline{e}\nu_e + \overline{\mu}\nu_\mu + \overline{\tau}\nu_\tau. \tag{5}$$

Очевидно, что при этом испускаются W^+-бозоны или поглощаются W^--бозоны. Эрмитово-сопряженный ток

$$j_l^+ = \overline{\nu}_e e + \overline{\nu}_\mu \mu + \overline{\nu}_\tau \tau \tag{6}$$

содержит испускание W^--бозонов или поглощение W^+-бозонов.

Нейтральный лептонный ток j_l^0 включает шесть слагаемых: $\overline{\nu}_e\nu_e$, $\overline{\nu}_\mu\nu_\mu$, $\overline{\nu}_\tau\nu_\tau$, $\overline{e}e$, $\overline{\mu}\mu$, $\overline{\tau}\tau$.

Лептонные токи описывают как процессы с участием лептонов, так и с участием антилептонов $(e^+, \mu^+, \tau^+, \overline{\nu}_e, \overline{\nu}_\mu, \overline{\nu}_\tau)$.

Как известно, адроны участвуют в слабых взаимодействиях. Рассмотрим это взаимодействие на кварковом уровне. Сейчас известно, как и в случае лептонов, три семейства кварков:

$$\begin{matrix} u & c & t \\ d & s & b. \end{matrix} \tag{7}$$

Наиболее хорошо изучены слабые превращения кварков первых двух семейств. В заряженный ток кварки входят не только со своими партнерами, но и с «чужими». Например, наряду с токами $\overline{u}d$ и $\overline{c}s$ существует и ток $\overline{u}s$. В самом деле, если бы тока $\overline{u}s$ не было, то странные частицы были бы абсолютно стабильны, а они распадаются. Например, ток $\overline{u}d$ определяет распад нейтрона (рис. 4).

Ток $\overline{u}s$ входит в распад Λ-гиперона (рис. 5).

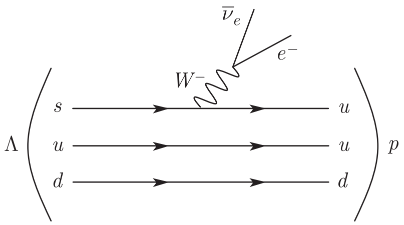


Рис. 4

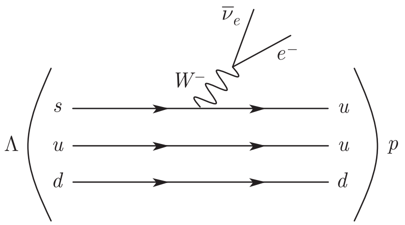


Рис. 5

Если каждый «верхний» кварк может переходить в каждый из низших кварков, то заряженный адронный ток j_h будет содержать девять членов: $\overline{u}d$, $\overline{u}s$, $\overline{u}b$, $\overline{c}d$, $\overline{c}s$, $\overline{c}b$, $\overline{t}d$, $\overline{t}s$, $\overline{t}b$. Девять компонент содержит и эрмитово-сопряженный ток.

Нейтральный адронный ток j_0^h содержит шесть компонент $\overline{u}u$, $\overline{d}d$, $\overline{s}s$, $\overline{c}c$, $\overline{b}b$, $\overline{t}t$. Нейтральные токи типа $\overline{d}s$, $\overline{u}c$, ... (горизонтальные превращения) отсутствуют.

Как известно, кварки несут цветовые степени свободы. Поскольку цветовая симметрия не нарушена, то слабые кварковые токи, как и адроны, являются бесцветными. Поэтому, например, ток $\overline{u}d$ представляет собой сумму трех слагаемых:

$$\overline{u}d = \overline{u}^i d_i = \overline{u}^1 d_1 + \overline{u}^2 d_2 + \overline{u}^3 d_3.$$

Суммирование производится по цветовым индексам.

Теория содержит 12 заряженных токов, взаимодействующих через W-бозоны и 12 нейтральных токов, взаимодействующих через Z-бозоны (рис. 6).

На этом рисунке символ, например, du означает либо ток $d\overline{u}$, либо эрмитово-сопряженный ток $u\overline{d}$. Каждый из 12-ти токов может взаимодействовать с 12-ю токами, поэтому полное число взаимодействий $12 \cdot 13/2 = 78$. Это же число и для возможных взаимодействий нейтральных токов. Каждое из 156 взаимодействий приводит к семейству родственных процессов. Например взаимодействие $(\mu\nu_\mu)(ud)$ связано с захватом мюона $\mu^- p \to n\nu$, а также с распадом π-мезона $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$, нейтринными реакциями типа $\nu_\mu +$ нуклон $\to \mu^- +$ адроны и т. д.

При низких энергиях слабые процессы описываются эффективным четырехфермионным лагранжианом:

$$L^{\text{weak}}(x) = L^{\text{ch}}(x) + L^{\text{n}}(x), \tag{8}$$

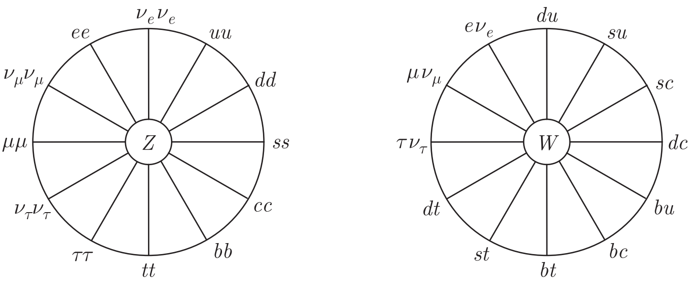


Рис. 6

здесь L^{ch} и L^{n} — лагранжианы взаимодействия заряженных и нейтральных токов:

$$\begin{aligned} L^{\text{ch}}(x) &= \frac{G}{\sqrt{2}} j^{+\alpha}(x) j_\alpha(x), \\ L^{\text{n}}(x) &= \frac{G\rho}{\sqrt{2}} j^{0\alpha}(x) j^0_\alpha(x), \end{aligned} \tag{9}$$

$j^\alpha(x)$ — заряженный ток (уменьшает заряд частицы на единицу), $j^{+\alpha}$ — эрмитово-сопряженный ток (увеличивает заряд на единицу), $j^{0\alpha}$ — нейтральный ток, он диагонален, поскольку преобразует частицу в самое себя. Фермиевская константа $G = 10^{-5}/m_p^2$. В стандартной теории электрослабых взаимодействий параметр $\rho = 1$.

Как видно из структуры лагранжианов L^{ch} и L^{n}, токи взаимодействуют в одной пространственно-временной точке.

Имеющиеся экперименты позволяют заключить, что заряженные токи имеют следующую структуру:

$$\overline{f} O^L_\alpha i,$$

где i и f — операторы начальной и конечной частиц (дираковские биспиноры), $\overline{f} = f^+\gamma_0$, а матрица O^L_α имеет следующий вид:

$$O^L_\alpha = \gamma_\alpha(1-\gamma_5), \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Ток $\overline{f} O^L_\alpha i$ является разностью вектора $V(\gamma_\alpha)$ и аксиального вектора $A(\gamma_5\gamma_\alpha)$. Поэтому о взаимодействии заряженных токов говорят как об универсальном $V - A$-взаимодействии.

Оператор O^L_α можно представить следующим образом:

$$O^L_\alpha = \gamma_\alpha(1-\gamma_5) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma_\alpha(1+\gamma_5). \tag{11}$$

Тогда ток

$$\overline{f} O^L_\alpha i = 2\overline{f}_L \gamma_\alpha i_L, \tag{12}$$

где $i_L = (1/2)(1-\gamma_5)i$, $\overline{f}_L = \overline{f}(1/2)(1+\gamma_5)$. Индекс L означает, что i_L и f_L являются левыми компонентами дираковских биспиноров. Состояние i_L соответствует частице, спин которой направлен против ее импульса. Такую частицу считают имеющей левую спиральность или левополяризованной. Если же спин частицы направлен по ее импульсу, то частица имеет правую спиральность. Заметим, что спиральность не является Лоренц-инвариантной величиной, если частица обладает ненулевой массой. В этом случае спиральность зависит от системы отсчета. Только для безмассовых частиц спиральность — точное квантовое число. Как видно из (12), заряженный ток

имеет такую структуру, что частицы участвуют в нем своими левыми компонентами, а античастицы — правыми компонентами.

Вернемся к обсуждению свойств заряженных токов. Как уже говорилось, лептоны входят в слабый ток симметрично, т. е.

$$j^l_\alpha = \overline{e} O^L_\alpha \nu_e + \overline{\mu} O^L_\alpha \nu_\mu + \overline{\tau} O^L_\alpha \nu_\tau. \tag{13}$$

Аналогично кварковый ток

$$j^h_\alpha = \overline{d'} O^L_\alpha u + \overline{s'} O^L_\alpha c + \overline{b'} O^L_\alpha t, \tag{14}$$

где d', s' и b' — ортонормированные линейные комбинации d-, s- и b-кварков.

В общем случае имеется девять коэффициентов, характеризующих эти комбинации. Эти коэффициенты можно выразить через три угла Эйлера θ_1, θ_2 и θ_3 и один фазовый множитель. В самом деле, кварковый ток можно представить в виде

$$j_\mu = \sum_i \overline{\alpha}^i_L \gamma_\mu V^{ik} \kappa^k_L, \tag{15}$$

где $\alpha^1 = u$, $\alpha^2 = c$, $\alpha^3 = t$, $\kappa^1 = d$, $\kappa^2 = s$, $\kappa^3 = b$ и

$$\overline{\alpha}_L = \overline{\alpha}\frac{1}{2}(1+\gamma_5), \quad \kappa_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\kappa,$$

V^{ik} — унитарная матрица 3×3.

Матрица V^{ik} — не единичная матрица, иначе заряженный ток имел бы структуру $\overline{u}d + \overline{c}s + \overline{t}b$. В этом случае s- и b-кварки были бы стабильными, поэтому стабильными оказались бы и странные частицы, и частицы, содержащие b-кварк. На самом деле, хорошо известно, что странные частицы и b-адроны нестабильны. Поэтому нужно рассматривать матрицу V наиболее общего вида:

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Девять матричных элементов этой матрицы можно выразить через три угла и фазу. В параметризации Кобаяши–Маскава используются углы Эйлера. Выберем декартову тройку координат (z, y, x) и сопоставим ей тройку кварков (d, s, b). Если произвести три поворота: на угол θ_3 вокруг оси oz, затем на угол θ_1 вокруг новой оси ox и, наконец, на угол θ_2 вокруг новой оси oy, то последовательность этих поворотов описывается произведением трех матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$.

Теперь нужно учесть фазовый множитель $e^{i\delta}$. Очевидно, что его нельзя включать как общий множитель, поскольку он будет нефизическим — его можно будет отождествить с ненаблюдаемой фазой одного из кварков.

Нетривиальный результат получается, например, в такой комбинации

$$(\overline{uct}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Перемножая матрицы, получим

$$(\overline{uct})\begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2-e^{i\delta}s_2s_3 & c_1c_2c_3+e^{i\delta}s_2c_3 \\ s_1s_2 & -c_1s_2c_3-e^{i\delta}c_2s_3 & -c_1s_2s_3+e^{i\delta}c_2c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Если $\delta \ll 1$ и все $s_i \ll 1$, то матрица V принимает вид

$$V=\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_1s_3 \\ -s_1 & 1 & s_3+s_2e^{i\delta} \\ s_1s_2 & -s_2-s_3e^{i\delta} & e^{i\delta} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Матрицу V в представлении Майани можно получить, совершая последовательные повороты на углы θ, β и γ вокруг осей ox, oy, oz (две последние оси при этом уже повернуты), причем второй поворот следует взять в обкладках из фазовых множителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\gamma & s_\gamma \\ 0 & -s_\gamma & c_\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $c_\gamma=\cos\gamma$, $s_\gamma=\sin\gamma$, $c_\beta=\sin\beta$, $c_\theta=\cos\theta$, $s_\theta=\sin\theta$.

Перемножая пять матриц, получаем

$$V=\begin{pmatrix} c_\beta c_\theta & c_\beta s_\theta & s_\beta e^{-i\delta} \\ -c_\gamma s_\theta-c_\theta s_\beta s_\gamma e^{i\delta} & c_\gamma c_\theta-s_\theta s_\beta s_\gamma e^{i\delta} & c_\beta s_\gamma \\ s_\theta s_\gamma-c_\theta c_\gamma s_\beta e^{i\delta} & -c_\theta s_\gamma-c_\gamma s_\theta s_\beta e^{i\delta} & c_\gamma c_\beta \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Матрица Майани удобнее с точки зрения описания экспериментальных данных, поскольку данные указывают на иерархию $s_\theta \gg s_\gamma \gg s_\beta$. Учитывая эту иерархию и пренебрегая величинами $1-c_\gamma$, $1-c_\beta$, $s_\theta s_\beta$ и $s_\gamma s_\beta$, получаем упрощенный вариант матрицы Майани

$$V=\begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & s_\beta e^{-i\delta} \\ -s_\theta & c_\theta & s_\gamma \\ s_\theta s_\gamma-s_\beta e^{i\delta} & -s_\gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Иногда используется и параметризация Вольфенштейна:

$$V=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho-i\eta) \\ -\lambda & 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Сравнивая последние две матрицы, получаем $s_\theta=\lambda$, $s_\gamma=A\lambda^2$, $s_\beta e^{-i\delta}=A\lambda^3 \times$ $\times\,(\rho-i\eta)$. Экспериментальные данные позволяют ограничить значения λ, A, ρ и η следующим образом:

$$\lambda=0{,}22,\quad A=1{,}0\pm 0{,}2,\quad \rho^2+\eta^2\le 0{,}3. \tag{25}$$

Однако иногда можно вообще не вводить никаких углов. Если имеется три поколения кварков, то остается лишь два независимых комплексных параметра, в качестве которых выбираются обычно V_{ub} и V_{td}. Из-за унитарности матрицы девяти

токов они удовлетворяют условию

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0. \tag{26}$$

Поскольку $V_{ud} \simeq V_{tb} \simeq 1$, а из экспериментальных данных

$$V_{cd}V_{cb}^* \simeq -A\lambda^3 \simeq (1.1 \pm 0.2) \cdot 10^{-2}, \tag{27}$$

то

$$V_{ub}^* + V_{td} = (1{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-2}. \tag{28}$$

Это условие можно изобразить в виде треугольника в комплексной плоскости (рис. 7).

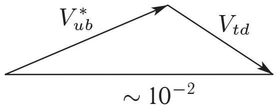


Рис. 7

Вернемся к обсуждению структуры заряженного тока. Если в выражении (14) положить $b' = b$, т. е. пренебречь переходами $\overline{b}u$ и $\overline{b}c$, то остается лишь один угол, характеризующий смешивание d- и s-кварков:

$$d' = d\cos\theta + s\sin\theta; \quad s' = -d\sin\theta + s\cos\theta. \tag{29}$$

Угол θ называется углом Кабиббо. Из экспериментальных данных по распадам странных частиц $\theta \simeq 13^\circ$.

Таким образом, в слабых взаимодействиях имеется следующее соответствие между лептонами и кварками:

$$\begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} u & c & t \\ d' & s' & b' \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Разнообразие свойств распадов адронов связано с тем, что в кварковые дублеты входят не частицы, имеющие определенные (и неодинаковые) массы, а их линейные комбинации. Подобное же перемешивание имеет место и в лептонном секторе, приводя к осцилляциям нейтрино (см. главу 6 части I).

Важно отметить, что нейтральные токи диагональны, т. е. переводят частицы в самих себя. Кроме того, нейтральные токи, наряду с левыми компонентами спиноров, содержат и правые. Отсутствие недиагональных токов в нейтральном токе подтверждается тем, что процессы, которые должны были идти с большими вероятностями, если бы такие члены существовали, на опыте не обнаружены. Речь идет о процессах $\mu \to ee\overline{e}$ или $\mu \to e\gamma$, в которых проявлялся бы ток μe, а также о процессах $K \to \pi e\overline{e}$, $K \to \pi\mu\overline{\mu}$, $K \to \pi\nu\overline{\nu}$, в которых проявлялся бы ток ds.

В наиболее общем виде нейтральный ток включает сумму 12-ти слагаемых

$$j_\alpha^0 = \sum_i (g_L^i \overline{\psi}_i O_\alpha^L \psi_i + g_R^i \overline{\psi}_i O_\alpha^R \psi_i), \tag{31}$$

где $i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b$; g_L^i и g_R^i — числовые коэффициенты. В электрослабой теории значения g_L^i и g_R^i определяются зарядами частиц:

$$\begin{aligned}
g_L^i &= \frac{1}{2}, & g_R^i &= 0, & i &= \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \\
g_L^i &= -\frac{1}{2} + \xi, & g_R^i &= +\xi, & i &= e, \mu, \tau, \\
g_L^i &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\xi, & g_R^i &= -\frac{2}{3}\xi, & i &= u, c, t, \\
g_L^i &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\xi, & g_R^i &= \frac{1}{3}\xi, & i &= d, s, b.
\end{aligned} \tag{32}$$

В этих выражениях $\xi = \sin^2\theta_W$, θ_W — угол Вайнберга. Из опытных данных $\xi = 0{,}23$.

3.3. Теория Ферми слабых взаимодействий

В 1934 году для описания β-распада нейтрона $n \to pe^-\overline{\nu}_e$ Ферми предложил 4-х фермионную теорию, лагранжиан которой

$$L_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\overline{p}(x)\gamma_\lambda n(x)][\overline{e}(x)\gamma^\lambda \nu_e(x)] + \text{к.с.} \tag{33}$$

В этом лагранжиане фермионные поля обозначены через $\overline{p}$, n, $\overline{e}$, ν, и величина $G_F = 1{,}167 \times 10^{-5}$ ГэВ$^{-2}$ — размерная фермиевская константа слабых взаимодействий. Лагранжиан Ферми подразумевает, как и в случае электродинамики, векторную структуру адронных $J_\lambda^{(n)}(x) = \overline{p}(x)\gamma_\lambda n(x)$ и лептонных $J_\lambda^{(e)}(x) = \overline{\nu}_e(x)\gamma_\lambda e(x)$ токов и постулирует локальный характер четырехлептонных взаимодействий: два тока взаимодействуют в одной пространственно-временной точке x.

Следует отметить, что из-за векторной структуры слабых токов в теории Ферми, эта теория не объясняет наблюдаемое экспериментально нарушение четности в слабых взаимодействиях.

3.4. Нарушение четности и V–A-форма заряженных слабых токов

Наблюдение распадов каонов на состояния с противоположными четностями $K^+ \to \pi^+\pi^0$ и $K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$ привело в 1956 году Ли и Янга к предположению о несохранении четности в слабых взаимодействиях, «ответственных» за эти распады. Нарушение четности открыто в 1957 г. (мадам Ву и коллабораторы) при анализе β-распада ядра кобальта $^{60}\text{Co} \to {}^{60}\text{Ni}^* e^- \overline{\nu}_e$, происходящего при распаде нейтрона $n \to pe^-\overline{\nu}_e$.

Ядра поляризовались внешним магнитным полем таким образом, чтобы угловые моменты Co и Ni, равные $J = 5$ и $J = 4$ соответственно, были выстроены в направлении внешнего поля. При сохранении углового момента, угловой момент системы электрон-антинейтрино должен быть $J(e\overline{\nu}_e) = 1$ и выстроен так же, как другие угловые моменты. Поэтому спины электрона и антинейтрино (это фермионы) должны быть выстроены в том же направлении. Электрон от распада всегда наблюдался движущимся в направлении, противоположном внешнему полю. По закону сохранения импульса, недетектируемое антинейтрино должно двигаться в направлении, противоположном направлению движения электрона. Это означает, что рожденный электрон имеет отрицательную *спиральность*, а антинейтрино — положительную спиральность. Таким образом, заряженные слабые токи, связанные с этим распадом, всегда порождают левые компоненты электронов и правые компоненты антинейтрино. Ненаблюдение левых антинейтрино, а также правых нейтрино в заряженных слабых взаимодействиях является сигналом нарушения четности, поскольку преобразование четности меняет левые фермионы на правые фермионы.

Как оказалось, слабый заряженный ток должен иметь «векторную минус аксиально-векторную форму»:

$$J_\mu \sim V_\mu - A_\mu. \tag{34}$$

Векторный и аксиально-векторный токи при преобразованиях четности трансформируются следующим образом:

$$V^\mu = \psi \xrightarrow{P} \begin{cases} +\overline{\psi}\gamma^0\psi; \\ -\overline{\psi}\gamma^k\psi, \quad k = 1,2,3, \end{cases} \qquad A^\mu = \gamma^5\psi \xrightarrow{P} \begin{cases} -\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi; \\ +\overline{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi, \quad k = 1,2,3. \end{cases} \tag{35}$$

Тогда произведения токов:

$$V_\mu V^\mu \xrightarrow{P} V^\mu V_\mu;$$
$$A_\mu A^\mu \xrightarrow{P} A^\mu A_\mu; \tag{36}$$
$$A_\mu V^\mu \xrightarrow{P} -A_\mu V^\mu.$$

Поэтому любая комбинация векторно- и аксиально-векторных токов, например, $J_\mu \sim \alpha V_\mu + \beta A_\mu$ будет приводить к нарушению четности в лагранжиане $L \sim J_\mu J^\mu$. При этом «максимальное» нарушение четности достигается, если $J_\mu \sim V_\mu - A_\mu$, поскольку

$$J_\mu J^{\mu+} \sim (V_\mu - A_\mu)(V^\mu - A^\mu) \xrightarrow{P} (V_\mu + A_\mu)(V^\mu + A^\mu), \tag{37}$$

а это происходит тогда, когда заряженные слабые взаимодействия связаны с левыми фермионами и правыми антифермионами. Это можно увидеть, переписав ток в терминах левых компонент полей:

$$J_\mu \sim V_\mu - A_\mu = \overline{\nu}_e \gamma_\mu (1-\gamma_5) e = 2(\overline{\nu}_e)_L \gamma_\mu e_L. \tag{38}$$

3.5. $V - A$-теория заряженных слабых взаимодействий

Лагранжиан $V - A$-теории слабых взаимодействий, предложенный в 1953 году Фейнманом и Гелл-Манном для двух поколений фермионов, имеет вид

$$L_{V-A} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^{cc}(x) J^{\mu cc+}(x), \tag{39}$$

где $J_\mu^{cc} = \overline{\nu}_e \gamma_\mu (1-\gamma_5) e + \overline{\nu}_\mu \gamma_\mu (1-\gamma_5)\mu + \overline{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d'$.

Заметим, что в структуру заряженного тока входит кварковое состояние d', а не d-кварк. Причина — смешивание кварков, т. е. $d' = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s$, где θ_c — угол Кабиббо.

Идея смешивания кварков возникла у Н. Кабиббо в 1963 году для объяснения подавления распада каона ($K^- \to \mu^-\overline{\nu}_\mu$) по сравнению с распадом пиона ($\pi^- \to \mu^-\overline{\nu}_\mu$), причем экспериментально фактор подавления составил $\sim 1/20$. Численное значение величины угла θ_c было получено при сравнении экспериментальных данных с предсказаниями ширины распадов K^-- и π^--мезонов в $V - A$-теории:

$$\frac{\Gamma(K^- \to \mu^-\overline{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^-\overline{\nu}_\mu)} \sim \frac{\sin^2\theta_c}{\cos^2\theta_c} \sim \frac{1}{20}. \tag{40}$$

Отсюда $\theta_c \simeq 13^o$.

Величину эффективной константы слабых взаимодействий G_F можно извлечь из экспериментальных данных по времени жизни μ-мезона: $\tau_\mu^{\exp} = 2{,}2 \times 10^{-6}$ с.

$V - A$-теория предсказывает для времени жизни μ-мезона

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \Gamma(\mu^- \to e^-\overline{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F m_\mu^5}{192\pi^3}. \tag{41}$$

$V - A$-теория хорошо описывала экспериментальные данные по слабым взаимодействиям до 1973 года, когда были открыты *нейтральные токи*. Отметим, что нейтральные токи отсутствуют в формулировке $V - A$-теории. Кроме того, $V - A$ имеет, как теория поля, существенные противоречия. Действительно, $V - A$-теория нарушает условие унитарности и является неперенормируемой теорией.

Нарушение унитарности в $V-A$-теории можно обнаружить, сравнивая предсказания $V-A$-теории сечения упругого рассеяния электрона на нейтрино

$$\sigma_{V-A}(\nu e^- \to \nu e^-) = \frac{G_F^2}{6\pi}s \tag{42}$$

с унитарным пределом для полных сечений, полученным из условия унитарности S-матрицы рассеяния: $SS^+ = S^+S = I$.

Поскольку $|a_J(s)|^2 < 1$ для $\forall J$, то

$$\sigma(s)_{\text{tot}} = \frac{16\pi}{s}\sum_J (2J+1)|a_J(s)| < \frac{16\pi}{s}\sum_J (2J+1). \tag{43}$$

Ясно, что в $V-A$-теории сечение упругого рассеяния при высоких энергиях нарушает унитарный предел уже при $\sqrt{s} \simeq 300$ ГэВ, поэтому такая теория не может быть самосогласованной.

Неперенормируемость $V-A$-теории видна при вычислении петлевых поправок к сечению. Эти поправки содержат квадратичные расходимости, которые не могут быть устранены переопределением параметров этой теории. Как и в случае с унитарностью, «плохое» поведение $V-A$-теории возникает при высоких энергиях. Поэтому $V-A$-теория не способна давать разумные предсказания при высоких энергиях, и её можно рассматривать лишь как «эффективную» теорию при достаточно малых энергиях.

3.6. Теория промежуточного векторного бозона

Теория промежуточного векторного бозона (IVB) слабых взаимодействий, предполагает, что эти взаимодействия осуществляются путем обмена массивным векторным бозоном со спином $S = 1$. Сначала предполагалось существование заряженных векторных бозонов $W^{\pm}$, связанных с заряженными слабыми токами, а затем (после открытия нейтральных токов) был введен нейтральный векторный бозон Z. Подчеркнем, что эти бозоны еще не были тогда калибровочными бозонами, связанными с какой-либо группой симметрии.

Лагранжиан IVB, включающий заряженные (CC) и нейтральные (NC) токи, имеет следующий вид

$$\begin{gathered} L_{\text{IVB}} = L_{\text{CC}} + L_{\text{NC}}, \\ L_{\text{CC}} = \frac{g}{\sqrt{2}}(J_\mu W^{\mu+} + J_\mu^+ W^{-\mu}), \\ L_{\text{NC}} = \frac{g}{\cos\theta_W} J_\mu^{\text{NC}} Z^\mu, \end{gathered} \tag{44}$$

где

$$\begin{gathered} J_\mu = \sum_l \overline{\nu}_l \gamma_\mu \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big) l + \sum_q \overline{q}\gamma_\mu \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big) q, \\ J_\mu^{\text{NC}} = \sum_{f=l,q} g_L^f \overline{f}\gamma_\mu \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big) f + \sum_{f\neq\nu} g_R^f \overline{f}\gamma_\mu \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big) f. \end{gathered} \tag{45}$$

В этих выражениях $W_\mu^{\pm}$ и Z_μ — заряженные и нейтральные векторные бозоны и g — безразмерная слабая константа связи. Угол θ_W, определяющий вращение в нейтральном секторе от «слабых собственных состояний» к состояниям с физическими

массами, связан со слабой константой связи и электрическим зарядом соотношением

$$g = \frac{e}{\sin\theta_W}. \tag{46}$$

Подчеркнем, что взаимодействие токов вследствие обмена промежуточными векторными бозонами, в отличие от $V-A$-теории, нелокально,. Кроме того, нейтральные токи имеет как $(V-A)$, так и $(V+A)$ компоненты, хотя эксперименты указывают на доминирование $(V-A)$ компонент.

Замечательно, что предсказанные в 1961 г. нейтральные токи, были обнаружены экспериментально в 1973 г. на установке GARGAMEL в ЦЕРН. Это было большим успехом IVB-теории, которая позже стала одним из «кирпичиков» стандартной модели.

Связь между параметрами IVB и $(V-A)$-теории можно установить, сравнивая предсказания этих теорий для сечения рассеяния $e\nu \to e\nu$ при низких энергиях $(\sqrt{s} < M_W)$:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \tag{47}$$

Однако IVB-теория не свободна от внутренних противоречий. Подобно $V-A$-теории, IVB-теория неперенормируема и нарушает при высоких энергиях унитарный предел. При энергиях $\sqrt{s} \ll M_W$ IVB хорошо описывает экспериментальные данные. Проблемы возникают при высоких энергиях. Так, проблема перенормируемости возникает при расчете петлевых поправок к рассеянию $e^+e^- \to e^+e^-$. Однопетлевые диаграммы расходятся при высоких энергиях из-за «плохого» поведения пропагатора W-бозона IVB-теории

$$(-i\Delta_W)_{\mathrm{IVB}} \xrightarrow{K^2 \gg M_W^2} \frac{1}{M_W^2}. \tag{48}$$

В *электрослабой калибровочной теории* пропагатор ведет себя как

$$(-i\Delta_W)_{\text{калибр.}} \xrightarrow{K^2 \gg M_W^2} \frac{1}{K^2}, \tag{49}$$

и расходимостей не возникает.

Нарушение унитарности в IVB-теории возникает при больших, чем в $V-A$-теории, энергиях.

Как видно из структуры IVB-теории, она не содержит «самовзаимодействие» векторных бозонов, характерное для неабелевых калибровочных теорий.

3.7. Построение электрослабой теории

3.7.1. Выбор калибровочной группы симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Для того чтобы аргументировать выбор группы симметрии электрослабой теории, рассмотрим $e^-\nu_e$ компоненту заряженного слабого тока, которую перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} J_\mu &= \bar{\nu}\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)e = \bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L = \bar{l}\gamma_\mu\sigma_+ l_L, \\ J_\mu^+ &= \bar{e}\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\nu = \bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L = \bar{l}_L\gamma_\mu\sigma_- l_L, \end{aligned} \tag{50}$$

где введены лептонные дублетные обозначения и σ_i $(i = 1, 2, 3)$ — матрицы Паули:

$$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \bar{l}_L = (\overline{\nu}_L \overline{e}_L), \quad \sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2), \tag{51}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Матрицы $T_i = \sigma_i/2$, $(i = 1, 2, 3)$ являются тремя генераторами группы $SU(2)$.

Отметим, что в заряженных токах присутствуют только два генератора T_1 и T_2. Третий генератор T_3 необходим, чтобы алгебра группы $SU(2)$ была замкнутой.

Тогда третья компонента тока, существенная для электрослабых взаимодействий,

$$J^3_\mu = \bar{l}_L \gamma_\mu \frac{\sigma_3}{2} l_L = \frac{1}{2}(\overline{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \overline{e}_L \gamma_\mu e_L). \tag{53}$$

Слабой изоспиновой группой, таким образом, является группа $SU(2)_L$. Индекс L означает, что эта группа преобразует левые компоненты токов. Матрицы σ_i реализуют алгебру слабого изоспина

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}. \tag{54}$$

Как видно, структурные константы $SU(2)$-алгебры представляют собой антисимметричный тензор ε_{ijk}.

По теореме Нетер, существуют три сохраняющихся слабых заряда

$$T^i = \int d^3x J^i_0(x), \quad i = 1, 2, 3. \tag{55}$$

Заметим, что введенные выше (J^3_μ) нейтральные токи не являются известными нейтральными токами $J^{\rm EM}_\mu$ и $J^{\rm NC}_\mu$. Более того, ни один из этих токов не имеет определенных трансформационных свойств по отношению к преобразованиям $SU(2)_L$, в то время как ток J^3_μ — имеет.

Для объединения электромагнитных и слабых взаимодействий, Глэшоу предложил включить электромагнитный ток, добавив к группе $SU(2)_L$ новую группу $U(1)$, отличающуюся от группы $U(1)_{\rm EM}$. Этой новой группой стала группа слабого гиперзаряда $U(1)_Y$ с одним генератором $Y/2$, который коммутирует с тремя $SU(2)_L$-генераторами. С группой $U(1)_Y$ ассоциирован слабый гиперзарядный ток J^Y_μ и, соответственно, слабый гиперзаряд Y. Эта схема содержит объединение электромагнитных и слабых взаимодействий, поскольку группа $U(1)_{\rm EM}$ является подгруппой группы электрослабых взаимодействий

$$U(1)_{\rm EM} \subset SU(2)_L \times U(1)_Y. \tag{56}$$

Соотношение между зарядами, связанными с тремя нейтральными токами $J^{\rm EM}_\mu$, J^3_μ и J^Y_μ, является аналогом формулы Гелл-Манна–Нишиджимы

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \tag{57}$$

где Q — электрический заряд, T_3 — слабый изоспин, Y — слабый гиперзаряд.

Соответствующее соотношение для токов

$$J^{\rm EM}_\mu = J^3_\mu + J^Y_\mu. \tag{58}$$

Поэтому, если использовать токи

$$\begin{aligned} J_\mu^{\mathrm{EM}} &= (-1)\overline{e}_L\gamma_\mu e_L + (-1)\overline{e}_R\gamma_\mu e_R, \\ J_\mu^3 &= \Big(-\frac{1}{2}\Big)\overline{e}_L\gamma_\mu e_L + \Big(\frac{1}{2}\Big)\overline{\nu}_L\gamma_\mu \nu_L, \end{aligned} \tag{59}$$

то можно получить J_μ^Y и ортогональную комбинацию J_μ^{NC} ($J_\mu^{\mathrm{NC}} \perp J_\mu^{\mathrm{EM}}$):

$$J_\mu^Y = 2\big(J_\mu^{\mathrm{EM}} - J_\mu^3\big) = (-1)\overline{e}_L\gamma_\mu e_L + (-2)\overline{e}_R\gamma_\mu e_R + (-1)\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L, \tag{60}$$

$$J_\mu^{\mathrm{NC}} = C_W^2 J_\mu^3 - S_W\frac{J_\mu^Y}{2} = \Big(-\frac{1}{2} + S_W^2\Big)\overline{e}_L\gamma_\mu e_L + (S_W^2)\overline{e}_R\gamma_\mu e_R + \Big(\frac{1}{2}\Big)\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L, \tag{61}$$

где $C_W = \cos\theta_W$, $S_W = \sin\theta_W$ и θ_W — «слабый» угол.

Заметим, что токи, связанные с физическими нейтральными бозонами (A_μ и Z_μ) — J_μ^{EM} и J_μ^{NC} и только последний ток «унаследовал» общее название — нейтральный ток.

Из соотношений, приведенных выше, можно получить величины соответствующих зарядов и констант связи. Например, из J_μ^{NC} получаются слабые нейтральные константы связи электронов и нейтрино

$$g_L^2 = -\frac{1}{2} + S_W^2, \quad g_R^e = S_W^2, \quad g_L^\nu = \frac{1}{2}, \quad g_R^\nu = 0. \tag{62}$$

Если учесть вклады всех кварков и лептонов трех поколений, то нейтральные токи запишутся в виде

$$\begin{aligned} J_\mu^Y &= \sum_f Y_{fL}\overline{f}_L\gamma_\mu f_L + \sum_f Y_{fR}\overline{f}_R\gamma_\mu f_R, \\ J_\mu^{\mathrm{NC}} &= \sum_f g_L^f\overline{f}_L\gamma_\mu f_L + \sum_{f\neq\nu} g_R^f\overline{f}_R\gamma_\mu f_R, \\ J_\mu^{\mathrm{EM}} &= \sum_f Q_f\overline{f}_L\gamma_\mu f_L + \sum_f Q_f\overline{f}_R\gamma_\mu f_R, \\ J_\mu^3 &= \sum_f T_3^f\overline{f}_L\gamma_\mu f_L, \end{aligned} \tag{63}$$

где $g_L^f = T_3^f - Q_f S_W^2$, $g_R^f = -Q_f S_W^2$.

Соответствующие квантовые числа фермионов первого поколения содержатся в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

Лептонные квантовые числа

Лептон	***T***	***T*₃**	***Q***	***Y***
ν_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
e_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e_R	0	0	-1	-2

Таблица 2

Кварковые квантовые числа

Кварк	***T***	***T*₃**	***Q***	***Y***
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
d_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
u_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
d_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Фермионы второго и третьего поколений имеют те же квантовые числа, что и соответствующие фермионы первого поколения.

Аналогично нейтральным, заряженные токи можно записать в виде

$$J_\mu = \sum_f \overline{f}_L \gamma_\mu \sigma_+ f_L. \tag{64}$$

Наконец, лагранжиан электрослабых взаимодействий в терминах токов и физических полей принимает вид

$$L = L_{\mathrm{CC}} + L_{\mathrm{NC}} + L_{\mathrm{EM}}, \tag{65}$$

где

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{CC}} &= \frac{g}{\sqrt{2}}(J_\mu W^{\mu +} + J_\mu^+ W^{\mu -}), \\ L_{\mathrm{NC}} &= \frac{g}{C_W} J_\mu^{\mathrm{NC}} Z^\mu, \\ L_{\mathrm{NC}} &= e J_\mu^{\mathrm{EM}} A^\mu. \end{aligned} \tag{66}$$

Отметим, что L_{CC} и L_{NC} такие же лагранжианы, как и в IVB-теории.

3.7.2. Калибровочная теория электрослабых взаимодействий. Стандартная модель содержит калибровочную теорию электрослабых взаимодействий, основанную на локальной калибровочной группе симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y$. При этом $SU(2)_L$ — группа слабого изоспина, действующая только на левые компоненты фермионов и $U(1)_Y$ — группа слабого гиперзаряда. Группа $SU(2)_L \times U(1)_Y$ имеет 4 генератора, три из которых — генераторы $SU(2)_L$: $T_i = \sigma_i/2$, $(i = 1, 2, 3)$ и четвертый генератор $U(1)_Y$: $rY/2$. Коммутационные соотношения для группы $SU(2)_L \times U(1)_Y$:

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k, \quad [T_i, Y] = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{67}$$

Левые фермионы преобразуются как дублеты по отношению к группе $SU(2)_L$:

$$f_L \to \exp(i\overrightarrow{T}\,\overrightarrow{\theta}) f_L, \quad f_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \ldots, \tag{68}$$

в то время как правые компоненты являются синглетами

$$f_R \to f_R, \quad f_R = e_R, u_R, d_R, \ldots \tag{69}$$

Число калибровочных бозонов, как обычно, равно числу генераторов калибровочной группы, т. е. четыре: W_μ^i $(i = 1, 2, 3)$ — это бозоны $SU(2)_L$, B_μ — гиперзарядный бозон группы $U(1)_Y$.

Далее, следуя калибровочному принципу, нужно «локализовать» группу симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y$, заменив производные полей соответствующими ковариантными производными.

Так, для фермионного поля f, его ковариантная производная, соответствующая калибровочной группе $SU(2)_L \times U(1)_Y$:

$$D_\mu f = \left(\partial_\mu - ig\vec{T}\vec{W}_\mu - ig'\frac{Y}{2}B_\mu\right) f, \tag{70}$$

где g — константа связи $SU(2)_L$, g' — константа связи $U(1)_Y$. Например, ковариантная производная для левых и правых компонент электрона

$$\begin{aligned} D_\mu e_L &= \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\vec{W} + i\frac{g'}{2}B_\mu\right) e_L, \\ D_\mu e_R &= (\partial_\mu + ig' B_\mu) e_R. \end{aligned} \tag{71}$$

Как и в случае КЭД и КХД, калибровочно-инвариантные электрослабые взаимодействия содержатся в слагаемом $i\overline{f}Df$.

3.7.3. Лагранжиан электрослабой теории (I). Для того чтобы получить *полный* лагранжиан электрослабой теории, нужно добавить к предыдущим фермионным слагаемым, содержащим «кинетическое» слагаемое и фермионные взаимодействия, кинетическое слагаемое калибровочных бозонов и самовзаимодействие калибровочных бозонов:

$$L_{EW} = L_f + L_G + L_{SBS} + L_{YM}, \tag{72}$$

где фермионная часть лагранжиана

$$L_f = \sum_{f=l,q} i\overline{f}Df, \tag{73}$$

бозонная

$$L_G = -\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^{\mu\nu}_i - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + L_{GF} + L_{FP}, \tag{74}$$

причем

$$\begin{aligned} W^i_{\mu} &= \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu + g\varepsilon^{ijk}W^j_\mu W^k_\nu, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \tag{75}$$

L_{GF} и L_{FP} — лагранжианы, фиксирующие калибровки и исключающие «духовые» состояния. Эти два слагаемых необходимы в любой калибровочной теории. Для краткости мы не будем воспроизводить их конкретную форму.

Оставшиеся два слагаемых, L_{SBS} и L_{YW} — лагранжиан сектора спонтанного нарушения симметрии и лагранжиан Юкавы. Как мы будем обсуждать ниже, эти слагаемые необходимы для обеспечения масс калибровочных бозонов (M_W и M_Z) и фермионов.

Можно показать, что лагранжиан L_{EW} (72) действительно инвариантен относительно $SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} f_L &\to \exp\bigl(i\vec{T}\vec{\theta}(x)\bigr) f_L, \\ f_R &\to f_R, \\ f &\to \exp(i\frac{Y}{2}\alpha(x))f, \\ W^i_\mu &\to W^i_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i(x) + \varepsilon^{ijk}\theta^j W^k_\mu, \\ B_\mu &\to B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu\alpha(x). \end{aligned} \tag{76}$$

Физические калибровочные бозоны $W^\pm_\mu$, Z_μ и A_μ получаются из собственных состояний электрослабых взаимодействий:

$$\begin{aligned} W^\pm_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu), \\ Z_\mu &= C_W W^3_\mu - S_W B_\mu, \\ A_\mu &= S_W W^3_\mu + C_W B_\mu, \end{aligned} \tag{77}$$

где $C_W = \cos\theta_W$, $S_W = \sin\theta_W$ и угол θ_W определяет вращение в нейтральном секторе. При этом имеют место следующие соотношения между константами связи:

$$g = \frac{e}{S_W}, \quad g' = \frac{e}{C_W}. \tag{78}$$

Важно отметить, что массовые слагаемые в лагранжиане $M_W^2 W_\mu W^\mu$, $(1/2)M_Z^2 Z_\mu Z^\mu$, $m_f \overline{f} f$ подавлены $SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочной инвариантностью. Это новая ситуация по сравнению с КЭД и КХД. Массы калибровочных бозонов должны генерироваться калибровочно-инвариантным способом. Спонтанное нарушение симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y$ и механизм Хиггса, к обсуждению которых мы приступаем, обеспечивают генерацию масс калибровочных бозонов.

3.8. Спонтанное нарушение симметрии и механизм Хиггса

3.8.1. Введение. Идея спонтанного нарушения симметрии (SSB) является одной из основополагающих идей стандартной модели. При SSB голдстоуновские возбуждения оказываются связанными с возникновением масс калибровочных бозонов. Если SSB относится к калибровочной симметрии (а не к глобальной), то это явление называется *механизмом Хиггса*. Этот механизм действительно способен на малых расстояниях описать слабые взаимодействия без нарушения калибровочной инвариантности. Экспериментальное обнаружение в 1983 году $W^\pm$- и Z-бозонов подтвердило существование SSB в электрослабых взаимодействиях.

В стандартной модели нарушение симметрии осуществляется за счет скалярного поля, которое приобретает ненулевое вакуумное среднее. В результате спектр масс содержит не только массивные векторные бозоны и фермионы, но и хиггсовскую частицу — нейтральную скалярную частицу, пока не обнаруженную экспериментально. Отметим, что концепция SSB несколько шире, чем она используется в стандартной модели. Далее мы обсудим основные идеи спонтанного нарушения симметрии в электрослабой теории.

3.8.2. Явление спонтанного нарушения симметрии — пример ферромагнетика. Обычно явление SSB определяют следующим образом. Физическая система имеет спонтанно нарушенную симметрию, если взаимодействия, определяющие динамику системы, обладают одной симметрией, а основное состояние — другой симметрией.

Примером, иллюстрирующим это явление, служит ферромагнетик вблизи точки Кюри T_C. Он описывается бесконечным набором спинов, чьи взаимодействия вращательно инвариантны, но основное состояние может быть, в зависимости от температуры T, двух типов:

а) $T > T_C$. Спины системы случайным образом ориентированы в пространстве, при этом средняя намагниченность $\vec{M} = 0$. Основное состояние этих дезориентированных спинов, очевидно, вращательно инвариантно.

б) $T < T_C$. Спины системы ориентированы в некотором произвольном направлении, при этом средняя намагниченность $\vec{M} \neq 0$ (спонтанное намагничение). Поскольку направления спинов произвольны, имеется бесконечное число основных состояний, при этом все они имеют одинаковую (минимальную) энергию. Ни одно из этих состояний не является вращательно инвариантным, так как имеется выделенное направление. Это пример SSB, поскольку взаимодействие спинов вращательно-инвариантно, а основное состояние этим свойством не обладает.

С теоретической точки зрения, безотносительно к источнику SSB, это явление можно описать простой математической моделью. В случае бесконечного ферромагнетика это *теория Гинзбурга–Ландау*.

Для $T \sim T_C$ намагниченность $\vec{M}$ мала, и свободную энергию ферромагнетика можно представить в виде:

$$\begin{gathered} U(\vec{M}) = (\partial_i \vec{M})(\partial_i \vec{M}) + V(\vec{M}), \\ i = 1, 2, 3, \\ V(\vec{M}) = \alpha_1 (T - T_C)(\vec{M}\vec{M}) + \alpha_2 (\vec{M}\vec{M})^2, \\ \alpha_1, \alpha_2 > 0. \end{gathered} \tag{79}$$

Намагниченность основного состояния получается из условия экстремума

$$\frac{\delta V(\vec{M})}{\delta M_i} = 0, \tag{80}$$

т. е.

$$\vec{M}\big[\alpha_1(T - T_C) + 2\alpha_2(\vec{M}\vec{M})\big] = 0. \tag{81}$$

Имеются два зависящих от температуры T решения этого уравнения. Если $T > T_C$, то $[\alpha_1(T - T_C) + 2\alpha_2(\vec{M}\vec{M})] > 0$, поэтому $\vec{M} = 0$. Это решение тривиально, оно соответствует первой из рассматриваемых выше ситуаций, когда основное состояние вращательно-инвариантно. Потенциал $V(\vec{M})$ имеет симметричную форму с единственным минимумом при $\vec{M} = 0$, где $V(0) = 0$. Потенциал представлен на рис. 8 для двумерного случая $\vec{M} = (M_x, M_y)$.

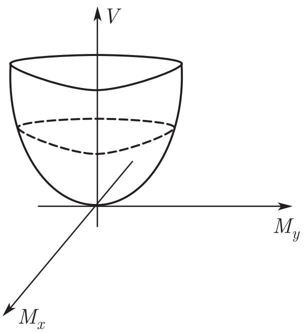


Рис. 8

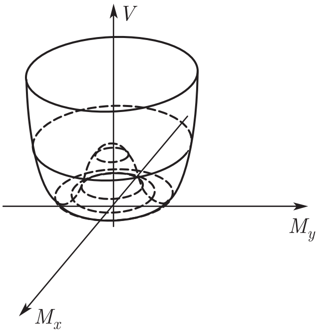


Рис. 9

Если $T < T_C$, то $\vec{M} = 0$ — локальный максимум, а условие минимума определяется условиями

$$\alpha_1(T - T_C) + 2\alpha_2(\vec{M}\vec{M}) = 0 \quad \text{и} \quad |\vec{M}| = \sqrt{\frac{\alpha_1(T_C - T)}{2\alpha_2}}. \tag{82}$$

Существует бесконечное число абсолютных минимумов с одинаковыми $|\vec{M}|$, но различной ориентацией вектора $\vec{M}$. Это соответствует случаю, когда система имеет бесконечное число вырожденных основных состояний, которые вращательно неинвариантны. Потенциал $V(\vec{M})$ имеет вид «мексиканской шляпы» (рис. 9).

3.8.3. Случай скалярного поля. Теорема Голдстоуна. Точные симметрии в теории приводят к законам сохранения. В этом случае и лагранжиан и вакуум (основное состояние) инвариантны относительно преобразований одной и той же группы. Однако есть и такие законы симметрии, которые нарушаются. Примеры — изоспин, странность, и т. д.

Эта ситуация может быть описана путем добавления к лагранжиану, обладающему некоторой симметрией, слагаемого, нарушающего эту симметрию:

$$L = L_{\mathrm{sym}} + \varepsilon L_{\mathrm{sb}}.$$

Таким образом, возможна ситуация, когда симметрии лагранжиана и основного состояния различны.

Продолжим анализ спонтанного нарушения симметрии рассмотрением простого примера — взаимодействующего скалярного поля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{83}$$

и потенциалом $V(\phi) = (1/2)\mu^2\phi^2 + (1/4)\lambda\phi^4$.

В теории фазового перехода в ферромагнетике гиббсовская плотность энергии является аналогом потенциала $V(\phi)$, а само поле ϕ играет роль средней спонтанной намагниченности M.

Этот лагранжиан инвариантен относительно дискретных преобразований:

$$\phi \to -\phi. \tag{84}$$

Инвариантен ли вакуум относительно этих преобразований? Вакуумное состояние (ϕ_0) можно получить из гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2\right] + V(\phi). \tag{85}$$

Заметим, что $\phi_0 = const$ соответствует минимуму $V(\phi)$ и энергии

$$\phi_0(\mu^2 + \lambda\phi_0^2) = 0. \tag{86}$$

Поскольку λ должна быть положительной, чтобы гарантировать ограниченность H, минимум зависит от знака μ. Для $\mu^2 > 0$ имеется только один вакуум при $\phi_0 = 0$, и он инвариантен относительно преобразований $\phi \to -\phi$ (рис. 10, *а*). При $\mu^2 < 0$ имеется два вакуума (рис. 10, *б*): $\phi_0^{\pm} = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$.

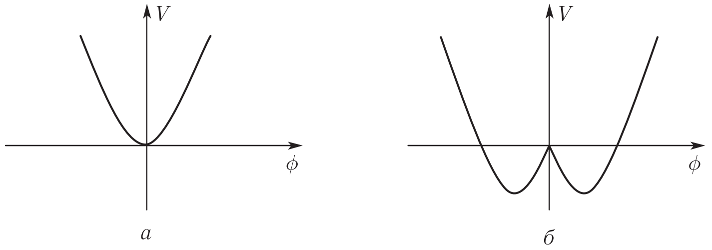


Рис. 10

Поскольку лагранжиан инвариантен относительно преобразований $\phi \to -\phi$, то выбор между ϕ_0^+ и ϕ_0^- несущественен. Однако, и это очень важно, если выбор сделан (например, $v = \phi_0^+$), то симметрия спонтанно нарушена, поскольку L инвариантен относительно преобразований $\phi \to -\phi$, а вакуум — неинвариантен.

Определим новое поле ϕ' следующим образом

$$\phi' = \phi - v, \tag{87}$$

где $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, для него вакуумное состояние $\phi'_0 = 0$. При этом можно рассматривать малые осцилляции вокруг вакуумного состояния.

В новых переменных лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' - \frac{1}{2}(\sqrt{-2\mu^2})^2 {\phi'}^2 - \lambda v {\phi'}^3 - \frac{1}{4}\lambda {\phi'}^4. \tag{88}$$

Этот лагранжиан описывает скалярное поле ϕ' с вещественной положительной массой $M'_\phi = \sqrt{-2\mu^2}$, но из-за наличия слагаемого ${\phi'}^3$ обладает симметрией, отличной от первоначальной.

Новые интересные явления возникают при спонтанном нарушении *непрерывных симметрий*.

Действительно, пусть рассматривается случай заряженного самовзаимодействующего скалярного поля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi), \tag{89}$$

и потенциалом

$$V(\phi^*\phi) = \mu^2(\phi^*\phi) + \lambda(\phi^*\phi)^2. \tag{90}$$

Заметим что лагранжиан (89) инвариантен относительно глобальных фазовых преобразований

$$\phi \to \exp(-i\theta)\phi. \tag{91}$$

Если переопределить комплексное поле через два вещественных поля

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \tag{92}$$

то лагранжиан в терминах новых полей запишется в виде

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) - V(\phi_1, \phi_2). \tag{93}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно $SO(2)$-вращений

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{94}$$

При $\mu^2 > 0$ вакуумное состояние $\phi_1 = \phi_2 = 0$, и для малых осцилляций относительно вакуумных значений лагранжиан упрощается

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \mu^2 \phi_i^2). \tag{95}$$

В этом случае имеются два скалярных поля ϕ_1 и ϕ_2 с массой $m^2 = \mu^2 > 0$.

Если же $\mu^2 < 0$, то число вакуумов — континуум, и расположены они при значениях

$$\langle |\phi|^2 \rangle = \frac{\langle \phi_1 \rangle^2 + \langle \phi_2 \rangle^2}{2} = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}. \tag{96}$$

При этом вакуумы $SO(2)$-инвариантны. Однако эта симметрия спонтанно нарушается при выборе определенного вакуума. Например, выберем

$$\begin{aligned}\phi_1 &= v,\\ \phi_2 &= 0.\end{aligned} \tag{97}$$

Рассмотрим малые возмущения вблизи вакуумных значений

$$\begin{aligned}\phi_1' &= \phi_1 - v;\\ \phi_2' &= \phi_2.\end{aligned} \tag{98}$$

В терминах новых введенных полей лагранжиан перепишется следующим образом:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1' - \frac{1}{2}(-2\mu^2){\phi_1'}^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2' + \text{слагаемые со взаимодействием.} \tag{99}$$

Определим в спектре частиц скалярное поле ϕ_1' как вещественное поле с положительной массой и безмассовый скалярный бозон ϕ_2'. Действительно, если рассмотреть массовую матрицу

$$M_{ij}^2 = \left.\frac{\partial^2 V(\phi_1', \phi_2')}{\partial\phi_i'\,\partial\phi_j'}\right|_{\phi'=\phi_0'}, \tag{100}$$

то вторая производная $V(\phi_1', \phi_2')$ в направлении ϕ_2' соответствует нулевому собственному значению массовой матрицы, в то время как в направлении ϕ_1' производная положительна. Этот пример проясняет *теорему Голдстоуна*: если непрерывная глобальная симметрия спонтанно нарушена, то теория содержит по одной безмассовой скалярной частице на каждый «нарушенный» генератор первоначальной группы симметрии.

Следствием спонтанного нарушения симметрии является наличие безмассовых мод. Например, для бесконечного ферромагнетика при $T < T_C$ — это спиновые волны. Эти моды называют намбу — голдстоуновскими бозонами или просто голдстоуновскими бозонами.

В общем случае теорема Голдстоуна доказывается следующим образом.

Рассмотрим лагранжиан N_G вещественных скалярных полей ϕ_i, составляющих N_G-мерный вектор ϕ:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi). \tag{101}$$

Пусть G — непрерывная группа, которая оставляет лагранжиан инвариантным, а вектор ϕ преобразует следующим образом:

$$\delta\phi_i = -i\alpha^a(T^a)_{ij}\phi_j. \tag{102}$$

Поскольку потенциал инвариантен относительно группы G, то

$$\delta V(\phi) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_i}\delta\phi_i = -i\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_i}\alpha^a(T^a)_{ij}\phi_j = 0. \tag{103}$$

Так как калибровочные параметры α^a произвольны, имеем N_G уравнений

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_i}(T^a)_{ij}\phi_j = 0, \quad a = 1, \ldots, N_G. \tag{104}$$

Вычисляя следующую производную, получим

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_k\partial\phi_i}(T^a)_{ij}\phi_j + \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_i}(T^a)_{ik} = 0. \tag{105}$$

Вблизи вакуумного состояния $\phi = \phi_0$ имеем

$$\left.\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_k \partial\phi_i}\right|_{\phi=\phi_0} (T^a)_{ij}\phi_j^0 = 0 \tag{106}$$

или, в терминах массовой матрицы,

$$M_{ki}^2 (T^a)_{ij}\phi_j^0 = 0. \tag{107}$$

Если выбрать основное состояние, описываемое подгруппой $g \subset G$ с размерностью n_g, то для каждого генератора подгруппы g

$$(T^a)_{ij}\phi_j^0 = 0, \quad a = 1, \ldots, n_g \leq N_G, \tag{108}$$

но для оставшихся $N_G - n_g$ генераторов нарушенной симметрии

$$(T^a)_{ij}\phi_j^0 \neq 0, \quad a = n_g + 1, \ldots, N_G, \tag{109}$$

т. е. действительно имеется $N_G - n_g$ нулевых собственных значений массовой матрицы — безмассовых голдстоуновских бозонов.

3.8.4. Спонтанное нарушение симметрии в квантовой теории поля. Пример КХД. Рассмотрим теперь случай КХД, которая помимо цветовой калибровочной симметрии, обладает глобальной симметрией, называемой *киральной симметрией*, и которая оказывается спонтанно нарушенной.

Для простоты выберем КХД с двумя сортами кварков (u, d).

Если массы $m_{u,d} = 0$, то лагранжиан КХД имеет киральную $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-симметрию, определяемую следующими преобразованиями

$$\begin{aligned} \psi_L &\to \psi'_L = u_L \psi_L, \\ \psi_R &\to \psi'_R = u_R \psi_R, \end{aligned} \tag{110}$$

где

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \tag{111}$$

и

$$u_L \in SU(2)_L, \quad u_R \in SU(2)_R. \tag{112}$$

Преобразования u_L и u_R можно записать в виде 2×2 матриц T_L^a и T_R^a $(a = 1, 2, 3)$ с генераторами Q_L^a и Q_R^a групп $SU(2)_L$ и $SU(2)_R$:

$$u_L = \exp(-i\alpha_L^a T_L^a), \quad u_R = \exp(-i\alpha_R^a T_R^a). \tag{113}$$

Однако физический вакуум КХД не инвариантен относительно полной $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$-группы, а лишь относительно ее подгруппы $SU(2)_V = SU(2)_{L+R}$ — подгруппы изоспина. Поэтому КХД с массами кварков $m_{u,d} = 0$ обладает киральной симметрией, которая спонтанно нарушена до изоспиновой симметрии

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \to SU(2)_V. \tag{114}$$

В природе $m_{u,d} \neq 0$, и это нарушает киральную симметрию. Однако массы кварков очень малы, поэтому говорят о «мягком» нарушении симметрии. Таким образом, киральная симметрия является приближенной симметрией КХД.

Следует сделать одно важное замечание. Откуда известно, что КХД-вакуум не обладает $SU(2)_L \times SU(2)_R$-симметрией? Предположим, что вакуум кирально инвариантен. Тогда возникает противоречие с экспериментом.

Действительно, если вакуум $|0\rangle$ — кирально инвариантен, то

$$u_L|0\rangle = 0, \quad u_R|0\rangle = 0 \quad \text{и} \quad T_L^a|0\rangle = 0, \quad T_R^a|0\rangle = 0, \tag{115}$$

поэтому

$$Q_L^q|0\rangle = 0, \quad Q_R^q|0\rangle = 0. \tag{116}$$

Если $|\psi\rangle$ — собственное состояние гамильтониана и оператора четности (например, имеющее положительную четность)

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad P|\psi\rangle = |\psi\rangle, \tag{117}$$

то для любого состояния $|\psi'\rangle$:

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_R^a - Q_L^a)|\psi\rangle, \tag{118}$$

$$H|\psi'\rangle = E|\psi'\rangle, \quad \text{но} \quad P|\psi'\rangle = -|\psi'\rangle. \tag{119}$$

Таким образом, если КХД-вакуум кирально инвариантен, то должна существовать пара вырожденных состояний, дублетов по четности $|\psi\rangle$ и $|\psi'\rangle$, которые связаны киральным преобразованием, но имеют противоположные четности. Отсутствие таких дублетов по четности в спектре адронов означает, что киральная симметрия спонтанно нарушена. Действительно, должны существовать генераторы киральной группы, для которых $Q^a|0\rangle \neq 0$. Этими генераторами являются три Q_5^a $(a = 1, 2, 3)$ генератора аксиальной группы $SU(2)_A$, для которых $Q_5^a|0\rangle \neq 0$.

По теореме Голдстоуна существуют три безмассовых голдстоуновских бозона $\pi^a(x)$ $(a = 1, 2, 3)$, идентифицируемых как три физических пиона. Поскольку $m_\pi \neq 0$, то это означает, что нарушение киральной симметрии действительно «мягкое» и является следствием $m_q \neq 0$.

3.8.5. Динамическое нарушение симметрии. В предыдущем разделе была показана эквивалентность условия $Q^q|0\rangle \neq 0$ и неинвариантности вакуума при преобразованиях симметрии с генераторами Q^a:

$$u|0\rangle \neq 0, \quad u = \exp(i\varepsilon^a\theta^a). \tag{120}$$

В квантовой теории поля имеется альтернативный способ проявления спонтанного нарушения симметрии: некоторые *полевые операторы* имеют ненулевые вакуумные средние

$$\exists\Phi_j : \langle 0|\Phi_j|0\rangle \neq 0. \tag{121}$$

Эти ненулевые вакуумные средние играют роль параметров порядка, сигнализирующих о существовании фазы, в которой симметрия вакуума нарушена. Природа этих полевых операторов может быть различной. Если это составные операторы, представляющие составные состояния, характеризуемые динамикой системы, то говорят о *динамическом нарушении симметрии*. Нарушение киральной симметрии в КХД — один из примеров подобного нарушения. В этом случае параметром порядка является *киральный конденсат* кварков и антикварков:

$$\langle 0|q\bar{q}|0\rangle \neq 0, \quad \text{если} \quad SU(2)_L \otimes SU(2)_R \to SU(2)_V. \tag{122}$$

Интересно отметить, что этот тип нарушения симметрии происходит и в более общих, основанных на группах симметрии $SU(N)$, теориях. Соответствующие калибровочные константы становятся большими на больших расстояниях, что приводит к нарушению симметрий, подобных киральной симметрии.

3.8.6. Механизм Хиггса. Как уже отмечалось выше, теорема Голдстоуна связана со спонтанным нарушением глобальных симметрий. Если SSB происходит в калибровочных теориях, то такое явление называется механизмом Хиггса. Суть этого механизма состоит в следующем: голдстоуновский бозон, который связан с нарушением глобальной симметрии, не проявляет себя в физическом спектре, а объединяется с безмассовым калибровочным бозоном. В результате теория имеет асимметричное вакуумное состояние, и возникают массивные векторные частицы. Число векторных бозонов, приобретающих массу, равно числу голдстоуновских бозонов.

Следует отметить три важных особенности механизма Хиггса для генерации масс:

1) сохраняется калибровочная симметрия лагранжиана;

2) сохраняется полное число поляризационных состояний;

3) при высоких энергиях не нарушается свойство перенормируемости безмассовых калибровочных теорий.

Обратимся вновь к теории электрослабых взаимодействий. Ниже мы увидим, как механизм Хиггса в $SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочной теории обеспечивает массы калибровочных бозонов $W^{\pm}$ и Z. При этом нужно учесть следующие условия:

а) лагранжиан модели симметричен относительно преобразований $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Поэтому любые другие слагаемые, которые добавляются к лагранжиану, должны сохранять эту симметрию;

б) хотелось бы, чтобы массы возникали у $W^{\pm}$- и Z-бозонов, а фотон оставался безмассовым. Поэтому нужны три голдстоуновских бозона ϕ^+, ϕ^- и χ, которые объединяются с безмассовыми калибровочными бозонами $SU(2)_L \times U(1)_Y$-симметрии;

в) поскольку $U(1)_{\text{EM}}$ — симметрия физического вакуума, она должна быть и симметрией вакуума электрослабой теории. Таким образом, из предыдущего рассмотрения следует, что для осуществления механизма Хиггса в электрослабой теории нужно добавить систему полей, которые взаимодействуют с калибровочным сектором $SU(2)_L \times U(1)_Y$-теории калибровочно-инвариантным способом, взаимодействуют между собой и обеспечивают желаемое нарушение симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{\text{EM}}$ с тремя ассоциированными голдстоуновскими бозонами (ϕ^+, ϕ^-, χ). Эта система полей называется *сектором нарушения симметрии* электрослабой теории.

3.9. Сектор нарушения симметрии электрослабой теории

Обозначим через $\{\phi\}$ набор полей, обеспечивающий нарушение симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{\text{EM}}$, при этом $\{\phi\}$ должна удовлетворять следующим условиям.

1) Это скалярные поля, чтобы при нарушении симметрии сохранялась Лоренц-инвариантность.

2) Поля должны быть комплексными, чтобы гамильтониан был эрмитовым.

3) Они должны иметь ненулевой изоспин и гиперзаряд, чтобы нарушалась $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$. При этом в качестве $\{\phi\}$ можно выбрать: а) *нелинейное* представление (преобразуется нелинейно по отношению к группе $SU(2)_L \times U(1)_Y$); б) *линейное* представление. Простейшее линейное представление — комплексный дублет. Другие возможности: комплексные триплеты, более чем один дублет и т. д. В частности, можно выбрать два комплексных дублета H_1 и H_2, как это делается в *минимальной суперсимметричной* стандартной модели.

4) Чтобы обеспечить $U(1)_{\text{EM}}$-симметрию вакуума, только нейтральные компоненты $\{\phi\}$ могут иметь ненулевые вакуумные средние.

5) Взаимодействия ϕ с калибровочным и фермионным секторами необходимо ввести калибровочно-инвариантным способом.

6) Самовзаимодействия ϕ задаются потенциалом $V(\phi)$, осуществляющим желаемое нарушение симметрии за счет ненулевых вакуумных средних $\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$; $\{\phi\}$ могут быть, в принципе, фундаментальными или составными полями.

7) Взаимодействия в $V(\phi)$ потенциале должны быть перенормируемы, чтобы обеспечить предсказания теории во всем интервале энергий.

Имея в виду все семь сформулированных выше условий, простейший выбор системы $\{\phi\}$ и лагранжиана в секторе нарушения симметрии:

$$\begin{gathered} L_{SBS} = (D_\mu\phi)^+(D^\mu\phi) - V(\phi), \\ V(\phi) = -\mu^2\phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2, \\ \lambda > 0, \\ \text{где} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad D_\mu\phi = \Big(\partial_\mu - \frac{1}{2}ig\vec{\sigma}\vec{W}_\mu - \frac{1}{2}ig'B_\mu\Big)\phi. \end{gathered} \tag{123}$$

Здесь $\{\phi\}$ — фундаментальный комплексный дублет с гиперзарядом $Y(\phi) = 1$ и $V(\phi)$ — простейший перенормируемый потенциал. $\vec{W}_\mu$ и B_μ — калибровочные поля $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$ и g, g' — соответствующие константы связи.

Интересно отметить подобие рассматриваемой теории теории Гинзбурга–Ландау. В зависимости от знака «массового» параметра $(-\mu^2)$ имеется две возможности для $\langle 0|\phi|0\rangle$, которые минимизируют потенциал $V(\phi)$:

а) $(-\mu^2) > 0$, тогда минимум потенциала при $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$. Вакуум $SU(2)_L \times U(1)_Y$-симметричен, следовательно, нарушения симметрии не происходит;

б) $(-\mu^2) < 0$, тогда минимум потенциала $|\langle 0|\phi|0\rangle| = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ и фаза ϕ произвольна. В этом случае имеется бесконечное число вырожденных вакуумов, соответствующих бесконечному числу фазовых состояний ϕ. Любой из этих вакуумов $SU(2)_L \times U(1)_Y$-несимметричен и $U(1)_{\text{EM}}$-симметричен. Нарушение $SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{\text{EM}}$ происходит в том случае, когда выбирается один из этих вакуумов. Как обычно, простейший выбор задается матричным элементом

$$|\langle 0|\phi|0\rangle| = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{фаза } \phi = 0, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \tag{124}$$

Эти две (симметричная и несимметричная) фазы электрослабой теории подобны двум фазам ферромагнетика, которые были описаны выше в контексте теории Гинзбурга–Ландау. В стандартной модели поле ϕ соответствует намагничению, а потенциал $V(\phi)$ — потенциалу $V(\vec{M})$. Параметр порядка в стандартной модели, таким образом, $\langle 0|\phi|0\rangle$.

Как уже было описано выше, механизм Хиггса сохраняет полное число поляризационных степеней свободы.

Действительно, *до* SSB имеем:

— 4 безмассовых калибровочных бозона $W^\mu_{1,2,3}$, B^μ;

— 4 безмассовых скаляра — 4 вещественные компоненты ϕ: ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4.

Полное число поляризационных состояний: $4 \cdot 2 + 4 = 12$.

После SSB:

— 3 массивных калибровочных бозона $W^\pm$, Z;

— 1 безмассовый калибровочный бозон γ;

— 1 массивный скаляр H.

Итого полное число поляризационных состояний: $3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 = 12$.

Заметим, что с самого начала было введено на одну степень свободы больше, чем необходимо: три вещественных компоненты поля ϕ или $\phi^{\pm} = (1/\sqrt{2})(\phi_1 \pm i\phi_2)$ и $\chi = \phi_3$ необходимы как голдстоуновские бозоны, а четвертая компонента ϕ_4 введена, для того чтобы заполнить комплексный дублет. После нарушения симметрии эта степень свободы трансформируется в массивную скалярную частицу — *хиггсовский бозон* H.

3.10. Лагранжиан электрослабой теории (II)

Чтобы получить спектр и массы частиц, перепишем полный лагранжиан в виде

$$L_{\text{EM}} = L_f + L_G + L_{SBS} + L_{YM}, \tag{125}$$

где L_f и L_G были определены раньше, а

$$\begin{gathered} L_{SBS} = (D_\mu\phi)^+(D^\mu\phi) + \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2, \\ L_{YM} = \lambda_e\bar{l}_L\phi e_R + \lambda_u\bar{q}_L\widetilde{\phi}u_R + \lambda_d\bar{q}_L\phi d_R + \\ + \text{компл. сопряж.} + \text{(для 2-го и 3-го поколений)}. \end{gathered} \tag{126}$$

В этих лагранжианах введены следующие обозначения:

$$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\phi} = i\sigma_2\phi^* = \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \tag{127}$$

Лагранжиан L_{SBS} необходим для того, чтобы обеспечить массы M_W и M_Z, а юкавский лагранжиан L_{YM} — массы фермионов (m_f).

Для получения спектра частиц из лагранжиана L_{SM}, нужно осуществить следующую последовательность действий:

1) фиксировать несимметричный вакуум, например,

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{128}$$

2) Физический вакуум строится путем допущения «малых осцилляций» вокруг этого вакуума. Для этого параметризуем

$$\phi(x) = \exp\left(\frac{i\vec{\xi}(x)\vec{\sigma}}{v}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{v + H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{129}$$

где $\xi(x)$ и $H(x)$ — «малые» поля.

3) Поскольку поле $\xi(x)$ — нефизическое (содержится в фазе), проведем следующую последовательность калибровочных преобразований:

$$\begin{gathered} \phi' = u(\xi)\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{v + H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad u(\xi) = \exp\left(-\frac{i\vec{\xi}\vec{\sigma}}{v}\right); \\ l'_L = u(\xi)l_L, \quad e'_R = e_R, \quad q'_L = u(\xi)q_L, \quad u'_R = u_R, \quad d'_R = d_R; \\ \left(\frac{\vec{\sigma}\vec{W}'_\mu}{2}\right) = u(\xi)\left(\frac{\vec{\sigma}\vec{W}_\mu}{2}\right)u^{-1}(\xi) - \frac{i}{g}\left(\partial_\mu u(\xi)u^{-1}(\xi)\right); \\ B'_\mu = B_\mu. \end{gathered} \tag{130}$$

4) «Слабые» собственные состояния путем вращения преобразуются в массивные собственные состояния, определяющие физические состояния калибровочных бозонных полей:

$$
\begin{aligned}
W_\mu^{\pm} &= \frac{{W'}^1_\mu \mp i{W'}^2_\mu}{\sqrt{2}},\\
Z_\mu &= C_W {W'}^3_\mu - S_W {B'}_\mu,\\
A_\mu &= S_W {W'}^3_\mu + C_W {B'}_\mu.
\end{aligned}
\tag{131}
$$

Массы частиц возникают за счет следующих членов в лагранжиане:

$$
\begin{aligned}
(D_\mu\phi')^{+}(D^\mu\phi') &= \left(\frac{g^2v^2}{4}\right)W_\mu^{+}W^{\mu-} + \frac{1}{2}\left(\frac{(g^2+{g'}^2)v^2}{4}\right)Z_\mu Z^\mu + \ldots;\\
V(\phi') &= \frac{1}{2}(2\mu^2)H^2 + \ldots;\\
L_{YM} &= (\lambda_e\frac{v}{\sqrt{2}})\overline{l'}_L {l'}_R + \left(\lambda_u\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\overline{u'}_L {u'}_R + (\lambda_d\frac{v}{\sqrt{2}})\overline{d'}_L {d'}_R + \ldots
\end{aligned}
\tag{132}
$$

Поэтому предсказываемые массы

$$
\begin{aligned}
&M_W = \frac{gv}{2};\quad M_Z = \frac{\sqrt{g^2+{g'}^2}\,v}{2};\\
&M_H = \sqrt{2}\mu;\quad m_e = \lambda_e\frac{v}{\sqrt{2}};\quad m_u = \lambda_u\frac{v}{\sqrt{2}};\\
&m_d = \lambda_d\frac{v}{\sqrt{2}},\ \ldots,\quad \text{где } v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}.
\end{aligned}
\tag{133}
$$

Наконец, после применения механизма Хиггса можно переписать L_{SBS} и L_{YM} в терминах физических скалярных полей и получить не только массовые члены, но и кинетический член, а также слагаемое, связанное со взаимодействием в хиггсовом секторе:

$$
L_{SBS} + L_{YM} \to L_H^{\text{free}} + L_H^{\text{int}} + \ldots,
\tag{134}
$$

где

$$
\begin{aligned}
L_H^{\text{free}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - \frac{1}{2}M_H^2H^2 \quad \text{и}\\
L_H^{\text{int}} &= -\frac{M_H^2}{2v}H^3 - \frac{M_H^2}{8v^2}H^4 + M_W^2W_\mu^{+}W^{\mu-}\times\\
&\times\left(1+\frac{2}{v}H+\frac{1}{v^2}H^2\right) + \frac{1}{2}M_Z^2Z_\mu Z^\mu\left(1+\frac{2}{v}H+\frac{1}{v^2}H^2\right).
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Отметим, что все массы выражены в единицах массового параметра v и констант связи g, g', λ, λ_e и т. д.

Взаимодействие H с фермионами и калибровочными бозонами пропорционально калибровочной константе связи и массам частиц:

$$
\begin{aligned}
f\overline{f}H &: -i\frac{g}{2}\frac{m_f}{M_W};\\
W_\mu^{+}W_\nu^{-}H &: igM_W g_{\mu\nu};\\
Z_\mu Z_\nu H &: \frac{ig}{C_W}M_Z g_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{136}
$$

Вакуумное среднее v можно определить из экспериментальных данных по μ-распаду. Приравнивая предсказанные ширины $\Gamma(\mu \to \nu_\mu \overline{\nu}_e e)$ в стандартной модели при низких энергиях ($q^2 \ll M_W^2$) и в $V - A$-теории, получаем

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2}, \tag{137}$$

отсюда

$$v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ ГэВ}. \tag{138}$$

Важно подчеркнуть, что величины M_W и M_Z были предсказаны задолго до их экспериментального обнаружения, при этом входными параметрами были θ_W, постоянная тонкой структуры α и фермиевская константа G_F. До начала работы LEP эти параметры были измерены с наибольшей точностью.

В отличие от сектора калибровочных бозонов, масса хиггса M_H и его константа связи λ не определяются в рамках стандартной модели ($\lambda = M_H^2/(2v^2)$). Кроме того, в стандартной модели не определена иерархия фермионных масс.

3.11. Теоретические ограничения на массу Хиггс-бозона

В этом разделе представим ограничения на массу M_H, диктуемые требованием самосогласованности теории.

3.11.1. Верхняя граница на M_H из условия унитарности. Условие унитарности матрицы рассеяния, а также приближение упругого рассеяния для полного сечения и оптическая теорема определяют ограничения на парциальные волновые амплитуды. Эти амплитуды, в свою очередь, примененные к описанию рассеяния хиггсовской частицы в стандартной модели, дают ограничения сверху на массу хиггса. Для иллюстрации рассмотрим простейший случай — рассеяние безмассовых скалярных частиц $1 + 2 \to 1 + 2$.

Амплитуду рассеяния можно представить в виде разложения по парциальным волнам

$$T(s, \cos\theta) = 16\pi \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) a_J(s) P_J(\cos\theta), \tag{139}$$

где P_J — полиномы Лежандра.

Соответствующее дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}|T|^2, \tag{140}$$

а упругое сечение

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{16\pi}{s} \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1)|a_J(s)|^2. \tag{141}$$

С другой стороны, из оптической теоремы, связывающей полное сечение с амплитудой упругого рассеяния на угол ноль, имеем

$$\sigma_{\text{tot}}(1 + 2 \to \text{все}) = \frac{1}{s} \operatorname{Im} T(s, \cos\theta = 1). \tag{142}$$

В приближении упругого рассеяния $\sigma_{\text{tot}} \simeq \sigma_{\text{el}}$, поэтому $\operatorname{Im} a_J(s) = |a_J(s)|^2$ для любого J. Это соотношение обычно называют «упругим условием унитарности для

парциальных амплитуд». Очевидно, что

$$|a_J|^2 \le 1, \quad 0 < \operatorname{Im} a_J < 1 \quad \text{и} \quad |\operatorname{Re} a_J| \le \frac{1}{2} \text{ для любого } J. \tag{143}$$

Эти условия — необходимые, но не достаточные условия упругой унитарности. Они подразумевают, что если хотя бы одно из них не удовлетворяется, то упругое условие унитарности тоже не выполняется.

Рассмотрим в стандартной модели рассеяние продольно поляризованных W-бозонов $W_L^+ W_L^-$ и найдем для него унитарные ограничения. Для $J = 0$ парциальная волна

$$a_0(W_L^+ W_L^- \to W_L^+ W_L^-) = \frac{1}{32\pi} \int\limits_{-1}^{+1} T(s, \cos\theta)\, d\cos\theta, \tag{144}$$

где амплитуда

$$\begin{aligned} T(W_L^+ W_L^- \to W_L^+ W_L^-) = -\frac{1}{v^2} \Bigg\{ & -s - t + \frac{s^2}{s - M_H^2} + \frac{t^2}{t - M_H^2} + \\ & + 2M_Z^2 + \frac{2M_Z^2 s}{t - M_Z^2} + \frac{2t}{s}(M_Z^2 - 4M_W^2) - \frac{8S_W^2 M_W^2 M_Z^2}{t(t - M_Z^2)} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{145}$$

Тогда в пределе больших энергий ($s \gg M_H^2, M_W^2$) парциальная волна

$$|a_0| \to \frac{M_H^2}{8\pi v^2}. \tag{146}$$

Наконец, используя унитарное условие $|\operatorname{Re} a_0| \le 1/2$, получаем

$$M_H < 860 \text{ ГэВ}. \tag{147}$$

Этот верхний предел основан на условии унитарности с использованием теории возмущений, поэтому условие (147) не следует рассматривать как абсолютный запрет на массу хиггса. Очевидно, для больших масс хиггса подход теории возмущений уже неприемлем. В этом случае самовзаимодействие хиггса становится сильным, и в ТэВ-ой области энергий должны проявляться новые физические явления. Например, могут, как в теории сильных взаимодействий, появиться новые резонансные состояния. По-видимому, эта новая физика и будет изучаться на ускорителе LHC.

3.11.2. Верхний предел на M_H из условия тривиальности. Тривиальность $\lambda\phi^4$-теории (например, скалярного сектора стандартной модели) означает, что определенное значение перенормированной константы $\lambda_R = 0$ является единственной фиксированной точкой теории. Но теория с $\lambda_R = 0$ имеет дело с невзаимодействующими частицами, и поэтому тривиальна. Это поведение можно проследить на однопетлевом уровне:

$$\begin{gathered} \lambda_R(Q) = \frac{\lambda_0}{1 - 3\lambda_0/(2\pi^2)\log(Q/\Lambda)}, \\ \lambda_0 = \lambda_R(Q = \Lambda). \end{gathered} \tag{148}$$

Если попытаться исключить обрезание Λ, выбрав предел $\Lambda \to \infty$, оставляя, однако, λ_0 конечным, получим, что $\lambda_R(Q) \to 0$ для любого конечного Q. Это обстоятельство есть не что иное, как следствие существования полюса Ландау в $\lambda\phi^4$-теориях.

Тривиальность сектора нарушения симметрии стандартной модели весьма обременительна для теории, поскольку для осуществления механизма Хиггса необходимо

иметь самовзаимодействующую скалярную систему. Чтобы выйти из этого противоречия, можно предположить, что хиггсовский потенциал $V(\phi)$ «работает» ниже определенного «физического» обрезания Λ_{phys}. Тогда $V(\phi)$ описывает эффективную низкоэнергетическую теорию, возникающую из (до сих пор неизвестной) фундаментальной физики с Λ_{phys} — характеристическим энергетическим масштабом. Как мы увидим ниже, это предположение определяет верхнюю границу на массу Хиггс-бозона M_H.

Предположим некоторую конкретную схему перенормировки параметров стандартной модели (хотя результаты не зависят от конкретной схемы). Пусть, например, хиггсовский массовый параметр перенормируется так, что

$$M_H^2 = 2\lambda_R(v)v^2, \tag{149}$$

где

$$\lambda_R(v) = \frac{\lambda_0}{1 - 3\lambda_0/(2\pi^2)\log(v/\Lambda_{\text{phys}})}. \tag{150}$$

Теперь, если мы хотим иметь потенциал $V(\phi)$ эффективной теории, следует фиксировать все перенормированные массы ниже масштаба обрезания, в частности, при $M_H < \Lambda_{\text{phys}}$. Однако для произвольных значений Λ_{phys} это невозможно. Увеличивая величину Λ_{phys}, уменьшаем M_H, и, наоборот, с уменьшением Λ_{phys}, M_H растет. Имеется точка пересечения, когда $M_H \simeq \Lambda_{\text{phys}}$. Это происходит на масштабе энергий ~ 1 ТэВ. Поскольку мы хотим иметь массу Хиггс-бозона ниже физического обрезания, то вводим ограничение

$$M_H^{1-\text{петля}} < 1 \text{ Тэв}. \tag{151}$$

Как и выше, эта оценка основана на теории возмущений и условии тривиальности теории. Более реалистический предел должен возникать при непертурбативном рассмотрении. Из решеточных вычислений следует оценка

$$M_H^{\text{lattice}} < 640 \text{ ГэВ}. \tag{152}$$

3.11.3. Нижняя граница на M_H из условия вакуумной стабильности. Поскольку асимметричный вакуум $SU(2)_L \times U(1)_Y$ зафиксирован, можно потребовать, чтобы этот вакуум был стабильным по отношению к квантовым поправкам. В принципе, квантовые поправки могли бы дестабилизировать асимметричный вакуум и трансформировать его в симметричный вакуум, где нет спонтанного нарушения симметрии. Это явление лучше проиллюстрировать в терминах эффективного потенциала с учтенными квантовыми поправками. Эффективный потенциал электрослабой теории в однопетлевом приближении при малых λ:

$$V_{\text{eff}}^{1-\text{loop}}(\phi) = -\mu^2\phi^+\phi + \lambda_R(Q_0)(\phi^+\phi)^2 + \beta_\lambda(\phi^+\phi)^2\log\left(\frac{\phi^+\phi}{Q_0^2}\right), \tag{153}$$

где

$$\beta_\lambda = \frac{d\lambda}{dt} \simeq \frac{1}{16\pi^2}\left[-3\lambda_t^4 + \frac{3}{16}\left(2g^4 + (g^2 + g'^2)^2\right)\right]. \tag{154}$$

Условие экстремума $\delta V_{\text{eff}}^{1-\text{loop}}/\delta\phi = 0$ приводит к двум возможным решениям:

а) тривиальный вакуум $\phi = 0$ и

б) нетривиальный вакуум $\phi = \phi_{\text{vac}} \neq 0$.

Если мы хотим, чтобы физический вакуум был нетривиальным, то должны допустить, что

$$V_{\text{eff}}^{1-\text{loop}}(\phi_{\text{vac}}) < V_{\text{eff}}^{1-\text{loop}}(0).$$

Однако величина потенциала в минимуме зависит от второй производной

$$M_H^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\delta^2 V}{\delta\phi^2}\right\}_{\phi=\phi_{\text{vac}}}, \tag{155}$$

и для малых M_H^2 $V(0) < V(\phi_{\text{vac}})$, а истинный вакуум меняется на тривиальный. Поэтому условие вакуумной стабильности дает нижнюю границу на массу Хиггс-бозона:

$$M_H^2 > \frac{3}{16\pi^2 v^2}(2M_W^2 + M_Z^4 - 4m_t^4).$$

Интересно, что для массы t-кварка $m_t > 78$ ГэВ эта граница исчезает, при этом $V_{\text{eff}}^{1-\text{loop}}$ становится неограниченным снизу! Очевидно, что при таких значениях m_t однопетлевое приближение становится неадекватным, и нужно учитывать двухпетлевые поправки к эффективному потенциалу. Эти поправки дают ограничения

$$M_H^{\text{вак.стаб.}} > 132 \text{ ГэВ}. \tag{156}$$

Эта оценка получена для $m_t = 170$ ГэВ и $\alpha_S = 0{,}117$ с неопределенностью $\Delta M_H \simeq$ $\simeq 5 \div 10$ ГэВ вследствие неопределенностей в величинах m_t и α_S.

3.12. Предсказания стандартной модели

В этом разделе будут рассмотрены предсказания стандартной модели и их сравнение с экспериментальными данными.

3.12.1. Массы калибровочных бозонов. До открытия $W^{\pm}-$ и Z-бозонов наиболее хорошо измеренными параметрами стандартной модели были α, G_F и $\sin^2\theta_W$. В настоящее время из атомных, молекулярных и ядерных данных получено

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{exp}}^{-1} &= 137{,}0359895 \pm 0{,}0000061, \\ G_F^{\text{exp}} &= (1{,}16639 \pm 0{,}000022)\cdot 10^{-5}\ \text{ГэВ}^{-2} \text{ из } \mu\text{-распада}. \end{aligned} \tag{157}$$

$\sin^2\theta_W$ был первоначально измерен в экспериментах по N-рассеянию.Отношение сечений для нейтральных и заряженных токов, как предсказывается в стандартной модели, является функцией $\sin^2\theta_W$:

$$\frac{\sigma_{\text{NC}}(\nu q \to \nu q)}{\sigma_{\text{CC}}(\nu q \to e q')} \sim f(\sin^2\theta_W). \tag{158}$$

Из сравнения с экспериментальными данными,

$$\sin^2\theta_W|_{\text{exp}} = 0{,}2255 \pm 0{,}0021. \tag{159}$$

Стандартная модель не предсказывает численных значений M_W и M_Z, но дает связь между соответствующими параметрами. Эти соотношения различны в «древесном» приближении и в однопетлевом приближении. Так, на древесном уровне

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{gv}{2}; \quad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2}; \\ g &= \frac{e}{S_W}; \quad \rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 C_W} = 1. \end{aligned} \tag{160}$$

Из этих соотношений имеем

$$
\begin{aligned}
M_W &= \left(\frac{\pi\alpha}{G_F\sqrt{2}}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin\theta_W}, \\
M_Z &= \left(\frac{\pi\alpha}{G_F\sqrt{2}}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin\theta_W \cos\theta_W},
\end{aligned} \tag{161}
$$

подставляя в эти выражения экспериментальные значения α, G_F и $\sin^2\theta_W$ получим

$$
M_W^{\text{tree}} = 78 \text{ ГэВ}, \quad M_Z^{\text{tree}} = 89 \text{ ГэВ}. \tag{162}
$$

В 1983 году $W^\pm$- и Z-бозоны были открыты на SPS ЦЕРН:

$$
M_W^{\text{SPS}} = (81 \pm 2) \text{ ГэВ}, \quad M_Z^{\text{SPS}} = (93 \pm 3) \text{ ГэВ}. \tag{163}
$$

В настоящее время массы $W^\pm$- и Z-бозонов известны с лучшей точностью

$$
\begin{aligned}
M_W^{\text{exp}} &= (80{,}41 \pm 0{,}09) \text{ ГэВ } (p\overline{p}), \\
M_W^{\text{exp}} &= (80{,}37 \pm 0{,}09) \text{ ГэВ (LEP)}, \\
M_Z^{\text{exp}} &= (91{,}1867 \pm 0{,}0021) \text{ ГэВ (LEP)}.
\end{aligned} \tag{164}
$$

3.12.2. Распады калибровочных бозонов. $W^\pm$- и Z-бозоны стандартной модели способны распадаться на кварки или лептоны. Основным каналом распада является распад на кварки, поскольку присутствует цветовой фактор N_C, которого нет в лептонных распадах. В древесном приближении предсказания парциальных ширин (пренебрегая массами фермионов):

$$
\begin{aligned}
\Gamma(W^+ \to e^+\nu_e) &= \frac{g^2}{48\pi} M_W = \frac{G_F M_W^3}{6\sqrt{2}\pi} = 0{,}232 \text{ ГэВ}, \\
\Gamma(W^+ \to \mu^+\nu_\mu) &= \Gamma(W^+ \to \tau^+\nu_\tau) = \Gamma(W^+ \to e^+\nu_e), \\
\Gamma(W^+ \to u_i\overline{d}_j) &= N_C |V_{ij}|^2 \frac{G_F M_W^3}{6\sqrt{2}\pi} = 0{,}232 N_C |V_{ij}|^2 \text{ ГэВ}, \\
\Gamma(Z \to f\overline{f}) &= K_f \frac{G_F M_Z^3}{\sqrt{2}\pi} (g_{Vf}^2 + g_{Af}^2) = 0{,}3318 K_f (g_{Vf}^2 + g_{Af}^2) \text{ ГэВ},
\end{aligned} \tag{165}
$$

где V_{ij} — элементы матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава и

$$
\begin{aligned}
K_f = 1, \quad f = l, \nu; \quad K_f = N_C, \quad f = q; \\
g_{Vf} = T_3^f - 2Q^f S_W^2; \quad g_{Af} = T_3^f.
\end{aligned} \tag{166}
$$

В табл. 3 показаны предсказания стандартной модели для полных ширин Z и $W^\pm$ — Γ_Z и Γ_W и их отношения

$$
R_e = \frac{\Gamma(Z \to \text{адроны})}{\Gamma_e}, \quad R_b = \frac{\Gamma(Z \to b\overline{b})}{\Gamma(Z \to \text{адроны})}, \quad R_c = \frac{\Gamma(Z \to c\overline{c})}{\Gamma(Z \to \text{адроны})}. \tag{167}
$$

Как видно из этой таблицы, стандартная модель дает очень хорошо согласующиеся с экспериментом значения параметров. С другой стороны видно, что некоторые предсказания стандартной модели на древесном уровне все-таки не соответствуют эксперименту (выходят за стандартное отклонение). Таким образом, при сравнении с экспериментом необходимо учитывать радиационные поправки. В настоящее время такое сравнение производится уже с учетом радиационных поправок.

Таблица 3

Предсказания стандартной модели и их сравнение с экспериментальными данными

Параметр	**Стандартная модель (древесный уровень)**	**Эксперимент**
Γ_Z	2,474	2,4948 ±0,0025
Γ_W	2,09	2,06 ±0,06
R_e	20,29	20,765 ±0,026
R_b	0,219	0,21656 ±0,00074
R_c	0,172	0,1733 ±0,0044

Универсальность лептонных связей W-бозонов можно проверить и косвенно в слабых распадах, осуществляемых за счет заряженных токов. Сравнивая измеряемые ширины лептонных или полулептонных распадов, отличающихся ароматом лептона, можно убедиться в том, что взаимодействие лептонов с W-бозоном действительно универсально, т. е. $g_e = g_\mu = g_\tau = g$. Из приведенной ниже таблицы следует, что универсальность лептонных заряженных токов выполняется с точностью $\simeq 0{,}2\%$.

Таблица 4

	$\Gamma_{\tau\to\nu_\tau\mu\overline{\nu}_\mu}/\Gamma_{\mu\to\nu_\tau e\overline{\nu}_e}$	$\Gamma_{\pi\to\mu\overline{\nu}_\mu}/\Gamma_{\pi\to e\overline{\nu}_e}$	$\Gamma_{W\to\mu\overline{\nu}_\mu}/\Gamma_{W\to e\overline{\nu}_e}$
$\lvert g_\mu/g_e\rvert$	$0{,}9999 \pm 0{,}0020$	$1{,}0017 \pm 0{,}0015$	$0{,}997 \pm 0{,}010$

	$\Gamma_{\tau\to\nu_\tau e\overline{\nu}_e}/\Gamma_{\mu\to\nu_\mu e\overline{\nu}_e}$	$\Gamma_{\tau\to\nu_\tau\pi}/\Gamma_{\pi\to\mu\overline{\nu}_\mu}$	$\Gamma_{\tau\to\nu_\tau K}/\Gamma_{K\to\mu\overline{\nu}_\mu}$	$\Gamma_{W\to\tau\overline{\nu}_\tau}/\Gamma_{W\to\mu\overline{\nu}_\mu}$
$\lvert g_\tau/g_\mu\rvert$	$1{,}0004 \pm 0{,}0023$	$0{,}9999 \pm 0{,}0036$	$0{,}979 \pm 0{,}017$	$1{,}037 \pm 0{,}014$

	$\Gamma_{\tau\to\nu_\tau\mu\overline{\nu}_\mu}/\Gamma_{\mu\to\nu_\mu e\overline{\nu}_e}$	$\Gamma_{W\to\tau\overline{\nu}_\tau}/\Gamma_{W\to e\overline{\nu}_e}$
$\lvert g_\tau/g_e\rvert$	$1{,}0002 \pm 0{,}0022$	$1{,}034 \pm 0{,}014$

Другой интересной величиной в распаде Z-бозона является ширина распада на нерегистрируемые моды

$$\frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} = \frac{N_\nu \Gamma(Z \to \overline{\nu}\nu)}{\Gamma_l} = \frac{2N_\nu}{(1 - 4\sin^2\theta_W)^2 + 1}, \tag{168}$$

нормируемая на лептонную ширину. Сравнение с измеряемой величиной $\Gamma_{\text{inv}}/\Gamma_l = 5{,}942 \pm 0{,}016$ дает весомые аргументы в пользу существования трех сортов легких нейтрино.

3.13. Физика топ-кварка

Масса t-кварка не предсказывается стандартной моделью. На древесном уровне можно получить соотношение

$$m_t = \lambda_t \frac{v}{\sqrt{2}} = \lambda_t \left(\frac{1}{2\sqrt{2}G_F}\right)^{1/2}, \tag{169}$$

выражающее m_t через юкавскую константу связи λ_t. Однако λ_t, как и другие юкавские константы, в стандартной модели не определена.

Существование топ-кварка никогда не подвергалось сомнению, поскольку этот кварк необходим как составная часть третьего поколения. С одной стороны, топ-кварк нужен для того, чтобы избежать нежелательных нейтральных токов, изменяющих

аромат (FCNC), с другой — чтобы избежать $SU(2)_L \times U(1)_Y$-аномалий (см. приложение 2 к главе 4).

Топ-кварк был открыт в 1994 году на $p\overline{p}$-коллайдере Фермилаб. Современное значение массы топ-кварка

$$m_t^{\text{exp}} = (173{,}8 \pm 5{,}0)\ \text{ГэВ}. \tag{170}$$

Замечательно, что масса t-кварка гораздо больше других фермионных масс. В стандартной модели нет ответа на вопрос: почему t-кварк столь тяжелый?

Основной модой распада t-кварка является его распад $t \to W^+ b$, ширина этого распада

$$\Gamma(t \to W^+ b) = \frac{G_F m_f^3}{8\pi\sqrt{2}} |V_{tb}|^2 \left(1 - \frac{M_W^2}{m_f^2}\right)\left(1 + \frac{2M_W^2}{m_f^2}\right) \simeq 2\ \text{ГэВ}. \tag{171}$$

Однако экспериментальных данных по полным и парциальным ширинам распада t-кварка пока нет.

Очевидно, что из имеющихся ускорителей t-кварк можно получить только на Тэватроне. Несомненно, что будущий ускоритель LHC даст много новой информации о свойствах t-кварка.

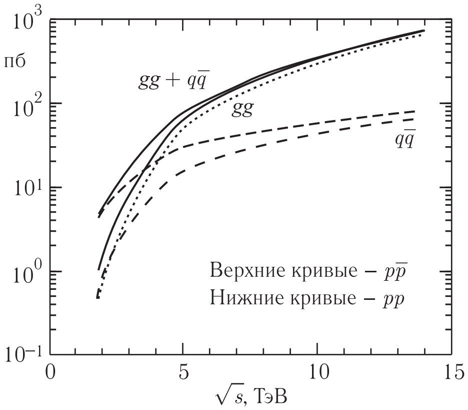


Рис. 11

На рис. 11 представлены сечения рождения $t\overline{t}$ на Тэватроне и LHC для различных каналов. Очевидно, что процесс слияния легких кварков и антикварков $q\overline{q} \to t\overline{t}$ доминирует на Тэватроне, в то время как глюон-глюонное слияние $gg \to t\overline{t}$ доминирует для LHC.

3.14. Хиггсовский бозон и его поиски на коллайдерах

Масса Хиггс-бозона в стандартной модели не предсказывается. Выше мы получили ограничения на M_H из условий унитарности, тривиальности и вакуумной стабильности. Механизм Хиггса связывает M_H с константой λ и вакуумным средним $v = 246$ ГэВ:

$$M_H = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2v^2\lambda}. \tag{172}$$

К сожалению, λ неизвестна, поэтому M_H не определена. Поиски Хиггс-бозона на LEP позволили ограничить массу хиггса снизу: $M_H > 114{,}4$ ГэВ.

Константа связи Хиггс-бозона пропорциональна некоторому масштабу масс. Взаимодействие $Hf\overline{f}$ растет линейно с массой фермиона, а HWW- и HZZ-вершины пропорциональны M_W^2 и M_Z^2. Поэтому наиболее вероятной модой распада будет мода распада на наиболее тяжелое конечное состояние. На рис. 12 изображены бренчинги распада Хиггс-бозона как функции его массы.

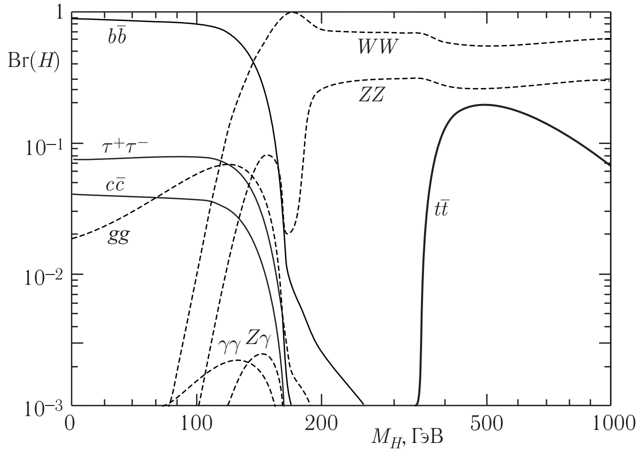


Рис. 12

Распад $H \to b\bar{b}$ доминирует ниже порога образования W^+W^-. За этим порогом основные каналы распада $H \to W^+W^-$ и $H \to ZZ$. При $M_H > 2m_t$ имеется распад $H \to t\bar{t}$. Для распада $H \to t\bar{t}$ константа связи Хиггс-бозона пропорциональна первой степени m_t.

Полная распадная ширина Хиггс-бозона растет с увеличением M_H. Тяжелый хиггс становится очень широким. При $M_H = 600$ ГэВ $\Gamma_H \simeq 100$ ГэВ, а для $M_H = 1$ ТэВ Γ_H сравнима с массой хиггса (рис. 13).

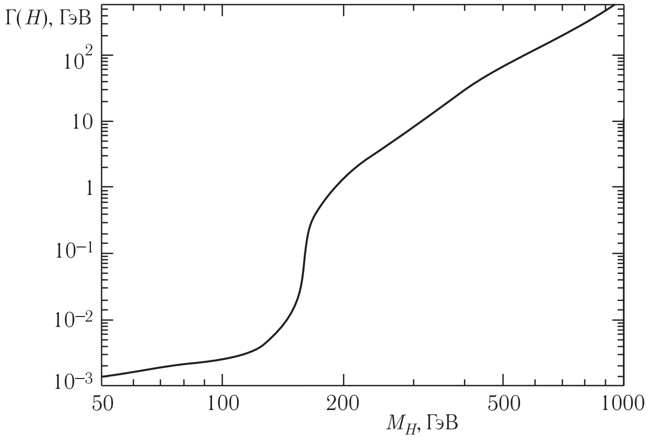
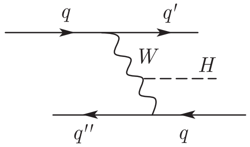


Рис. 13

На адронных коллайдерах Хиггс-бозоны способны рождаться в четырех различных процессах:

1) глюон-глюонное слияние $gg \to H$, осуществляемое за счет петлевого вклада (в основном) t-кварка;

2) $q'q''$ слияние векторных бозонов в процессе $qq \to qqH$:



3) ассоциированное рождение хиггса с тяжелыми калибровочными бозонами $qq \to W/ZH$;

4) совместное рождение хиггса с тяжелыми кварками: $qq, gg \to ttH$, $gg, qq \to bbH$.

Зависимость сечения образования Хиггс-бозона в указанных процессах от его массы для условий LHC показана на рис. 14.

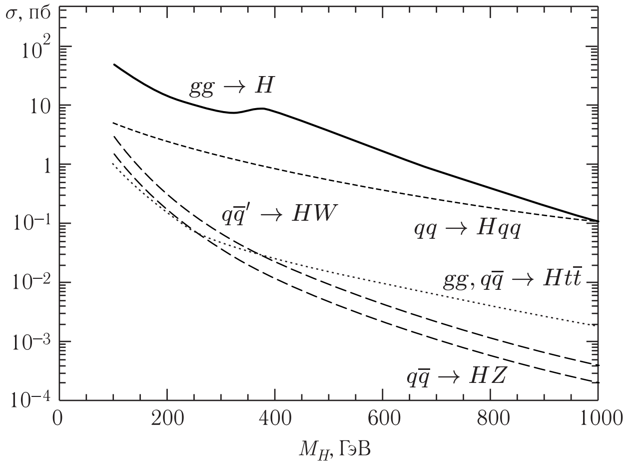


Рис. 14

Доминирующим каналом образования H для LHC (и для Тэватрона) является процесс глюонного слияния.

Хиггсовский бозон на LHC может быть обнаружен по своим инклюзивным каналам: $H \to \gamma\gamma$, $H \to ZZ^* \to 4l$ или $H \to WW^* \to l\nu l\nu$.

Канал $H \to \gamma\gamma$ является возможным для наблюдения хиггса, если его масса 80 ГэВ $< M_H <$ 150 ГэВ.

Распад $H \to ZZ^* \to 4l$ существенен в промежуточной области масс 115 ГэВ $< M_H < 2m_t$. Для масс 180 ГэВ $< M_H <$ 700 ГэВ весьма интересна мода $H \to ZZ \to 4l$. Для $M_H \sim$ 800 ГэВ основная мода распада $H \to WW \to e\nu + \text{jet} + \text{jet}$. У этой моды бренчинг примерно в 150 раз больше, чем для $H \to ZZ \to 4l$. После возможного наблюдения Хиггс-бозона важно установить его природу.

Масса Хиггс-бозона может быть определена в каналах $H \to \gamma\gamma$ и $H \to ZZ^* \to 4l$.

Ширину Хиггс-бозона можно извлечь лишь для масс, больших 200 ГэВ, когда «внутренняя» ширина резонанса становится сравнимой (или больше) с экспериментальным разрешением.

Спин и *CP-значение*. Для масс Хиггс-бозона $M_H >$ 200 ГэВ мода $H \to ZZ \to 4l$ весьма удобна при определении спина и CP. Известны два основных способа опреде-

ления спина и CP: 1) измерение распределения по косинусу полярного угла θ распадных лептонов по отношению к импульсу Z-бозона; 2) измерение распределения по углу ϕ между плоскостями распадов двух Z-бозонов в системе покоя Хиггс-бозона. Так как Хиггс-бозон распадается (в основном) на два продольно поляризованных векторных бозона, сечение $d\sigma/d\cos\theta$ должно иметь максимум при $\cos\theta = 0$. Что касается распределения по углу ϕ, то в стандартной модели ожидается зависимость $\sim (1 + \beta\cos 2\phi)$.

ГЛАВА 4

«АНАТОМИЯ» СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ: СИММЕТРИИ

В предыдущих двух главах были рассмотрены сильные взаимодействия, описываемые калибровочной группой $SU(3)_C$ и электрослабые взаимодействия, имеющие калибровочную группу $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Стандартная модель (СМ) элементарных частиц является калибровочной теорией, основанной на прямом произведении групп $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ и описывающей сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия как обмен калибровочными бозонами со спином единица: восемью безмассовыми глюонами и одним безмассовым фотоном в сильных и электромагнитных взаимодействиях и тремя массивными бозонами $W^{\pm}$, Z в слабых взаимодействиях.

Фермионный сектор СМ образуют три семейства:

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau^- & b' \end{bmatrix},$$

где каждый кварк способен находиться в трех цветовых состояниях, причем

$$\begin{bmatrix} \nu_l & q_u \\ l^- & q_d \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \end{pmatrix}_L, \; l_R^-, \; q_{uR}, \; q_{dR}$$

плюс соответствующие античастицы. Таким образом, левые компоненты полей образуют $SU(2)_L$-дублеты, а правые компоненты — $SU(2)_L$-синглеты.

Три семейства имеют одинаковые калибровочные взаимодействия, они отличаются массами и другими квантовыми числами.

В этой главе будут более подробно рассмотрены симметрии стандартной модели в кварковом, лептонном и хиггсовском секторах. В частности, будут обсуждаться проблемы нейтрино в стандартной модели. Как будет показано, ненулевые массы нейтрино свидетельствуют о существовании физики вне стандартной модели. Начнем с обсуждения свойств фермионных полей по отношению к преобразованиям Лоренца.

4.1. Вейлевские, майорановские и дираковские поля

Обсудим сначала свойства фермионных полей по отношению к преобразованиям Лоренца. Как известно, генераторы группы Лоренца — вращения J_i и сдвиги K_i. Они удовлетворяют алгебре

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k, \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} K_k, \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k, \end{aligned} \tag{1}$$

причем операторы J_i — эрмитовы, K_i — антиэрмитовы. Генераторы J_i удовлетворяют алгебре группы вращений $SU(2)$. Последнее коммутационное соотношение в (1) означает, что сдвиг преобразуется при вращениях как трехмерный вектор.

Для того чтобы коммутационные соотношения (1) не перепутывали J_i и K_i, можно ввести эрмитовы генераторы

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \\ B_i &= \frac{1}{2}(J_i - iK_i). \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда нетрудно заметить, что для введенных операторов

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= i\varepsilon_{ijk}A_k, \\ [B_i, B_j] &= i\varepsilon_{ijk}B_k, \\ [A_i, B_j] &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Видно, что алгебры для операторов A_i и B_i — это алгебры $SU(2)$. Таким образом, показано, что группа Лоренца $SO(3,1)$ локально изоморфна прямому произведению $SU(2) \times SU(2)$.

Представления группы $SU(2)$ связаны с представлением группы вращений: каждое представление характеризуется значением спина, который может быть целым или полуцелым. Таким образом, представления группы Лоренца обозначаются двумя величинами $(a, b) = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ Простейшее представление $(0, 0)$ соответствует скалярному полю.

Первое нетривиальное представление $(1/2, 0)$ — *вейлевский спинор* χ. Его генераторы

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2}\sigma_i, \\ B_i &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

причем

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2}\sigma_i, \\ iK_i &= \frac{1}{2}\sigma_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Поэтому вейлевский спинор χ — двухкомпонентный объект, преобразующийся при вращениях и сдвигах следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi &\to e^{-\frac{i}{2}\sigma\theta}\chi, \\ \chi &\to e^{-\frac{i}{2}\sigma\eta}\chi, \end{aligned} \tag{6}$$

где η — быстрота, связанная со скоростью $\beta = \tanh\eta$. Как видно, по отношению к вращениям вейлевский спинор несет спин $1/2$.

Попытаемся построить из одного вейлевского спинора Лоренц-ивариантный массовый член. Это так называемый майорановский массовый член

$$L = \frac{1}{2}m(\chi^T\varepsilon\chi + \text{э.с.}), \tag{7}$$

где $\varepsilon \equiv i\sigma_2$ — 2×2 антисимметричные матрицы. Покажем, что массовый член (7) Лоренц-инвариантен.

Обозначим Лоренц-преобразование, действующее на поле χ, как матрицу M:

$$M = e^{-\frac{i}{2}\sigma\theta} \quad \text{или} \quad M = e^{-\frac{i}{2}\sigma\eta}. \tag{8}$$

При Лоренц-преобразованиях

$$\chi^T \varepsilon \chi \to \chi^T M^T \varepsilon M \chi. \tag{9}$$

Учитывая индексы,

$$(M^T)_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}M_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\beta\gamma}M_{\beta\alpha}\mu_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\delta}\det M = \varepsilon_{\alpha\delta}, \tag{10}$$

где на последнем шаге учтено, что $\det M = 1$. Поэтому $M^T\varepsilon M = \varepsilon$, т. е. комбинация $\chi^T\varepsilon\chi$ — Лоренц-инвариантна.

Попутно мы доказали, что группа Лоренца локально изоморфна группе $SL(2, C)$ — группе 2×2 комплексных матриц с единичным определителем.

Хотя майорановский массовый член менее известен, чем дираковский массовый член, именно он является основной величиной, построенной из одного вейлевского спинора. В этом смысле майорановская масса — наиболее простой фермионный массовый член.

Однако, если поле χ несет ненарушенный глобальный или локальный $U(1)$-заряд, майорановский массовый член подавлен, поскольку он нарушает эту симметрию.

Таким образом, ни один из фермионов стандартной модели (за исключением нейтрино) не может иметь майорановскую массу, поскольку все они несут электрический заряд.

Вообще, если поле χ преобразуется как комплексное представление ненарушенной глобальной или внутренней симметрии, то майорановский массовый член подавлен.

Пусть

$$\chi \to U\chi, \tag{11}$$

где U — унитарное преобразование, действующее на набор вейлевских спиноров. Тогда массовый член в (9) преобразуется следующим образом:

$$\chi^T\varepsilon\chi \to \chi^T U^T \varepsilon U \chi = \chi^T \varepsilon U^T \chi, \tag{12}$$

где на последнем шаге использован тот факт, что U и ε действуют в различных пространствах. Массовый член в (9) будет Лоренц-инвариантным, если $U^T U = 1$, т. е. если унитарные представления U вещественны ($U^* = U$).

Можно сказать, что если фермион имеет майорановскую массу, то он совпадает со своей античастицей. В этом случае говорят о майорановском фермионе. Он не может нести ненарушенный глобальный или локальный $U(1)$-заряд (или, в более общем случае, преобразовываться относительно комплексных преобразований), так как частица и античастица должны иметь противоположный заряд.

Если вейлевский фермион преобразуется по комплексному представлению ненарушенной глобальной или локальной симметрии, то для построения массового члена нужно ввести другой вейлевский фермион, который преобразуется как комплексно-сопряженное представление. Так возникает дираковская масса.

Пусть поля χ, ξ преобразуются как $(1/2, 0)$ представления группы Лоренца, а относительно некоторой ненарушенной глобальной или локальной группы симметрии

$$\begin{aligned} \chi &\to U\chi, \\ \xi &\to U^*\xi. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда Лоренц-инвариантный массовый член с ненарушенной симметрией

$$L = m(\xi^T \varepsilon \chi + \text{э.с.}), \tag{14}$$

поскольку $\xi^T \varepsilon \chi \to \xi^T U^+ \varepsilon U \chi = \xi^T \varepsilon \chi$.

Таким образом, для построения дираковской массы необходимы два вейлевских спинора.

Фермионы с дираковскими массами называются *дираковскими фермионами*.

Итак, для построения майорановской массы нужен один вейлевский спинор, а для дираковской массы — два вейлевских спинора.

Введем новое поле — дираковский спинор — четырехкомпонентный спинор, построенный из пары $(1/2, 0)$ вейлевских спиноров χ, ξ следующим образом:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon \xi^* \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В терминах дираковского спинора, дираковский массовый член запишется в хорошо известной из квантовой электродинамики форме

$$L = -m\overline{\psi}\psi = -m(\chi^\dagger, -\xi^T \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon \xi^* \end{pmatrix} = m\big(\xi^T \varepsilon \chi - \chi^\dagger \varepsilon \xi^*\big), \tag{16}$$

причем последнее соотношение — точно такое же, как и в выражении (14). При этом дираковские гамма-матрицы записаны в вейлевском или киральном базисе:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

В этом базисе киральные проекционные операторы $(1 \pm \gamma_5)/2$ проектируют поля ψ на состояния вейлевских спиноров

$$\psi = \frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi + \frac{(1+\gamma_5)}{2}\psi = \psi_L + \psi_R, \tag{18}$$

где

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \xi^* \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Таким образом, ψ_L — четырехкомпонентная дираковская версия вейлевского спинора χ. Аналогично, ψ_R — версия вейлевского спинора $\varepsilon \xi^*$.

Поэтому дираковский спинор преобразуется как прямая сумма представлений $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ группы Лоренца, соответствующая спинору $\psi = \psi_L + \psi_R$.

В то время как дираковский спинор состоит из двух вейлевских спиноров, майорановский спинор — четырехкомпонентный спинор, состоящий из одного вейлевского спинора:

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon \chi^* \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Можно найти другие способы представления фермионных масс, если ввести зарядово-сопряженную матрицу C, которая в вейлевском или киральном базисе будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Для данного дираковского спинора ψ можно определить сопряженный спинор

$$\psi^C \equiv C\gamma^0\psi^* = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^* \\ \varepsilon\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \varepsilon\chi^* \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Поэтому

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\psi^C)_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = (\psi_R)^C. \tag{23}$$

Покажем, что слагаемое в лагранжиане $L = -(1/2)m(\psi_L^T C\psi_L + \text{э.с.})$ соответствует майорановской массе. Действительно,

$$-\frac{1}{2}m(\psi_L^T C\psi_L + \text{э.с.}) = -\frac{1}{2}m\left((\chi^T, 0)\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} + \text{э.с.}\right) = \frac{1}{2}m(\chi^T\varepsilon\chi + \text{э.с.}). \tag{24}$$

Покажем также, что $\psi_M^C = \psi_M$. Это соотношение называется майорановским условием. Используя определение сопряженного спинора, находим

$$\psi_M^C = C\gamma^0\psi_M^* = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^+ \\ \varepsilon\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon\chi^* \end{pmatrix} = \psi_M. \tag{25}$$

При доказательстве (24) мы записали майорановский массовый член в терминах дираковского спинора. А можно ли дираковский массовый член переписать в терминах майорановских спиноров? Ответ на этот вопрос положительный. Для этого запишем дираковский массовый член в терминах дираковских спиноров

$$L = -m\overline{\psi}\psi = -\frac{1}{2}m(\overline{\psi}\psi + \overline{\psi}^C\psi^C). \tag{26}$$

Определим майорановские спиноры следующим образом

$$\psi_M^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^C), \quad \psi_M^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^C). \tag{27}$$

Тогда выражение (26) запишется в виде

$$L = -\frac{1}{2}m(\overline{\psi}_M^1\psi_M^1 + \overline{\psi}_M^2\psi_M^2). \tag{28}$$

Как видно, дираковский фермион эквивалентен двум вырожденным майорановским фермионам. Однако

$$(\psi_M^1)^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^C + \psi) = \psi_M^1, \quad (\psi_M^2)^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^C - \psi) = -\psi_M^2, \tag{29}$$

т. е. два майорановских спинора при зарядовом сопряжении меняют знак.

Майорановский спинор ψ_M^2 имеет следующую форму

$$\psi_M^2 = \begin{pmatrix} \chi \\ -\varepsilon\chi^* \end{pmatrix}, \tag{30}$$

что является обобщением конструкции (20). Ниже будет показана физическая значимость соотношения (30).

Таблица 1

Спинор	Майорановская масса	Дираковская масса
Вейль	$\frac{1}{2}m(\chi^T\varepsilon\chi + \text{э.с.})$	$m(\xi^T\varepsilon\chi + \text{э.с.})$
Майорана	$-\frac{1}{2}m\overline{\psi}_M\psi_M$	$-\frac{1}{2}m(\overline{\psi}^1_M\psi^1_M + \overline{\psi}^2_M\psi^2_M)$
Дирак	$-\frac{1}{2}m(\psi^T_L C\psi_L + \text{э.с.})$	$-m((\psi_C)^T_L C\psi_L + \text{э.с.})$
Дирак	$-\frac{1}{2}m\big(\overline{(\psi^C)}_R\psi_L + \text{э.с.}\big)$	$-m\overline{\psi}\psi$

В табл. 1 представлены майорановские и дираковские массовые матрицы в терминах вейлевского, майорановского и дираковского спиноров.

4.2. Симметрия ароматов

В табл. 2 перечислены фермионные поля стандартной модели вместе с их $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ квантовыми числами.

Таблица 2

Фермионные поля	$SU(3)$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$Q^i_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{6}$
$(u^C)^i_L = (u^C)_L(c^C)_L(t^C)_L$	$\overline{3}$	3	$-\frac{2}{3}$
$(d^C)^i_L = (d^C)_L(s^C)_L(b^C)_L$	$\overline{3}$	1	$\frac{1}{3}$
$L^i_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
$(e^C)^i_L = (e^C)_L(\mu^C)_L(\tau^C)_L$	1	1	1

В этой таблице индекс $i = 1, 2, 3$ каждого поля относится к поколению. Поля при этом — левые киральные дираковские спиноры, которые являются, как мы видели выше, четырехкомпонентными вейлевскими спинорами. Например,

$$u_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$(u^C)_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где χ, ξ — $(1/2, 0)$-вейлевские спиноры.

Работать в терминах только левых киральных полей особенно удобно в теориях большого объединения, в которых делаются попытки объединить фермионы в представления группы, которая содержит группу симметрии стандартной модели как подгруппу.

Лагранжиан стандартной модели содержит сумму калибровочных, юкавских, хиггсовских взаимодействий, а также взаимодействия с «материей»:

$$L_{SM} = L_{\text{калибр.}} + L_{\text{материя}} + L_{\text{Юкава}} + L_{\text{Хиггс}}. \tag{33}$$

Чисто калибровочные взаимодействия включают кинетические энергии калибровочных бозонов, а также их самовзаимодействие.

Часть $L_{\text{материя}}$ содержит кинетическую энергию и калибровочные взаимодействия фермионных полей:

$$L_{\text{материя}} = i\overline{Q}^i_L \not{D} Q^i_L + i\overline{(u^C)}^i_L \not{D}(u^C)^i_L + i\overline{(d^C)}^i_L \not{D}(d^C)^i_L + i\overline{L}^i_L \not{D} L^i_L + i\overline{(e^C)}^i_L \not{D}(e^C)^i_L. \tag{34}$$

При этом предполагается суммирование по индексу i. Для того чтобы записать лагранжиан в канонической форме — через левые и правые киральные поля, воспользуемся соотношением

$$(\psi^C)_L = C\gamma^0\psi^*_R. \tag{35}$$

Тогда получим

$$L_{\text{материя}} = i\overline{Q}^i_L \not{D} Q^i_L + i\overline{u}^i_R \not{D} u^i_R + i\overline{d}^i_R \not{D} d^i_R + i\overline{L}^i_L \not{D} L^i_L + i\overline{e}^i_R \not{D} e^i_R. \tag{36}$$

На этой стадии все фермионы безмассовые. Майорановские массы подавлены, поскольку все фермионы несут гиперзаряд. Кроме того, некоторые из них преобразуются как комплексные представления группы $SU(3)_C$. Дираковские же массы тоже подавлены, поскольку ни один фермион при комплексном сопряжении не преобразуется в другой фермион.

Отсутствие фермионных масс означает, что $L_{\text{материя}}$ имеет глобальную симметрию

$$\begin{aligned} Q^i_L &\to U^{ij}_{Q_L} Q^j_L, \\ u^i_R &\to U^{ij}_{u_R} u^j_R, \\ d^i_R &\to U^{ij}_{d_R} d^j_R, \\ L^i_L &\to U^{ij}_{L_L} L^j_L, \\ e^i_R &\to U^{ij}_{e_R} e^j_R. \end{aligned} \tag{37}$$

Это случайная симметрия в том смысле, что она изначально не предполагается, но следует из фермионного содержания и калибровочных симметрий стандартной модели. Глобальная $[U(3)]^5$-симметрия нарушается юкавской связью фермионов с хиггсовским полем:

$$L_{\text{Юкава}} = -\Gamma^{ij}_u \overline{Q}^i_L \varepsilon\phi^* u^j_R - \Gamma^{ij}_d \overline{Q}^i_L \phi d^j_R - \Gamma^{ij}_e \overline{L}^i_L \phi e^j_R + \text{э.с.}, \tag{38}$$

где Γ_u, Γ_d, Γ_e — 3×3 комплексные матрицы в пространстве поколений.

Только малая подгруппа $[U(3)]^5$ не нарушена, она соответствует барионному числу:

$$Q^i_L \to e^{i\theta/3} Q^i_L, \quad u^i_R \to e^{i\theta/3} u^i_R, \quad d^i_R \to e^{i\theta/3} d^i_R, \tag{39}$$

а также лептонному числу

$$\begin{aligned} L^i_L &\to e^{i\phi} L^i_L, \\ e^i_R &\to e^{i\phi} e^i_R. \end{aligned} \tag{40}$$

Таким образом, барионные и лептонные квантовые числа можно рассматривать как проявление случайных глобальных симметрий стандартной модели.

Когда хиггсовское поле приобретает вакуумное среднее

$$\langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

фермионы (за исключением нейтрино) становятся массивными за счет юкавских связей с хиггсовским полем в (38):

$$L_{\text{материя}} = -M_u^{ij}\overline{u}_L^i u_R^j - M_d^{ij}\overline{d}_L^i d_R^j - M_e^{ij}\overline{e}_L^i e_R^j + \text{э.с.}, \tag{42}$$

где

$$M^{ij} = \Gamma^{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{43}$$

— фермионная массовая матрица.

Таким образом, поля ψ_L и $\psi_R = C\gamma^0(\psi^C)^*_L$ объединяются и придают массы u^i, d^i, e^i. Нейтринное поле ν_L не несет ненарушенной калибровочной симметрии, поэтому оно могло бы, в принципе, приобрести майорановскую массу

$$-\frac{1}{2}M_\nu^{ij}(\nu_L^{iT}C\nu_L^j + \text{э.с.}). \tag{44}$$

Однако это слагаемое в лагранжиане подавлено случайной симметрией лептонного квантового числа. На самом деле, барионные и лептонные числа аномальные, но не их разность. Обычно говорят, что майорановская масса нейтрино подавлена B–L-симметрией.

Юкавские матрицы Γ в лагранжиане (38) представляют собой 3×3 комплексные матрицы. Поскольку их три, то это вносит в теорию $3\times3\times3\times2 = 54$ новых параметра. Однако, как мы увидим, только некоторые их этих параметров физически значимы.

Для данного лагранжиана (42) можно проводить вычисления интересующих физических процессов. Однако удобнее произвести переопределение полей, чтобы наиболее отчетливо проявилось физическое содержание теории. Эти переопределения не изменяют предсказаний теории, они аналогичны замене переменных при интегрировании.

Для того, чтобы получить массы фермионов, проведем унитарное преобразование полей и диагонализуем массовые матрицы в лагранжиане (42):

$$\begin{aligned} u_L^i &= A_{u_L}^{ij}u_L^{'j}, \quad u_R^i = A_{u_R}^{ij}u'^j_R, \\ d_L^i &= A_{d_L}^{ij}d_L^{'j}, \quad d_R^i = A_{d_R}^{ij}d_R^{'j}, \\ e_L^i &= A_{e_L}^{ij}e_L^{'j}, \quad e_R^i = A_{e_R}^{ij}e_R^{'j}, \\ \nu_L^i &= A_{\nu_L}^{ij}\nu_L^{'j}. \end{aligned} \tag{45}$$

Каждая матрица A должна быть унитарной, чтобы сохранять форму члена кинетической энергии в лагранжиане «материи» в (34):

$$L_{\text{кинетич.}} = i\overline{u}_L\partial\!\!\!/ u_L = i\overline{u'}_L A_{u_L}^+\partial\!\!\!/ A_{u_L}\partial\!\!\!/ u'_L = i\overline{u}'_L\partial\!\!\!/ u'_L. \tag{46}$$

Если массовые матрицы диагонализованы, то возникают массы фермионов. Эти преобразования диагонализуют также юкавские матрицы Γ, поскольку они пропорциональны массовым матрицам (43).

Нужно, однако, рассмотреть, как переопределение полей влияет на оставшуюся часть лагранжиана. Оно не влияет на калибровочную или хиггсовскую часть лагранжиана, так как они не зависят от фермионных полей. Однако это переопределение могло бы влиять на $L_{\text{материя}}$. Но набор переопределенных полей имеет глобальную $[U(3)]^5$-симметрию, поэтому не изменяет $L_{\text{материя}}$. Подсчитаем, сколько физически значимых параметров остается после переопределения полей. Начнем с кваркового сектора. Число параметров, содержащихся в комплексных матрицах Γ_u, Γ_d: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$. Унитарные симметрии U_{Q_L}, U_{u_R}, U_{d_R} входят в переопределение кварковых полей. Как уже отмечалось выше, они не оказывают влияния на $L_{\text{материя}}$. Эти симметрии дают $3 \cdot 3 \cdot 3$ число степеней свободы (унитарные $N \times N$ матрицы содержат N^2 свободных параметров). Поэтому полное число степеней свободы, которые остаются в полном лагранжиане после переопределения полей

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 - (3 \cdot 3 \cdot 3 - 1) = 10, \tag{47}$$

где вычтено барионное квантовое число.

Барионное число связано с симметрией юкавской части лагранжиана (38), поэтому его нельзя использовать для диагонализации массовых матриц. Десять оставшихся параметров соответствуют шести кварковым массам и четырем параметрам матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава (три угла смешивания и одна CP-нарушающая фаза).

До сих пор мы считали нейтрино безмассовыми. Однако нейтрино имеют массу. Почему бы не расширить стандартную модель, включить поле N_R и добавить юкавское взаимодействие:

$$L_{\text{Юкава}} = -\Gamma_\nu^{ij} \overline{L}_L^i \varepsilon \phi^* N_R^j + \text{э.с.} \tag{48}$$

Покажем, что поле N_R стерильно, т. е. не несет калибровочных квантовых чисел, но несет лептонное квантовое число $+1$.

Действительно, поля L_L и ϕ имеют равные, но противоположные по знаку гиперзаряды, т. е. N_R должен иметь нулевой гиперзаряд, чтобы $L_{\text{Юкава}}$ был калибровочно-инвариантен. Кроме того, L_L и $\varepsilon\phi^*$ преобразуются как $SU(2)_L$-дублеты, т. е. $L_{\text{Юкава}}$ калибровочно-инвариантен, если N_R не преобразуется относительно $SU(2)_L$. Чтобы $L_{\text{Юкава}}$ сохранял лептонное число, мы должны приписать полю N_R лептонное число $L = +1$. Тогда, если хиггсовское поле приобретает вакуумное среднее, то нейтрино, подобно другим фермионам, получает дираковскую массу.

К сожалению, при таком переходе возникают следующие трудности:

а) Почему нейтрино гораздо легче всех других фермионов?

б) Поскольку N_R стерильно, калибровочные симметрии допускают майорановский массовый член

$$L = -\frac{1}{2} M_R^{ij} N_R^{iT} C N_R^j + \text{э.с.} \tag{49}$$

С таким слагаемым поля ν_L и N_R при сформировании дираковского фермиона не объединяются. При этом возникает два майорановских нейтрино на поколение. Это больше, чем необходимо для описания природы.

Очевидно, что майорановский массовый член (49) подавлен, если симметрия, связанная с лептонным числом — точная симметрия. В этом случае нейтрино могло бы приобрести дираковскую массу за счет юкавского взаимодействия (48). Напомним, однако, что симметрия, связанная с лептонным числом — случайная симметрия стандартной модели, и нет причин ожидать, что она является точной симметрией расширенной стандартной модели. Даже если бы этот сценарий был реализован

в природе, то мы должны рассматривать его как проявление физики вне стандартной модели, поскольку он требует введения двух новых предположений: поля N_R и проявления лептонного числа как следствия не случайной, а точной симметрии.

Прежде чем вводить поле N_R, рассмотрим стандартную модель как низкоэнергетическую эффективную полевую теорию с лагранжианом, который является разложением по обратным степеням некоторой массы M:

$$L = L_{SM} + \frac{1}{M}\dim 5 + \frac{1}{M^2}\dim 6 + \ldots \tag{50}$$

Слагаемые вне стандартной модели представляют собой операторы возрастающей размерности, начиная с размерности пять. Для набора полей и калибровочных симметрий стандартной модели имеется только один оператор размерности пять:

$$L_5 = \frac{c^{ij}}{M} L_L^{iT} \varepsilon\phi C \phi^T \varepsilon L_L^j + \text{э.с.}, \tag{51}$$

c^{ij} — симметричная комплексная матрица.

Покажем, что L_5 $SU(2)_L \times U(1)_Y$-инвариантен и нарушает лептонное число.

Очевидно, что комбинация $L_L^T \varepsilon\phi$ — $SU(2)_L \times U(1)_Y$-инвариантна, поэтому L_5 калибровочно-инвариантен. Лептонное число нарушается, поскольку поле L_L несет $L = +1$, тогда L_5 имеет $L = +2$.

Когда хиггсовское поле приобретает вакуумное среднее (41), нейтрино получает майорановскую массу

$$L_{\text{май}} = -\frac{c^{ij}}{2}\frac{v^2}{M}\nu_L^{iT} C \nu_L^j + \text{э.с.} \tag{52}$$

Заметим, что нейтрино получает майорановскую массу, поскольку лептонное число нарушается слагаемым L_5 в полном лагранжиане. Таким образом, лептонное число отражает лишь низкоэнергетическую случайную симметрию и, вообще говоря, нарушается операторами высших размерностей.

Из выражения (52) видно, что масса нейтрино $\sim v^2/M$. Поэтому при $M \gg v$ масса нейтрино гораздо меньше v. Это очень привлекательное объяснение, почему нейтрино гораздо легче других фермионов.

Вернемся снова к обсуждению стерильного нейтрино N_R^i и покажем, что оно приводит к выражению (52), если стерильное нейтрино очень тяжелое.

Начнем с лагранжианов (48) и (49):

$$L = -\overline{L}_L \Gamma_\nu \varepsilon \phi^* N_R - \frac{1}{2} N_R^T M_R C N_R + \text{э.с.}, \tag{53}$$

где для простоты опущены некоторые индексы. Если M_R очень большая, то поле N_R отсутствует при низких энергиях, и по нему можно проинтегрировать.

При низких энергиях N_R — нединамическое, классическое поле, и его можно исключить, решив уравнение движения

$$\frac{\partial L}{\partial N_R} = 0 \tag{54}$$

и подставив его значение в (53). Тогда из (53) имеем

$$\frac{c}{M} = -\frac{1}{2}(\Gamma_\nu M_R^{-1} \Gamma_\nu^T)^\dagger. \tag{55}$$

Отсюда видно, что масса M в эффективной теории (50) пропорциональна массе M_R. При этом в рамках эффективной полевой теории описание нарушается, если энергии сравнимы с массой тяжелого майорановского нейтрино.

Покажем, что (55) действительно выполняется. Для этого найдем

$$\frac{\partial L}{\partial N_R} = -\overline{L}_L \Gamma_\nu \varepsilon \phi^* - N_R^T M_R C + \text{э.с.} \tag{56}$$

Решая уравнение $\partial L/\partial N_R = 0$ относительно N_R, получаем

$$N_R = \phi^+ \varepsilon C \gamma^0 (\Gamma_\nu M_R^{-1})^T L_L^*. \tag{57}$$

Подставим N_R в лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} L_L^+ \varepsilon \phi^* C \Gamma_\nu (\Gamma_\nu M_R^{-1})^T \phi^+ \varepsilon L^* + \text{э.с.} \tag{58}$$

Это выражение есть не что иное, как лагранжиан (51), если идентифицировать первый член в (58) с эрмитово-сопряженным слагаемым в L_5. Отсюда получаем

$$\frac{c^+}{M} = -\frac{1}{2} \Gamma_\nu (\Gamma_\nu M_R^{-1})^T, \tag{59}$$

которое совпадает с (55), если вспомнить, что c — симметричная матрица.

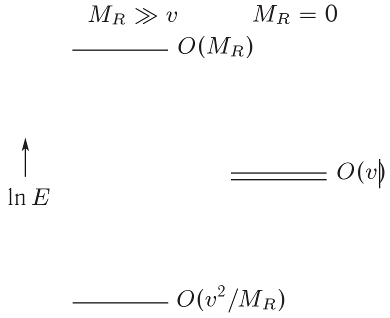


Рис. 1

На рис. 1 изображен спектр масс нейтрино одного поколения для двух обсужденных нами предельных случаев.

Если $M_R \gg v$, то N_R — тяжелое майорановское нейтрино массы M_R, и ν_L — очень легкое майорановское нейтрино массы $O(v^2/M_R)$. В другом предельном случае $M_R = 0$ (если лептонное число является проявлением точной симметрии), ν_L и N_R объединяются и дают дираковскую массу нейтрино $\sim O(v)$. Поэтому дираковское нейтрино можно рассматривать как состояние двух вырожденных майорановских нейтрино.

Если тяжелое нейтрино массы M_R придает легкому нейтрино массу $O(v^2/M_R)$, то говорят о «see-saw» механизме.

4.3. Симметрии хиггсовского сектора электрослабой теории

Оставим обсуждение сектора ароматов стандартной модели и обратимся к хиггсовскому сектору или к сектору нарушения электрослабой теории. Обсудим глобальные симметрии этого сектора.

Хиггсовский сектор стандартной модели описывается лагранжианом

$$L_{\text{Хиггс}} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\phi), \tag{60}$$

где хиггсовский потенциал

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \tag{61}$$

и ковариантная производная

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + i\frac{g}{2} \sigma W_\mu + i\frac{g'}{2} B_\mu \right) \phi. \tag{62}$$

Хиггсовский лагранжиан обладает $SU(2)_L \times U(1)_Y$-симметрией, а также приближенной (случайной) глобальной симметрией. Для того чтобы это увидеть, перепишем лагранжиан следующим образом. Обозначим компоненты хиггсовского дублета

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Тогда $\varepsilon\phi^*$ — тоже $SU(2)_L$-дублет, имеющий компоненты

$$\varepsilon\phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \tag{64}$$

где $\phi^- = \phi^{+*}$. Определим хиггсовскую матрицу (или бидублет полей):

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon\phi^*, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^{\dagger} \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

В терминах этой матрицы хиггсовский лагранжиан имеет вид

$$L_{\text{Хиггс}} = \mathrm{tr}(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - V(\Phi), \tag{66}$$

где потенциал

$$V(\Phi) = -\mu^2\,\mathrm{tr}\,\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\mathrm{tr}\,\Phi^\dagger\Phi)^2, \tag{67}$$

а ковариантная производная

$$D_\mu\Phi = \Big(\partial_\mu\Phi + i\frac{g}{2}\sigma W_\mu\Phi + i\frac{g'}{2}B_\mu\Phi\sigma_3\Big). \tag{68}$$

Отметим появление матрицы Паули σ_3. Она необходима, поскольку ϕ и $\varepsilon\phi^*$ имеют противоположный гиперзаряд.

Покажем, что выражения (60) и (66) идентичны. Для этого запишем матрицу как внешнее произведение двух векторов

$$\mathrm{tr}\,\Phi^\dagger\Phi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} -\phi^T\varepsilon \\ \phi^+ \end{pmatrix}(\varepsilon\phi^*, \phi) = \phi^\dagger\phi, \tag{69}$$

где использовано $\phi^T\phi^* = (\phi^T\phi^*)^T = \phi^\dagger\phi$.

Действительно потенциалы эквивалентны. Для кинетического слагаемого имеем

$$D_\mu\phi = \big(D_\mu(\varepsilon\phi^*), D_\mu\phi\big) = \big(\varepsilon(D_\mu\phi)^*, D_\mu\phi\big), \tag{70}$$

где на последнем шаге использовано $\sigma\varepsilon = -\varepsilon\sigma^T = -\varepsilon\sigma^*$.

Преобразования группы симметрии $SU(2)_L \times U(1)_Y$ действуют на матрицу хиггсовских полей следующим образом:

$$\begin{aligned} SU(2)_L &: \Phi \to L\Phi, \\ U(1)_Y &: \Phi \to \Phi e^{-\frac{i}{2}\sigma_3\theta}, \end{aligned} \tag{71}$$

где снова возникает матрица σ_3 из-за противоположности гиперзарядов полей ϕ и $\varepsilon\phi^*$.

Относительно преобразований из $SU(2)_L$:

$$\mathrm{tr}(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi \to \mathrm{tr}(D_\mu\Phi)^\dagger L^\dagger L D^\mu\Phi = \mathrm{tr}(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi, \tag{72}$$

т. е. это слагаемое инвариантно.

Чтобы обнаружить приближенную глобальную симметрию, рассмотрим предел, в котором константа, связанная с гиперзарядом, $g' \to 0$.

В этом случае лагранжиан сохраняет форму (66), однако ковариантная производная упрощается:

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + i\frac{g}{2}\sigma W_\mu)\Phi. \tag{73}$$

Видно, что в этом пределе лагранжиан имеет глобальную симметрию $SU(2)_R$, т. е.

$$SU(2)_R\colon \Phi \to \Phi R^\dagger. \tag{74}$$

Относительно преобразований из $SU(2)_R$:

$$\mathrm{tr}(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi \to \mathrm{tr}\, R(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi R^\dagger = \mathrm{tr}(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi, \tag{75}$$

т. е. снова инвариантно.

Таким образом, в пределе $g' \to 0$ хиггсовский сектор стандартной модели имеет глобальную симметрию $SU(2)_L \times SU(2)_R$, при этом $\Phi \to L\Phi R^\dagger$.

Когда хиггсовское поле приобретает ненулевое вакуумное среднее, матричное поле

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}. \tag{76}$$

При этом нарушаются как $SU(2)_L$-симметрии, так и $SU(2)_R$-симметрии:

$$L\langle \Phi \rangle \neq \langle \Phi \rangle, \quad \langle \Phi \rangle R^\dagger \neq \langle \Phi \rangle, \tag{77}$$

однако остается ненарушенной подгруппа $SU(2)_{L+R}$, соответствующая взаимным $SU(2)_L$- и $SU(2)_R$-преобразованиям с $L = R$, т. е.

$$L\langle \Phi \rangle L^\dagger = \langle \Phi \rangle. \tag{78}$$

Таким образом, хиггсовское вакуумное среднее нарушает глобальную симметрию следующим образом:

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_{L+R}. \tag{79}$$

Иногда симметрию $SU(2)_{L+R}$ называют «custodial symmetry».

Поскольку $SU(2)$ — трехмерная группа, число нарушенных генераторов $3 + 3 - 3 = 3$.

В результате механизма Хиггса «уходит» три безмассовых голдстоуновских бозона, но возникают массы W^+-, W^-- и Z-бозонов:

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{1}{4}g^2 v^2, \\ M_Z^2 &= \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v^2. \end{aligned} \tag{80}$$

При этом

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2} = \frac{g^2}{g^2 + g'^2} = \cos^2\theta_W \quad \text{или} \quad \rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1 \tag{81}$$

на «древесном» уровне.

Таким образом, в пределе $g' \to 0$ W^+-, W^-- и Z-бозон формируют триплет ненарушенной глобальной симметрии. Поэтому в пределе $g' \to 0$ $M_W = M_Z$.

Рассматриваемая нами симметрия хиггсовского сектора позволяет понять свойства теории вне рамок «древесного» приближения. Из-за ненарушенной $SU(2)_{L+R}$-симметрии в пределе $g' \to 0$ радиационные поправки к параметру ρ (81) должны быть пропорциональны ${g'}^2$. Например, поправка к параметру ρ за счет диаграмм с хиггсовскими петлями (рис. 2)

Рис. 2

$$\widehat{\rho} \simeq 1 - \frac{11 G_F M_t^2 \sin^2\theta_W}{24\sqrt{2}\pi^2} \ln \frac{m_h^2}{M_Z^2}. \tag{82}$$

Эта поправка исчезает в пределе $g' \to 0$ (так как $\sin^2\theta_W \to 0$). Как видно из соотношения (82), лидирующая поправка пропорциональна $\ln m_h$, и это дает возможность ограничить массу Хиггс-бозона из прецизионных электрослабых измерений. Симметрия хиггсовского сектора дает возможность понять также, какой вклад в параметр ρ вносят массивные фермионы (рис. 3).

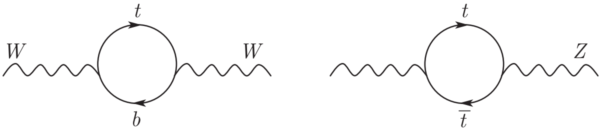


Рис. 3

Лидирующая поправка к величине ρ за счет петель t- и b-кварков:

$$\widehat{\rho} \simeq 1 + \frac{3G_F}{8\sqrt{2}\pi^2}\left(m_t^2 + m_b^2 - 2\frac{m_t^2 m_b^2}{m_t^2 - m_b^2}\ln\frac{m_t^2}{m_b^2}\right). \tag{83}$$

В этом случае поправка $\sim m_t^2$.

Соотношение (83) позволило получить оценку массы t-кварка до его экспериментального открытия.

Попытаемся развить эффективную полевую теорию нарушения электрослабой симметрии, в которой бы проявилась симметрия хиггсовского сектора. Для этого заменим матричное поле Φ другим матричным полем Σ, которое содержит голдстоуновские бозоны π_i (которые «съедаются» слабыми векторными бозонами), но не содержит физического хиггсовского бозона:

$$\begin{aligned} \Phi &\to \frac{v}{2}\Sigma, \\ \Sigma &= e^{\frac{i\sigma\pi}{v}}. \end{aligned} \tag{84}$$

Лагранжиан нарушения электрослабой симметрии аналогичен (66):

$$L = \frac{v^2}{4}\,\mathrm{tr}(D_\mu\Sigma)^+ D^\mu\Sigma. \tag{85}$$

При этом матрица полей голдстоуновских бозонов преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} SU(2)_L &: \Sigma \to L\Sigma, \\ SU(2)_R &: \Sigma \to \Sigma R^\dagger, \ , \\ SU(2)_{L+R} &: \Sigma \to L\Sigma L^\dagger. \end{aligned} \tag{86}$$

Поскольку $SU(2)_L \times SU(2)_R$-симметрия реализована нелинейно, эта модель называется нелинейной сигма-моделью, что означает, что симметрия нарушена.

В унитарной калибровке $\Sigma = 1$ и лагранжиан (85) приводит к правильным массам векторных бозонов (80).

4.4. Масштабная симметрия

Поскольку нам неизвестен механизм нарушения электрослабой симметрии, то не обсуждая существование хиггсовского бозона, рассмотрим минимальную модель с одним хиггсовским дублетом.

Именно такую модель называют стандартной. Как обсуждалось в предыдущем разделе, стандартную модель можно рассматривать как лидирующий член в эффективном лагранжиане (50) при разложении по обратным степеням большого масштаба M.

Имеются, по крайней мере, три причины, чтобы масштаб M был гораздо больше «слабого» масштаба v:

а) как обсуждалось выше, масса майорановского нейтрино $\sim v^2/M$, т. е. $M \simeq$ $\simeq 10^{14} \div 10^{16}$ГэВ.

б) Модели большого объединения указывают, что калибровочные константы должны объединяться на масштабах $\sim 10^{16}$ГэВ.

в) Эффекты квантовой гравитации становятся существенными на масштабе планковской массы $M_{\text{Pl}} \simeq (\hbar c/G_N)^{1/2} \sim 10^{19}$ГэВ.

Возникает вопрос: если фундаментальный физический масштаб M так велик, почему стандартная модель «действует» при обычных энергиях, а не на масштабах M? В рамках стандартной модели можно найти ответ, хотя он и не является полным.

Начнем с фермионов. Как обсуждалось в разд. 4.1, фермионы преобразуются по комплексному представлению калибровочной симметрии. Нет фермионов, которые бы были калибровочными синглетами или преобразовывались бы по вещественному представлению. Поэтому-то майорановские массы оказываются подавленными. Поскольку нет пар фермионов, которые бы преобразовывались как комплексно-сопряженные представления калибровочной симметрии, то и дираковские массы подавлены.

Таким образом, фермионы остаются безмассовыми до тех пор, пока не нарушена $SU(2)_L \times U(1)_Y$-симметрия. В этом случае массы фермионов $\sim O(v)$.

Хотя это рассмотрение и объясняет, почему фермионы гораздо легче по сравнению с масштабом M, оно недостаточно.

Действительно, только масса t-кварка $\sim O(v)$, все другие заряженные фермионы гораздо легче. В стандартной модели это происходит потому, что юкавские константы связи с фермионами очень малы. И это весьма загадочно. Например, для электрона юкавская константа связи $\sim 10^{-5}$! Малость этих констант означает (как уже говорилось в разд. 4.1) приближенную симметрию по ароматам.

В разд. 4.1 говорилось о том, что в лидирующем порядке эффективной теории масса нейтрино равна нулю из-за случайной симметрии лептонного числа. Эта

симметрия нарушается оператором размерности 5 в выражении (51), при этом нейтрино приобретает малую массу $\sim O(v^2/M)$. Кроме фермионных масс, сектор ароматов включает СКМ и MNS матрицы смешивания, углы смешивания содержатся в таблице.

Угол	**Кварк**	**Лептон**
θ_{12}	13°	34°
θ_{23}	2,3°	45°
θ_{13}	0,23°	$\leq$ 12°
δ	60°	неизвестен

Стандартная модель не объясняет иерархии масс и смешивания. Считается, что за эти эффекты «ответственна» физика вне стандартной модели.

Обратимся теперь к калибровочным бозонам. Калибровочные бозоны связаны с локальной (калибровочной) симметрией, обеспечивающей их безмассовость. При калибровочном преобразовании калибровочные бозоны преобразуются следующим образом:

$$TA_\mu \to UTA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger, \tag{87}$$

где T^A — генераторы группы. Второе слагаемое в этом преобразовании подавляет массовый член:

$$L = \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu = M^2 \operatorname{tr} TA_\mu TA^\mu, \tag{88}$$

причем $\operatorname{tr} T^A T^B = (1/2)\delta^{AB}$.

Итак, калибровочные бозоны безмассовые до тех пор, пока калибровочная симметрия ненарушена, т. е. фотон и глюоны безмассовые, а слабые векторные бозоны имеют массу $\sim O(v)$.

Калибровочные бозоны связаны с локальной симметрией, однако пока нельзя ответить однозначно на вопрос: они безмассовые вследствие локальной симметрии или локальная симметрия имеет место из-за их безмассовости?

Из-за важности этого вопроса обсудим более подробно связь между безмассовостью калибровочных бозонов и калибровочной симметрией. Для простоты рассмотрим случай квантовой электродинамики, хотя результаты в неабелевых калибровочных теориях аналогичны. Калибровочная симметрия подразумевает выполнение тождества Уорда. Для собственной энергии фотона $\Pi_{\mu\nu}$

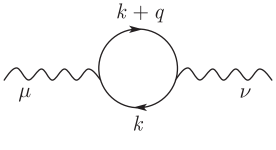


Рис. 4

Тождество Уорда:

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0, \tag{89}$$

где q — 4-импульс фотона.

Это условие означает, что собственная энергия должна иметь следующую форму:

$$\Pi_{\mu\nu} = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\Pi(q^2). \tag{90}$$

Можно вычислить влияние собственной энергии фотона на фотонный пропагатор, суммируя следующие диаграммы:

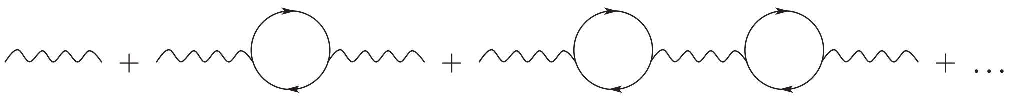


Рис. 5

Обычно это делается в калибровке Ландау:

$$-\frac{i}{q^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) - \frac{i}{q^2}\left(g^{\mu\rho} - \frac{q^\mu q^\rho}{q^2}\right) i(q^2 g_{\rho\sigma} - q_\rho q_\sigma)\Pi \frac{(-i)}{q^2}\left(g^{\sigma\nu} - \frac{q^\sigma q^\nu}{q^2}\right) + \ldots$$
$$\ldots = -\frac{i}{q^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)[1 + \Pi + \ldots] = \frac{-i}{q^2[1-\Pi]}\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right). \tag{91}$$

Таким образом, пропагатор приобретает фактор $[1-\Pi]^{-1}$.

Найдем вклад в Π от фермионной петли:

$$i\Pi_{\mu\nu} = i(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\Pi = (-ieQ)^2 i^2(-1)\int \frac{d^N k}{(2\pi)^N}\frac{\operatorname{tr}\gamma_\mu(\widehat{k}+m)\gamma_\nu(\widehat{k}+\widehat{q}+m)}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)}, \tag{92}$$

где Q — фермионный электрический заряд и фактор (-1) возникает из-за фермионной петли. Вычислим интеграл в N измерениях и выделим ультрафиолетовые расходимости. Сворачивая обе части последнего выражения с $g^{\mu\nu}$, получим

$$i(q^2 N - q^2)\Pi = -e^2 Q^2 \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N}\frac{\operatorname{tr}\gamma_\mu(\widehat{k}+m)\gamma^\mu(\widehat{k}+\widehat{q}+m)}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)\widehat{a}}. \tag{93}$$

При этом использовано соотношение $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = N$.

Вычисление следа дает:

$$\operatorname{tr}\gamma_\mu(\widehat{k}+m)\gamma^\mu(\widehat{k}+\widehat{q}+m) = 4\left[-2(1-\varepsilon)(k^2+kq) + (4-2\varepsilon)m^2\right], \tag{94}$$

где использовано

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma^\mu &= N \equiv 4 - 2\varepsilon,\\ \gamma_\mu\widehat{a}\gamma^\mu &= -2(1-\varepsilon)\widehat{a}.\end{aligned} \tag{95}$$

Перепишем теперь числитель в интеграле через факторы, появляющиеся в знаменателе:

$$k^2 + kq = \frac{1}{2}\left[(k+q)^2 - m^2 + (k^2 - m^2) - q^2 + 2m^2\right]. \tag{96}$$

Это дает возможность представить интеграл в виде

$$i(3-2\varepsilon)q^2\Pi = -4e^2Q^2 =$$
$$= \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N}\left[(\varepsilon-1)\left(\frac{1}{k^2-m^2} + \frac{1}{(k+q)^2-m^2}\right) + \frac{(1-\varepsilon)q^2+2m^2}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)}\right]. \tag{97}$$

Предположим, что мы работаем в $N=4$ измерениях ($\varepsilon = 0$), тогда первые два интеграла в (97) квадратично расходятся. Введем для них обрезание по импульсу,

тогда первый из интегралов в (97):

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2} = i\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{(-k_E^2-m^2)} \sim -\frac{i}{16\pi^2}M^2, \tag{98}$$

где проведен виковский поворот к евклидову пространству ($k^0 \to ik_E^0$), и $d^4k_E = \pi^2 k_E^2 dk_E^2$ (после интегрирования по углам), и сделано обрезание при $k_E^2 = M^2$. Второй интеграл в (97) дает тот же самый результат, если произвести сдвиг $k \to k - q$.

Таким образом

$$\Pi \sim \frac{e^2}{6\pi^2}Q^2\frac{M^2}{q^2}. \tag{99}$$

Подставляя это значение в (91), видим, что фотон приобретает (тахионную) массу $\sim O(M)$:

$$\frac{-i}{q^2[1-\Pi]} \sim \frac{-i}{q^2+(e^2/6\pi^2)Q^2M^2}. \tag{100}$$

Где нами допущена ошибка? Оказывается, что обрезание нарушает тождество Уорда:

$$\Pi_{\mu\nu} \sim M^2 g_{\mu\nu} \to q^\mu \Pi_{\mu\nu} \neq 0. \tag{101}$$

Таким образом, действительно тождество Уорда, которое следует из калибровочной симметрии, обеспечивает безмассовость фотона.

Вместо того, чтобы вводить обрезание, вычислим собственную энергию фотона в N измерениях при соблюдении тождества Уорда. Квадратично расходящиеся интегралы

$$\int \frac{d^Nk}{(2\pi)^N}\frac{1}{k^2-m^2} = \int \frac{d^Nk}{(2\pi)^N}\frac{1}{(k+q)^2-m^2} = -\frac{i}{(4\pi)^{N/2}}\Gamma(\varepsilon-1)(m^2)^{1-\varepsilon}. \tag{102}$$

Полюс при $\varepsilon = 1$ ($N = 2$) свидетельствует о квадратичной расходимости. Однако эти интегралы умножаются на фактор $(\varepsilon - 1)$ в выражении (97).

Поскольку $(\varepsilon-1)\Gamma(\varepsilon-1) = \Gamma(\varepsilon)$, то полюс возникает при $\varepsilon = 1$, и квадратичная расходимость — всего лишь иллюзия. Квадратичная зависимость от параметра обрезания M — лишь артефакт схемы регуляризации, нарушающей тождество Уорда.

Окончательно вычисление собственной энергии дает

$$\Pi = -\frac{8e^2Q^2}{(4\pi)^{N/2}}\Gamma(\varepsilon)\int\limits_0^1 dx\frac{x(1-x)}{[m^2-x(1-x)q^2]\varepsilon}. \tag{103}$$

Полюс при $\varepsilon = 0$ ($N = 4$) означает наличие логарифмической расходимости. Подставляя Π в выражение (91), мы видим, что фотонный пропагатор, благодаря тождеству Уорда, имеет полюс при $q^2 = 0$, т. е. фотон остается безмассовым.

Таким образом, стандартная модель успешно объясняет, почему фермионы и бозоны гораздо легче, чем гипотетический фундаментальный масштаб M.

Обратимся теперь к скалярам.

В этом случае стандартная модель не столь успешна. Массовый член скаляров имеет следующую форму:

$$L = -m^2\phi^\dagger\phi \tag{104}$$

и не связан с калибровочной симметрией, т. е. нет причин ожидать, чтобы скаляры были гораздо легче по сравнению с M. В стандартной модели это бы означало, что хиггсовское поле имеет массу $\sim O(M)$ и при низких энергиях было бы не способно нарушить электрослабую симметрию. Есть по крайней мере два пути, чтобы избежать этого заключения.

Один путь — ввести скалярные голдстоуновские бозоны некоторой нарушенной симметрии.

В другом подходе — создать безмассовые скаляры с использованием идей суперсимметрии. В этом случае скалярное поле заменяется скалярным суперполем: $\phi \to \Phi$. Суперпотенциал $W(\Phi)$ будет зависеть только от Φ, а не от Φ^*. Если скалярное поле преобразуется при комплексном или псевдовещественном представлении некоторой глобальной или локальной группы, то массовый член $W(\Phi) = (1/2)m\Phi^2$ подавлен точно также, как мы видели для фермионов в разд. 4.2.

Поскольку суперсимметрия связывает бозоны и фермионы, то неудивительно, что тот же самый метод, который был использован для получения легких фермионов, применим и в случае скаляров.

К сожалению, минимальная суперсимметричная стандартная модель непригодна для этих целей. Чтобы обеспечить массы u- и d-кваркам, эта модель включает два дублета хиггсовских суперполей H_1 и H_2 с противоположными гиперзарядами. Поэтому массовый член в суперпотенциале

$$W(H_1, H_2) = \mu H_2^T \varepsilon H_1 \qquad (105)$$

допускает калибровочную симметрию. Однако это не означает, что суперсимметрия несущественна для понимания, почему хиггсовские скаляры гораздо легче масштаба M. Таким образом, стандартная модель не дает ответа на вопрос, почему масса хиггса гораздо меньше M. Более того, кажется неестественным, что масса скаляров гораздо меньше M. Действительно, рассмотрим однопетлевые поправки к массе скаляра

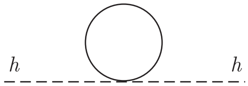


Рис. 6

Эта диаграмма имеет квадратичную расходимость, поэтому соотношение между массой хиггса при низких энергиях и масштабом M:

$$m^2(m) = m^2(M) + \frac{3}{4\pi^2}\lambda M^2, \qquad (106)$$

где λ — константа самовзаимодействия хиггсовского поля (61).

Чтобы получить $m^2(0) \ll M$, необходимо выполнение двух условий:

а) $m^2(M) \sim M^2$;

б) слагаемое $3/(4\pi^2)\lambda M^2$ должно сокращать с высокой точностью $m^2(M)$.

Это знаменитая проблема иерархий. Суперсимметричная теория не содержит квадратичных расходимостей, т. е. она «технически» решает проблему иерархий.

Подводя итоги, можно сказать, что стандартная модель успешно объясняет, почему массы фермионов и калибровочных бозонов пропорциональна $O(v)$, и, следовательно, гораздо меньше гипотетической шкалы M фундаментальной физики. Однако она не способна объяснить, почему масса хиггса или v гораздо меньше M. Эта проблема иерархий может иметь несколько направлений решения:

а) возможно, что на самом деле M не гораздо больше, чем v. В этом случае иерархии нет. За последнее время теории с дополнительными измерениями наиболее успешны в этом направлении;

б) возможно, что M лишь немного больше v, т. е. должна быть «небольшая» иерархия. В этом направлении развиваются модели «малого» хиггса;

в) возможно, что $M \gg v$. Это находит объяснение в низкоэнергетической суперсимметрии;

г) возможно, что фундаментальных скаляров нет в природе, а электрослабая симметрия нарушается другим способом. Например, модели техницвета нарушают электрослабую симметрию посредством фермион-антифермионных конденсатов.

Пожалуй, лишь эксперимент может дать ответ, какое из этих (или другое) направление выбрала Природа.

Приложение 1. Электрослабая теория как обобщение теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау на неабелеву калибровочную группу

1. Сверхпроводники, киральные симметрии и намбу–голдстоуновские бозоны. Физик, занимающийся элементарными частицами, охарактеризует электромагнитный сверхпроводник как некоторое (основное) состояние, в котором фотон становится массивным. Действительно, когда образец свинца охлаждается до 3 К, фотоны приобретают массу ~ 1 эВ, и в полной мере проявляются все характерные особенности сверхпроводимости (выталкивание силовых линий магнитного поля, уменьшение электрического сопротивления и т. д.). Вакуум «нашей» Вселенной, если его рассматривать как основное состояние стандартной модели, выглядит как электрослабый сверхпроводник, в котором массы $W^{\pm}$- и Z-бозонов ненулевые, а фотон остается безмассовым. Что касается КХД, то в этой теории имеет место спонтанное нарушение киральной симметрии, аналогичное БКШ сверхпроводимости. Легкие u-, d- и s-кварки формируют в вакууме конденсаты, за счет которых они приобретают конституентные кварковые массы. Это явление напоминает возникновение щели в спектре в теории БКШ.

Таким образом, явление нарушения киральной симметрии и динамической генерации масс можно изучать в рамках электродинамики и теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау.

На этом пути мы рассмотрим следующую последовательность моделей:

1) свободный сверхпроводник, в котором продольный фотон является безмассовым полем со спином 0;

2) безмассовый фермион;

3) модель, основанная на $U(1)_L \times U(1)_R$ фермионном лагранжиане, в которой фермионы приобретают массу в результате спонтанного нарушения симметрии и появляется NG-бозон;

4) абелева модель Хиггса (сверхпроводник Гинзбурга–Ландау).

Объединяя эту последовательность моделей, получим модель, в которой NG-бозон становится продольным фермионом.

1.1. *Сверхпроводник и массивный фотон.* Основополагающим принципом электродинамики является локальная $U(1)$-инвариантность. Как согласуется массивность фотона с калибровочной симметрией? Очевидно, что фотонный массовый член типа $(1/2)M^2 A_\mu A^\mu$ неинвариантен относительно калибровочного преобразования $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$. Однако добиться калибровочной инвариантности все-таки можно, если ввести в спектр теории безмассовое скалярное поле ϕ, связанное с продольной компонентой фотона. Лагранжиан КЭД (точнее, фотодинамики), содержащей такое поле, записывается в виде

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}e^2 f^2 (A_\mu)^2 - ef A_\mu \partial^\mu \phi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2 f^2 \left(A_\mu - \frac{1}{ef}\partial_\mu\phi\right)^2. \tag{1}$$

Этот лагранжиан калибровочно-инвариантен, если преобразование $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi/(ef)$ дополнить преобразованием $\phi \to \phi + \chi$. Величина f называется константой распада поля ϕ. Это аналог пионной константы f_π в КХД.

Как видно из соотношения (1), фотонный векторный потенциал и безмассовое поле ϕ объединяются и образуют новое поле $B_\mu = A_\mu - \partial_\mu \phi/(ef)$. Физически поле B_μ соответствует калибровочно-инвариантному массивному фотону с массой $m_\gamma = ef$.

Таким образом, лагранжиан рассматриваемой модели можно записать в терминах поля B_μ:

$$L = -\frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\gamma^2 (B_\mu)^2, \tag{2}$$

где $F_{B\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = F_{\mu\nu}$. Поле ϕ смешивается с A_μ и образует массивное фотонное поле. Говорят, что поле ϕ «поглощается» калибровочным полем и придает ему массу. Поля, подобные ϕ, называются намбу–голдстоуновскими бозонами. Они всегда присутствуют в теории, в которой непрерывные симметрии спонтанно нарушены.

1.2. *Безмассовый фермион и киральная симметрия.* Пусть состояние фермиона описывается четырехкомпонентным комплексным дираковским спинором $\psi(x)$. Определим левые и правые компоненты поля ψ:

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \\ \psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Проекционные операторы $(1 \pm \gamma_5)/2$ сводят поле ψ к двум независимым двухкомпонентным комплексным спинорам, каждый из которых реализует неприводимое представление группы Лоренца. Лагранжиан безмассового дираковского спинора распадается на два независимых кинетических члена

$$L = \overline{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi = \overline{\psi}_L i \partial\!\!\!/ \psi_L + \overline{\psi}_R i \partial\!\!\!/ \psi_R, \quad \partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu. \tag{4}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно двух независимых глобальных преобразований симметрии, так называемой киральной $U(1)_L \times U(1)_R$-симметрии:

$$\begin{aligned} \psi_L &\to \exp(-i\theta)\psi_L, \\ \psi_R &\to \exp(-i\omega)\psi_R. \end{aligned} \tag{5}$$

Преобразования симметрии, соответствующие сохранению фермионного числа, имеют $\theta = \omega$, а аксиальные (γ_5) преобразования имеют $\theta = -\omega$. По теореме Нетер токи

$$\begin{aligned} j_{\mu L} &= \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \theta(x)} = \frac{1}{2} \overline{\psi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5)\psi, \\ j_{\mu L} &= \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \omega(x)} = \frac{1}{2} \overline{\psi} \gamma_\mu (1 + \gamma_5)\psi. \end{aligned} \tag{6}$$

С помощью (6) можно ввести векторный $j_\mu = j_{\mu R} + j_{\mu L} = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ и аксиально-векторный ток $j_\mu^5 = j_{\mu R} - j_{\mu L} = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$.

Если в лагранжиан добавить массовый член, то правые и левые компоненты полей окажутся связанными, т. е. произойдет нарушение киральной симметрии

$$L = \overline{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - m\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}_L i \partial\!\!\!/ \psi_L + \overline{\psi}_R i \partial\!\!\!/ \psi_R - m(\overline{\psi}_L \psi_R + \overline{\psi}_R \psi_L). \tag{7}$$

Первоначальная $U(1)_L \times U(1)_R$ киральная симметрия нарушается до остаточной $U(1)_{L+R}$ — векторной симметрии сохранения фермионного числа. Как мы видели, векторный ток сохраняется, поскольку преобразование (5) сохраняет лагранжиан (7). Аксиальный ток, с другой стороны, уже не сохраняется

$$\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi = \overline{\psi}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}\gamma_5\psi + \overline{\psi}\gamma_5\overrightarrow{\partial\!\!\!/}\psi = -2im\overline{\psi}\gamma_5\psi. \tag{8}$$

Заметим, что дираковский массовый член нарушает аксиальную симметрию $(\theta = -\omega)$.

1.3. *Массивный фермион и намбу–голдстоуновский бозон.* Интересно, что вполне возможно сохранить полную $U(1)_L \times U(1)_R$ киральную симметрию и при этом обеспечить массу фермиону! Для этого введем комплексное скалярное поле ϕ, имеющее юкавскую связь, характеризуемую константой связи g, с фермионом. Пусть поле ϕ преобразуется относительно группы $U(1)_L \times U(1)_R$ следующим образом:

$$\phi \to \exp[-i(\theta - \omega)]\phi, \tag{9}$$

т. е. поле ϕ имеет ненулевые заряды, как относительно $U(1)_L$, так и $U(1)_R$. Лагранжиан системы:

$$L = \overline{\psi}_L i\partial\!\!\!/ \psi_L + \overline{\psi}_R i\partial\!\!\!/ \psi_R - g(\overline{\psi}_L \psi_R \phi + \overline{\psi}_R \psi_L \phi^*) + L_\phi, \tag{10}$$

где

$$L_\phi = |\partial\phi|^2 - V(|\phi|). \tag{11}$$

В отличие от предыдущего случая, когда был добавлен фермионный массовый член, нарушающий симметрию лагранжиана, лагранжиан (10), (11) инвариантен относительно $U(1)_L \times U(1)_R$ киральных преобразований симметрии. Векторный ток остается точно таким же, как и раньше, а аксиальный ток изменяется:

$$j^5_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi + 2i\phi^*(\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)\phi. \tag{12}$$

Теперь все готово для спонтанного нарушения симметрии и придания массы фермионам. Предположим, что потенциал поля ϕ:

$$V(\phi) = -M^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\phi|^4. \tag{13}$$

Вакуум вблизи полевой конфигурации с $\langle\phi\rangle = 0$ будет нестабильным. Пусть ненулевое вакуумное среднее $\langle\phi\rangle = v/\sqrt{2}$, причем v — вещественное. Минимум потенциальной энергии соответствует

$$\frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{M}{\sqrt{\lambda}}. \tag{14}$$

Параметризуем «малые осцилляции» возле вакуумного состояния в виде

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))\exp(i\phi(x)/f), \tag{15}$$

где $\phi(x)$ и $h(x)$ — вещественные поля. Подставляя (15) в (11), получим

$$L_\phi = \frac{1}{2}(\partial h)^2 - M^2h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}Mh^3 - \frac{1}{8}\lambda h^4 + \frac{v^2}{2f^2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2f^2}h^2(\partial\phi)^2 + \frac{\sqrt{2}M}{\lambda f^2}h(\partial\phi)^2 + \Lambda, \tag{16}$$

где через Λ обозначена отрицательная вакуумная плотность энергии (космологическая константа $\Lambda = -M^4/2\lambda$.

Как можно видеть из (16), поле $\phi(x)$ — безмассовое (намбу–голдстоуновская мода). Вследствие симметрии $\phi \to \phi+\xi$ это поле связано с другими полями посредством производной. Поле $h(x)$ имеет положительный квадрат массы $m^2 = 2M^2$. Правильная нормировка кинетического члена для поля ϕ требует, чтобы $f = v$. Напомним, что f — константа распада пионоподобного объекта ϕ.

Отметим, что масса $h(x)$ может быть произвольно большой. В самом деле, при $M \to \infty$ и $\lambda \to \infty$ величина $v^2 = f^2 = 2M^2/\lambda$ может быть фиксированной. В этом

случае флуктуации поля $h(x)$ оказываются подавленными, и мы остаемся с нелинейной σ-моделью. В этом пределе при низких энергиях оказываются существенным только поле Намбу–Голдстоуна. В нелинейной σ-модели поле ϕ параметризуется в виде:

$$\phi = \frac{f}{\sqrt{2}} \exp(i\phi/f). \tag{17}$$

Тогда аксиальный ток:

$$j_\mu^5 = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi - 2f\partial_\mu\phi, \tag{18}$$

где фактор 2 в последнем члене возникает за счет аксиального заряда поля ϕ, равного 2. После подстановки (17) в лагранжиан (10), содержащий фермионы, получим

$$L = \overline{\psi}_L i\partial\!\!\!/ \psi_L + \overline{\psi}_R i\partial\!\!\!/ \psi_R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{gf}{\sqrt{2}}\left(\overline{\psi}_L\psi_R e^{i\phi/v} + \overline{\psi}_R\psi_L e^{-i\phi/v}\right). \tag{19}$$

При разложении этого лагранжиана по степеням ϕ/f получим:

$$L = \overline{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi + \overline{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{gf}{\sqrt{2}}\overline{\psi}\psi - i\frac{g}{\sqrt{2}}\phi\overline{\psi}\gamma^5\psi + \ldots \tag{20}$$

Из этого выражения следует, что в теории имеется дираковский фермион с массой $m = gf/\sqrt{2}$ и безмассовый псевдоскалярный намбу–голдстоуновский бозон ϕ, связанный с $i\overline{\psi}\gamma_5\psi$ константой $g = \sqrt{2}m/f$.

1.4. *Массивный фотон и поглощенный намбу–голдстоуновский бозон.* Обсудим теперь, что происходит, если скалярное поле ϕ, имеющее заряд e, связано калибровочно-инвариантным образом с векторным потенциалом. Исключим на некоторое время из рассмотрения фермионы. Лагранжиан системы в этом случае:

$$L'_\phi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left|(i\partial_\mu - eA_\mu)\phi\right|^2 - V(\phi). \tag{21}$$

Лагранжиан (21) — калибровочно-инвариантен, поскольку наряду с преобразованием $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\chi$ следует преобразование $\phi \to e^{-ie\chi}\phi$. Скалярный потенциал определяется выражением (13), т. е. поле ϕ приобретает вакуумное среднее $v = (2/\lambda)M$. Как и прежде в формуле (15), можно параметризовать осцилляции вблизи минимума и ввести новый векторный потенциал:

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\phi. \tag{22}$$

Тогда лагранжиан (21) перепишется в виде

$$L'_\phi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \\ - M^2h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}Mh^3 - \frac{1}{8}\lambda h^4 + \frac{1}{2}e^2\left(h^2 + \frac{\sqrt{2}M}{\lambda}h\right)B_\mu B^\mu. \tag{23}$$

Таким образом, в теории наряду с массивным фотоном B_μ возникает электрически нейтральное поле h, которое называется хиггсовским бозоном. Эта частица имеет массу $\simeq \sqrt{2}M$, кубические и четверные взаимодействия, а также линейные и билинейные связи с массивными фотонами. Это модель сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау, ее называют абелевой моделью Хиггса.

Подчеркнем, что эта модель заведомо калибровочно-инвариантна, поскольку калибровочное поле и намбу–голдстоуновская мода входят в лагранжиан посредством комбинации (22). При этом намбу–голдстоуновский бозон становится продольной спиновой компонентой фотона.

1.5. *Массивный фотон и массивные фермионы.* Объединим, наконец, все отдельные компоненты теории 1.1–1.4 в единое целое. Например, можно объединить с абелевой моделью Хиггса левый фермион ψ_L с электрическим зарядом e и нейтральный правый фермион ψ_R:

$$L = L'_\phi + \overline{\psi}_L(i\partial\!\!\!/ - eA)\psi_L + \overline{\psi}_R i\partial\!\!\!/\psi_R - g(\overline{\psi}_L\psi_R\phi + \overline{\psi}_R\psi_L\phi^+). \tag{24}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно электромагнитных калибровочных преобразований. Кроме того, теория «внутренне киральна»: левый фермион имеет другой калибровочный заряд, чем правый фермион. Чтобы это увидеть, нужно снова представить поле ϕ в виде (15) и переопределить поле $\psi_L \to \exp(i\phi/v)\psi_L$:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - M^2h^2 - Mh^3 - \frac{1}{8}\lambda h^4 + \\ + \frac{1}{2}e^2h^2B_\mu B^\mu + \overline{\psi}i\partial\!\!\!/\psi - eB^\mu\overline{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{\sqrt{2}}gh\overline{\psi}\psi. \tag{25}$$

Итак, в теории возникает динамическая масса ev калибровочного бозона и динамическая дираковская фермионная масса $m = gv/\sqrt{2}$. Дираковская масса смешивает киральные фермионы, несущие различные калибровочные заряды.

Аналог всех рассмотренных выше моделей можно найти в электрослабом секторе стандартной модели. Электрослабый сектор имеет калибровочную группу $SU(2)_L \times U(1)$. Скаляр ϕ заменяется слабым изоспиновым дублетом (хиггсовским дублетом). Произвольная компонента ϕ формирует вакуумное среднее, определяющее нейтральное направление в изоспиновом пространтсве. Три из четырех компонент хиггсовского изодублета становятся намбу–голдстоуновскими бозонами, объединяются с калибровочными бозонами и придают им массы: $W^\pm$ и Z становятся массивными, фотон же остается безмассовым. Четвертая компонента поля ϕ остается в спектре как массивный объект (хиггсовский бозон).

Поскольку электрослабый сектор основан на неабелевой группе $SU(2)$, даже на древесном уровне оказываются возможными взаимодействия $(h, h^2) \times (W^\pm W^\mp, ZZ)$. Аналогичные связи в абелевой модели Хиггса $(h\gamma\gamma)$ на древесном уровне отсутствуют.

Таким образом, электрослабую теорию можно рассматривать как Лоренц-инвариантное обобщение теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау на неабелеву калибровочную группу.

Приложение 2. Аномалии стандартной модели

1. Введение. Иногда предполагается, что классические симметрии теории сохраняются и на квантовом уровне. Это предположение, однако, не всегда оправдано, особенно для симметрий, связанных с изменением масштабов. Обсудим, к примеру, теорию, содержащую поле ϕ с канонической размерностью Δ. Это означает, что в отсутствие размерных параметров в лагранжиане классическая теория инвариантна относительно конформного преобразования:

$$x^\mu \to \lambda x^\mu; \quad \phi(x) \to \lambda^{-\Delta}\phi(\lambda^{-1}x). \tag{1}$$

Например, для безмассовой $\lambda\phi^4$-теории в четырех измерениях лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{2}$$

а скалярное поле имеет каноническую размерность $\Delta = 1$. Относительно преобразований (1) лагранжиан (2) преобразуется следующим образом

$$L \to \lambda^{-4}L. \tag{3}$$

При этом классическое действие не меняется. Однако инвариантность классической теории по отношению к некоторой группе преобразований не обязательно сохраняется при ее квантовании. Причина заключается в необходимости регуляризации расходящихся квантовых поправок. При регуляризации обычно вводится параметр обрезания на некотором энергетическом масштабе, и именно наличие этого масштабного параметра нарушает инвариантность квантовой теории относительно конформных преобразований (1). При этом каноническая размерность поля приобретает поправку $\Delta = 1 + \gamma(\lambda)$.

Важно отметить, что подобные аномалии возникают не за счет «неудачного» выбора метода регуляризации. Когда говорят об аномалиях, то имеют в виду, что классические симметрии, независимо от метода регуляризации, не могут быть реализованы в квантовом случае.

2. Аксиальная аномалия. Этот тип аномалий возникает при рассмотрении аксиальных симметрий. Выберем теорию, содержащую два вейлевских спинора:

$$L = i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi = iu_+^+\sigma_+^\mu\partial_\mu u_+ + iu_-{}^+\sigma_-{}^\mu\partial_\mu u_-. \tag{4}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно двух типов глобальных $U(1)$-преобразований. Относительно первого типа оба спиральных состояния преобразуются с одинаковой фазой (векторное преобразование):

$$U(1)_V\colon u_\pm \to e^{i\alpha}u_\pm. \tag{5}$$

Относительно же второго типа преобразований (аксиального) знаки фаз различны для двух киральных состояний:

$$U(1)_A\colon u_\pm \to e^{\pm i\alpha}u_\pm. \tag{6}$$

Согласно теореме Нетер, существует два сохраняющихся тока. Векторный ток:

$$\begin{gathered} J_V^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = u_+^+\sigma_+^\mu u_+ + u_-{}^+\sigma_-{}^\mu u_-, \\ \partial_\mu J_V^\mu = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

и аксиально-векторный ток

$$J^\mu_A = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi = u_+^+\sigma_+^\mu u_+ - u_-{}^+\sigma_-{}^\mu u_-, \\ \partial_\mu J^\mu_A = 0. \tag{8}$$

Часто рассматривают теорию (4), связанную с электромагнитным током. Такая теория на классическом уровне инвариантна относительно векторных и аксиальных симметрий (5), (6). Однако при квантовании сохранение (8) нарушено за счет квантовых эффектов,

$$\partial_\mu J^\mu_A \sim \hbar(\vec{E}\cdot\vec{B}). \tag{9}$$

Чтобы понять механизм возникновения аномалии, рассмотрим двумерную модель. Это, с одной стороны, упрощает рассмотрение. С другой стороны, двумерная модель содержит существенную для нас физику четырехмерной модели. Будем работать в двумерном пространстве Минковского с координатами $(x^0, x^1) = (t, x)$, причем считаем пространственное измерение компактифицированным на цикле S^1. Таким образом, рассматривается модель фермиона, связанного с электромагнитным полем. Заметим, что в двух измерениях тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ имеет только одну независимую компоненту, соответствующую электрическому полю вдоль пространственного направления $F^{01} = \varepsilon$ (в двух измерениях нет магнитных полей). Двумерные γ-матрицы имеют вид:

$$\gamma^0 \equiv \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 \equiv i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Это так называемое киральное представление, в котором матрица γ_5 — диагональна:

$$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Записывая двухкомпонентный спинор ψ в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \tag{12}$$

и используя обычные проекционные операторы $P_\pm = (1/2)(1 \pm \gamma_5)$, получаем, что компоненты $u_\pm$-спинора ψ являются, соответственно, правыми и левыми вейлевскими спинорами в двух измерениях. Для выбранного представления γ-матриц запишем уравнение Дирака. В терминах компонент $u_\pm$ дираковского спинора

$$(\partial_0 - \partial_1)u_+ = 0, \quad (\partial_0 + \partial_1)u_- = 0. \tag{13}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид:

$$u_+ = u_+(x^0 + x^1); \quad u_- = u_-(x^0 - x^1). \tag{14}$$

Таким образом, $u_\pm$ — два волновых пакета, движущихся вдоль пространственного измерения налево (u_+) и направо (u_-). При этом u_+ — спинор с положительно спиральностью, а u_- — с отрицательной спиральностью.

Если интерпретировать (13) как волновые уравнения для двумерных вейлевских спиноров, то для волновых функций свободных частиц с импульсом $p^\mu = (E, p)$ можно записать

$$u_\pm{}^{(E)}(x^0 \pm x^1) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-iE(x^0 \pm x^1)}, \quad p = \mp E. \tag{15}$$

Как обычно для уравнения Дирака, существуют решения с положительными и отрицательными энергиями. Для u_+ $E = -p$, т. е. решения с положительной энергией имеют отрицательный импульс. Решения же с отрицательной энергией — плоские волны с $p > 0$. Для левого спинора u_- ситуация противоположная.

Из-за компактности пространственного направления, имеющего размер L, импульс p квантуется:

$$p = \frac{2\pi n}{L}, \quad n \in Z. \tag{16}$$

Спектр безмассового двумерного дираковского поля показан на рис. 1.

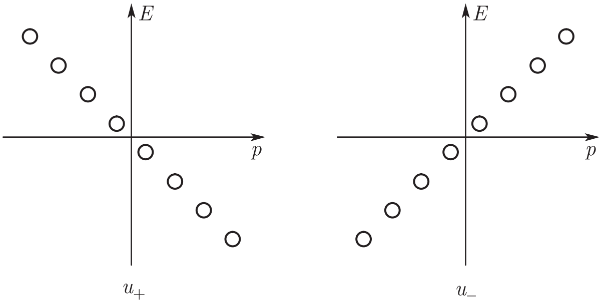


Рис. 1

Имея спектр теории, построим ее вакуум. Как и для уравнения Дирака в четырех измерениях, заполним все состояния с $E \leq 0$ (рис. 2).

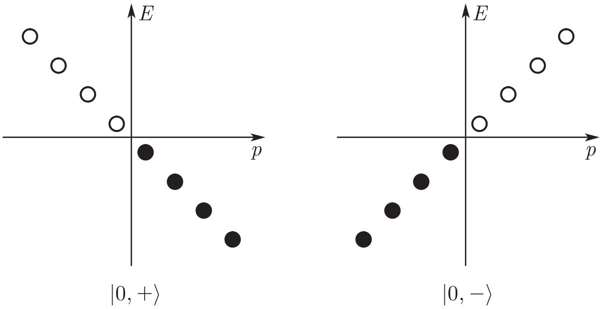


Рис. 2

Возбуждение частицы в дираковском море создает фермион с положительной энергией и дырку, которая интерпретируется как античастица. Таким образом, очевидна процедура квантования теории. При разложении оператора $u_\pm$ в терминах мод (15) следует связать состояния с положительной энергией с аннигиляционными операторами, а состояния с отрицательной энергией — с операторами рождения соответствующей античастицы:

$$u_\pm(x) = \sum_{E>0} \left[a_\pm(E) v_\pm{}^{(E)}(x) + b_\pm{}^{+}(E) v_\pm{}^{(E)*}(x) \right]. \tag{17}$$

Оператор $a_\pm(E)$, действуя на вакуум $|0, \pm\rangle$, уничтожает частицу с положительной энергией E и импульсом $\mp E$. Аналогично, $b_\pm{}^{+}(E)$ рождает из вакуума античастицу с положительной энергией и импульсом $\mp E$. В картине дираковского моря оператор

$b_\pm{}^+(E)$ — оператор уничтожения состояния из моря с отрицательной энергией $-E$. Аналогично четырехмерному случаю, проблема состояний с отрицательной энергией решается путем интерпретации операторов уничтожения для состояний с отрицательной энергией как операторов рождения соответствующей античастицы с положительной энергией. Операторы в разложении (17) удовлетворяют обычной алгебре операторов рождения и уничтожения:

$$\left\{a_\lambda(E), a_\lambda'{}^+(E')\right\} = \left\{b_\lambda(E), b_\lambda'{}^+(E')\right\} = \delta_{E,E'}\delta_{\lambda,\lambda'}, \tag{18}$$

где введены обозначения $\lambda, \lambda' = \pm$.

Лагранжиан теории

$$L = iu_+^+(\partial_0 + \partial_1)u_+ + iu_-{}^+(\partial_0 - \partial_1)u_- \tag{19}$$

инвариантен как относительно преобразований $U(1)_V$ (5), так и $U(1)_A$ (6). Согласно теореме Нетер, ассоциированные токи получаются в виде

$$\begin{aligned} J_V^\mu &= \begin{pmatrix} u_+^+u_+ + u_-{}^+u_- \\ -u_+^+u_+ + u_-{}^+u_- \end{pmatrix}, \\ J_A^\mu &= \begin{pmatrix} u_+^+u_+ - u_-{}^+u_- \\ -u_+^+u_+ - u_-{}^+u_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

Соответствующие сохраняющиеся заряды для векторного тока

$$Q_V = \int\limits_0^L dx^1(u_+^+u_+ + u_-{}^+u_-), \tag{21}$$

и для аксиального тока

$$Q_A = \int\limits_0^L dx^1(u_+^+u_+ - u_-{}^+u_-). \tag{22}$$

Используя условия ортонормированности на моды $v_\pm{}^{(E)}(x)$:

$$\int\limits_0^L dx^1 v_\pm{}^{(E)}(x)v_\pm{}^{(E')}(x) = \delta_{E,E'} \tag{23}$$

находим для сохраняющихся зарядов:

$$Q_V = \sum_{E>0}\left[a_+^+(E)a_+(E) - b_+^+(E)b_+(E) + a_-{}^+(E)a_-(E) - b_-{}^+(E)b_-(E)\right], \tag{24}$$

$$Q_A = \sum_{E>0}\left[a_+^+(E)a_+(E) - b_+^+(E)b_+(E) - a_-{}^+(E)a_-(E) - b_-{}^+(E)b_-(E)\right]. \tag{25}$$

Из (24)–(25) видно, что Q_V есть сумма избытка (число частиц минус число античастиц) состояний с положительными спиральностями и состояний с отрицательными спиральностями. Аксиальный же заряд есть разность между избытком состояний с положительной спиральностью и с отрицательной спиральностью. В свободной теории, очевидно, нет проблем с сохранением как Q_V, так и Q_A, поскольку числа заполнения не меняются. Посмотрим, что происходит, если учесть связь фермиона с электрическим полем ε. Будем работать в калибровке $A_0 = 0$, считая, что электрическое поле изменяется адиабатически по времени: в течение времени τ_0 векторный

потенциал изменяется от A_1 до величины $-\varepsilon\tau_0$. Как известно, учет связи фермиона с электромагнитным полем сводится к сдвигу импульса

$$p \to p - eA_1, \tag{26}$$

где e — заряд фермиона.

Поскольку векторный потенциал меняется адиабатически, будем его считать приблизительно постоянным во времени. К чему приведет (26) с точки зрения вакуумной структуры рис. 2? Как видно из рис. 3, некоторые состояния v_+ с отрицательной энергией приобретают положительную энергию, а то же самое число незаполненных состояний с положительной энергией приобретают отрицательную энергию.

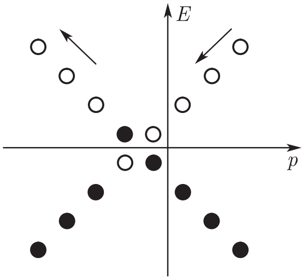


Рис. 3

Физически это означает, что внешнее электрическое поле ε создает из вакуума пары частица-античастица. Обозначая через $N \sim e\varepsilon$ число пар, создаваемых электрическим полем в единицу времени, получаем для зарядов:

$$\begin{aligned} Q_V(\tau_0) &= (N-0)+(0-N)=0, \\ Q_A(\tau_0) &= (N-0)-(0-N)=2N. \end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, из-за связи с электрическим полем аксиальный заряд нарушается, причем величина нарушения в единицу времени $\Delta Q_A \sim e\varepsilon$.

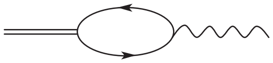
Поэтому

$$\partial_\mu J^\mu_A \sim e\hbar\varepsilon, \tag{28}$$

где мы восстановили $\hbar$, чтобы подчеркнуть, что нарушение аксиального тока — квантовый эффект. В то же время условие $\Delta Q_V = 0$ гарантирует, что векторный ток сохраняется на квантовом уровне: $\partial_\mu J^\mu_V = 0$.

Мы рассмотрели двумерный случай аксиальной аномалии Адлера–Белл–Джекива. Более точно, аксиальная аномалия возникает при вычислении величины

$$c^{\mu\nu} = \langle 0|T[J^\mu_A(x)J^\nu_V(0)]|0\rangle = \tag{29}$$



Аномалия определяется производной $\partial_\mu c^{\mu\nu}$. Точные вычисления дают для

$$\partial_\mu J^\mu_A = \frac{e\hbar}{2\pi}\varepsilon^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}, \tag{30}$$

где $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$.

Аксиальная аномалия присутствует в моделях с четным числом пространственно-временных измерений. В частности, в четырех измерениях аксиальная аномалия

$$\partial_\mu J^\mu_A = -\frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\lambda}. \tag{31}$$

Этот результат имеет очень важные следствия в физике сильных взаимодействий.

3. Киральная аномалия КХД. Рассмотрим свойства неабелевой калибровочной теории, содержащей калибровочную группу $SU(N_C)$ и N_f ароматов кварков. Кварки несут два индекса Q^{if}: цветовой $i = 1, \ldots, N_C$ и индекс аромата $f = 1, \ldots, N_f$. В КХД $N_C = 3$, а число ароматов кварков равно шести.

Предположим, что массы кварков $m_f \to 0$. В этом пределе лагранжиан

$$L_{\text{КХД}} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f}\left[i\overline{Q}^f_L \not{D} Q^f_L + i\overline{Q}^f_R \not{D} Q^f_R\right], \tag{32}$$

где L иR соответствуют левым и правым компонентам спиноров. Помимо калибровочной симметрии, лагранжиан (32) инвариантен относительно глобальных преобразований $U(N_f) \times U(N_f)$, действующих на индексы ароматов:

$$\begin{aligned} &U(N_f)_L\colon \begin{cases} Q^f_L \to \sum\limits_{f}^{\prime}(U_L)_{ff'}Q^{f'}_L \\ Q^f_R \to Q^f_R \end{cases} \\ &U(N_f)_R\colon \begin{cases} Q^f_L \to Q^f_L \\ Q^f_R \to \sum\limits_{f}^{\prime}(U_R)_{ff'}Q^{f'}_R \end{cases} \end{aligned} \tag{33}$$

причем $U_L, U_R \in U(N_f)$.

Поскольку $U(N) = U(1) \times SU(N)$, глобальная группа симметрии может быть представлена в виде $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$. Абелеву подгруппу $U(1)_L \times U(1)_R$ представим как разложение на векторную $U(1)_B$ и аксиальную подгруппу $U(1)_A$, определяемые преобразованиями:

$$U(1)_B\colon \begin{cases} Q^f_L \to e^{i\alpha}Q^f_L \\ Q^f_R \to e^{i\alpha}Q^f_R \end{cases} \quad U(1)_A\colon \begin{cases} Q^f_L \to e^{i\alpha}Q^f_L \\ Q^f_R \to e^{-i\alpha}Q^f_R \end{cases}. \tag{34}$$

Согласно теореме Нетер, с этими двумя абелевыми симметриями связаны два сохраняющихся тока:

$$J^\mu_V = \sum_{f=1}^{N_f}\overline{Q}^f\gamma^\mu Q^f, \quad J^\mu_A = \sum_{f=1}^{N_f}\overline{Q}^f\gamma^\mu\gamma^5 Q^f. \tag{35}$$

Сохраняющийся заряд, связанный с векторным током, — барионное число, определяемое как разность между числом кварков и антикварков.

Неабелева же часть глобальной группы симметрии разлагается на векторную и аксиальную подгруппы, определяемые следующими преобразованиями кварковых полей:

$$\begin{aligned} &SU(N_f)_V\colon \begin{cases} Q^f_L \to \sum\limits_{f'}(U_L)_{ff'}Q^{f'}_L \\ Q^f_R \to \sum\limits_{f'}(U_L)_{ff'}Q^{f'}_R \end{cases} \\ &SU(N_f)_A\colon \begin{cases} Q^f_L \to \sum\limits_{f'}(U_L)_{ff'}Q^{f'}_L \\ Q^f_R \to \sum\limits_{f'}(U^{-1}_R)_{ff'}Q^{f'}_R \end{cases} \end{aligned} \tag{36}$$

Применение теоремы Нетер приводит к следующим сохраняющимся неабелевым зарядам:

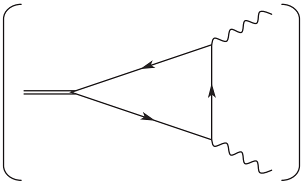
$$J_V^{I\mu} = \sum_{f,f'=1}^{N_f} \overline{Q}^f \gamma^\mu (T^I)_{ff'} \overline{Q}^{f'}, \qquad J_A^{I\mu} = \sum_{f,f'=1}^{N_f} \overline{Q}^f \gamma^\mu \gamma^5 (T^I)_{ff'} \overline{Q}^{f'}. \tag{37}$$

Таким образом, показано, что первоначальная киральная симметрия лагранжиана КХД (32) может быть представлена в виде:

$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R = SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \times U(1)_B \times U(1)_A. \tag{38}$$

Теперь нужно выяснить, какая часть классической глобальной симметрии будет сохранена в квантовой теории. Как уже было видно выше, сохранение аксиальных токов J_A^μ и $J_A^{a\mu}$ может быть нарушено аномалией. В случае абелевого аксиального тока J_A^μ соответствующая корреляционная функция, приводящая к аномалии

$$C^{\mu\nu\sigma} = \langle 0|T[J_A^\mu(x) j^{a\nu}_{\text{калибр.}}(x') j^{a\sigma}_{\text{калибр.}}(0)]|0\rangle = \sum_{f=1}^{N_f}$$



симметр. (39)

Здесь $j^{a\mu}_{\text{калибр.}}$ — неабелевый сохраняющийся ток, связанный с глюонным полем:

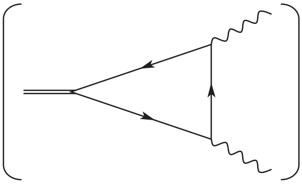
$$j^{a\nu}_{\text{калибр.}} = \sum_{f=1}^{N_f} \overline{Q}^f \gamma^\mu \tau^a Q^f, \tag{40}$$

где, во избежание путаницы с генераторами глобальной симметрии, через τ^a обозначены генераторы калибровочной группы $SU(N_C)$. Если предполагать Бозе-симметрию по отношению к перестановкам глюонов в (39) и калибровочную инвариантность, то $\partial_\nu C^{\mu\nu\sigma} = 0 = \partial_\sigma C^{\mu\nu\sigma}$.

Тогда аксиальный абелев глобальный ток имеет аномалию:

$$\partial_\mu J_A^\mu = -\frac{g^2 N_f}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}. \tag{41}$$

В случае неабелевой аксиальной симметрии $SU(N_f)_A$ вычисление аномалии производится аналогично. Результат, однако, получается другим: неабелев аксиальный ток $J_A^{a\mu}$ не является аномальным. Это легко обнаружить, поскольку связанная с аксиальным током вершина содержит генератор T^I группы $SU(N_f)$, а две двухглюонные вершины включают генераторы τ^a калибровочной группы $SU(N_C)$. Поэтому треугольная диаграмма пропорциональна фактору



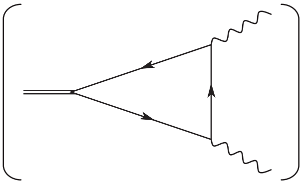
симметр.

$$\sim \operatorname{tr} T^I \operatorname{tr}\{\tau^a, \tau^b\} = 0 \tag{42}$$

и зануляется в силу того, что генераторы $SU(N_f)$ имеют нулевой след.

Таким образом, неабелева аксиальная симметрия $SU(N_f)_A$ не является аномальной. Но на этом «история» не заканчивается, поскольку кварки — заряженные частицы, связанные с фотонами. Поэтому существует второй потенциальный источник аномалии, возникающий за счет однопетлевой треугольной диаграммы, связывающей $J_A^{I\mu}$ с двумя фотонами:

$$\langle 0|T[J_A^{I\mu}(x) j_{em}^{\nu}(x') j_{em}^{\sigma}(0)]|0\rangle = \sum_{f=1}^{N_f}$$



симметр. , (43)

где J_{em}^{μ} — электромагнитный ток

$$j_{em}^{\mu} = \sum_{f=1}^{N_f} q_f \overline{Q}^f \gamma^{\mu} Q^f, \tag{44}$$

q_f — электрический заряд f-того кваркового аромата. Вычисление диаграммы (43) обнаруживает существование аномалии Адлера–Белла–Джекива:

$$\partial_{\mu} J_A^{I\mu} = -\frac{N_C}{16\pi^2} \left[\sum_{f=1}^{N_f} (T^I)_{ff} q_f^2 \right] \varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} F_{\mu\nu} F_{\sigma\lambda}, \tag{45}$$

где $F_{\mu\nu}$ — напряженность электромагнитного поля, связанного с кварками. Единственная возможность сокращения этой аномалии состоит в том, чтобы величина в квадратных скобках (45) тождественно обращалась в ноль.

Таким образом, из-за существования аномалий аксиальная часть глобальной киральной симметрии $SU(N_f)_A$, а также $U(1)_A$-симметрия, вообще говоря, не реализуются на квантовом уровне. Причем $U(1)_A$-симметрия всегда нарушается аномалией. Однако, из-за того что правая часть уравнения (41) является полной производной, аномальный характер J_A^{μ} не объясняет отсутствия $U(1)_A$-мультиплетов в адронном спектре. Кроме того, отсутствие кандидата на голдстоуновский бозон, связанный с $U(1)_A$, указывает на то, что $U(1)_A$ не является спонтанно нарушенной симметрией. Эта симметрия должна быть нарушена другим механизмом. Это так называемая $U(1)_A$-проблема, ее решение найдено т'Хоофтом. Он показал, что нарушение $U(1)_A$-симметрии связано с квантовыми переходами между вакуумами с различными топологическими квантовыми числами.

Аксиальная неабелева симметрия спонтанно нарушена ненулевыми вакуумными средними от билинейных комбинаций кварковых полей

$$\langle 0|\overline{Q}^f Q^f|0\rangle \neq 0 \tag{46}$$

(нет суммирования по f!)

Эти конденсаты нарушают киральную инвариантность до векторной подгруппы $SU(N_f)_V$. Поэтому единственная подгруппа первоначальной глобальной группы симметрии, которая «выживает» при низких энергиях

$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R \to SU(N_f)_V \times U(1)_B. \tag{47}$$

Ассоциированный с этим нарушением голдстоуновский бозон должен нести квантовые числа нарушенного неабелева тока. Например, в случае КХД голдстоуновские бозоны, связанные со спонтанным нарушением симметрии, вызванным наличием

конденсатов $\langle \overline{u}u \rangle$, $\langle \overline{d}d \rangle$ и $\langle (\overline{u}d - \overline{d}u) \rangle$ — пионы π^0, $\pi^\pm$. Эти бозоны не являются безмассовыми, поскольку u- иd-кварки имеют ненулевые массы. Так как глобальная киральная симметрия уже нарушена массовыми членами в лагранжиане, то голдстоуновские бозоны обладают массой, хотя их массы гораздо меньше масс других адронов.

Обсудим более подробно роль аномалий в физике сильных взаимодействий. Так как u- и d-кварки имеют гораздо меньшие массы по сравнению с кварками других ароматов, то КХД при низких энергиях хорошо описывается в приближении двух кварковых ароматов. В этом приближении глобальная симметрия теории — $SU(2)_V \times U(1)_B$, причем векторная группа $SU(2)_V$ — хорошо известная группа изоспина. Аксиальный $U(1)_A$-ток, в силу (41), — аномальный для $N_f = 2$.

В случае неабелевой аксиальной симметрии $SU(2)_A$, с учетом $q_u = (2/3)e$, $q_d = -(1/3)e$ и трех генераторов $SU(2)$, записанных через матрицы Паули $T^k = (1/2)\sigma^k$, имеем

$$\sum_{f=u,d} (T^1)_{ff} q_f^2 = \sum_{f=u,d} (T^2)_{ff} = 0, \quad \sum_{f=u,d} (T^3)_{ff} q_f^2 = \frac{e^2}{6}. \tag{48}$$

Таким образом, ток $J_A^{3\mu}$ — аномальный. Аномалия аксиального тока $J_A^{3\mu}$ имеет важные физические следствия. В кварковой модели волновая функция нейтрального пиона

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{u}u - \overline{d}d). \tag{49}$$

Изоспиновое квантовое число $|\pi^0\rangle$ определяется генератором T^3. Величину $\partial_\mu J_A^{3\mu}$ можно рассматривать, как оператор, рождающий π^0 из вакуума:

$$|\pi^0\rangle \sim \partial_\mu J_A^{3\mu} |0\rangle. \tag{50}$$

Тогда треугольную диаграмму (43) можно считать петлевым вкладом в амплитуду распада:

$$\pi^0 \to 2\gamma. \tag{51}$$

Существование аномалий, связанных с глобальными симметриями обычно не создает каких-либо трудностей для теории. Другая ситуация, однако, с локальными симметриями. Квантовомеханическое нарушение калибровочной симметрии приводит к различного рода трудностям теории: утрате перенормируемости и появлению состояний с отрицательной нормой. Дело в том, что из-за присутствия аномалии теорема Гаусса $\vec{\nabla}\vec{E}_a = \rho_a$ в квантовой теории не выполняется. Как следствие, классические состояния, исключаемые калибровочной симметрией, способны в квантовой теории распространяться, нарушая при этом согласованность теории. Аномалии калибровочных симметрий существуют только в киральных теориях, в которых левые и правые фермионы преобразуются в разных представлениях калибровочной группы. Наиболее интересный пример такого типа теорий — электрослабый сектор стандартной модели, в котором левые фермионы преобразуются как дублеты относительно $SU(2)$, а правые фермионы — как синглеты. КХД свободна от калибровочных аномалий, так как и левые, и правые компоненты кварковых полей преобразуются в фундаментальном представлении $SU(3)$.

Рассмотрим лагранжиан

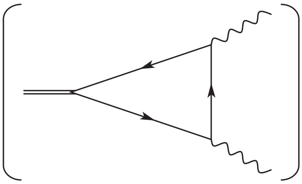
$$L = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + i \sum_{i=1}^{N_+} \overline{\psi}_+^i \not{D}^{(+)} \psi_+^i + i \sum_{j=1}^{N_-} \overline{\psi}_-{}^j \not{D}^{(-)} \psi_-{}^j, \tag{52}$$

где киральные фермионы ${\psi_\pm}^i$ преобразуются в представлениях $\tau^a_{i,\pm}$ калибровочной группы G ($a = 1, \ldots, \dim G$). Ковариантные производные определяются следующим образом:

$$D^{(\pm)}_\mu {\psi_\pm}^i = \partial_\mu {\psi_\pm}^i + igA^k_\mu \tau^k_{i,\pm} {\psi_\pm}^i. \tag{53}$$

Как и в случае глобальных симметрий, аномалии калибровочных симметрий появляются в треугольной диаграмме, включающей аксиальный калибровочный ток и двумя вершинами с векторными калибровочными токами:

$$\langle 0|T[j^{a\mu}_A(x) j^{b\nu}_V(x') j^{c\sigma}_V(0)]|0\rangle = \tag{54}$$



симметр. ,

где калибровочные векторные и аксиальные токи:

$$\begin{aligned} j^{a\mu}_V &= \sum_{i=1}^{N_+} \overline{\psi}^i_+ \tau^a_+ \gamma^\mu \psi^i_+ + \sum_{j=1}^{N_-} \overline{\psi}_-{}^j \tau_-{}^a \gamma^\mu \psi_-{}^j, \\ j^{a\mu}_S &= \sum_{i=1}^{N_+} \overline{\psi}^i_+ \tau^a_+ \gamma^\mu \psi^i_+ + \sum_{j=1}^{N_-} \overline{\psi}_-{}^j \tau_-{}^a \gamma^\mu \psi_-{}^j. \end{aligned} \tag{55}$$

К счастью, для нахождения условия сокращения аномалии нет необходимости вычисления диаграммы. Достаточно найти общий групповой фактор. Для диаграммы (54) этот фактор

$$\mathrm{tr}\big[\tau^a_{i,\pm}\{\tau^b_{i,\pm}, \tau^c_{i,\pm}\}\big], \tag{56}$$

где знаки ($\pm$) соответствуют генераторам представления калибровочной группы для левых и правых фермионов. Тогда условие сокращения аномалии:

$$\sum_{i=1}^{N_+} \mathrm{tr}\big[\tau^a_{i,+}\{\tau^b_{i,+}, \tau^c_{i,+}\}\big] - \sum_{j=1}^{N_-} \mathrm{tr}\big[\tau^a_{j,-}\{\tau^b_{j,-}, \tau^c_{j,-}\}\big] = 0. \tag{57}$$

Проверим сокращение аномалии в стандартной $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$-модели. Левые фермионы (кварки и лептоны) преобразуются как дублеты по отношению к $SU(2)_L$, а правые — как синглеты. Заряд по отношению к $U(1)_Y$ (гиперзаряд Y) определяется формулой Гелл-Манна–Нишиджимы:

$$Q_3 = T_3 + Y, \tag{58}$$

где Q — электрический заряд соответствующей частицы, T_3 — собственное значение третьего генератора $SU(2)$ в соответствующем представлении: $T_3 = (1/2)\sigma^3$ для дублетов и $T_3 = 0$ для синглетов. Для первого семейства кварков (u, d) и лептонов (e, ν_e) следующий состав полей:

$$\begin{aligned} &\text{кварки} \quad \begin{pmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{pmatrix}_{L,1/6}, \ u^\alpha_{R,2/3}, \ d^\alpha_{R,2/3}, \\ &\text{лептоны} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_{L,-1/2}, \ e_{R,-1}, \end{aligned} \tag{59}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$ обозначает цветовое квантовое число, а индексы $1/6, 2/3, \ldots$ — слабый гиперзаряд Y. Если обозначить представления группы $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ через (n_c, n_ω), где n_c и n_ω — представления $SU(3)_C$ и $SU(2)_L$, Y — гиперзаряд, то стандартная модель включает в себя три семейства представлений:

$$\begin{array}{llll} \text{левые фермионы} & (3{,}2)^L_{1/6} & (1{,}2)^L_{-1/2} & \\ \text{правые фермионы} & (3{,}1)^R_{2/3} & (3{,}1)^R_{-1/3} & (1{,}1)^R_{-1} \end{array} \qquad (60)$$

При вычислении треугольной диаграммы имеется десять способов возможной связи группового фактора калибровочной группы $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ с каждой вершиной:

$$\begin{array}{llll} SU(3)^3_C & SU(2)^3_L & U(1)^3_Y & \\ SU(3)^2_C & SU(2)_L & SU(2)_L & U(1)_Y \\ SU(3)^2_C & U(1)_Y & SU(2)_L & U(1)^2_Y \\ SU(3)_C & SU(2)_L & & \\ SU(3)_C & SU(2)_L & U(1)_Y & \\ SU(3)_C & U(1)^2_Y & & \end{array} \qquad (61)$$

Легко проверить, что некоторые из этих комбинаций не приводят к аномалии. Например, для $SU(3)^2_C$-случая происходит сокращение аномалии, поскольку левые и правые компоненты кварков преобразуются в одном представлении. В случае $SU(2)^2_L$ тоже происходит сокращение аномалии, и это связано со свойством матриц Паули $\sigma^a\sigma^b = \delta^{ab} + i\varepsilon^{abc}\sigma^c$:

$$\operatorname{tr}\left[\sigma^a\{\sigma^b, \sigma^c\}\right] = 2(\operatorname{tr}\sigma^a)\delta^{bc} = 0. \qquad (62)$$

Труднее увидеть сокращение аномалии для трех $U(1)_Y$. В этом случае сокращение аномалии гарантируется нетривиальным тождеством:

$$\sum_{\text{лев.}} Y_+^3 - \sum_{\text{прав.}} Y_-{}^3 = 3\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - (-1)^3 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0. \qquad (63)$$

Весьма примечательно, что аномалия сокращается, если учесть как кварки, так и лептоны. Заметим также, что этот результат справедлив и в том случае, если в теорию добавить правые стерильные нейтрино, так как это нейтрино является синглетом по отношению к калибровочной группе стандартной модели, т. е. не вносит вклада в треугольную диаграмму.

Таким образом, содержание полей стандартной модели «подобрано» так, чтобы обеспечить самосогласованность теории на квантовом уровне.

Выше аномалии рассматривались при вычислении однопетлевых диаграмм. Могло бы так случиться, что петлевые поправки высших порядков приводили к дополнительным условиям для сокращения аномалий. К счастью, это не так. Теорема Адлера–Бардина утверждает, что аксиальная аномалия определяется вкладом однопетлевых диаграмм. Однако теорема Адлера–Бардина справедлива только в теории возмущений. Непертурбативные эффекты могут приводить к нарушению калибровочной симметрии. На это впервые обратил внимание Виттен в связи с нетривиальной топологией калибровочной группы $SU(2)$ стандартной модели. Если число левых $SU(2)$ фермионных дублетов четно, калибровочная инвариантность совместима

с нетривиальной теорией. Замечательно, что структура семейств стандартной модели приводит к сокращению этой аномалии:

$$3 \times \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + 1 \times \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = 4\ SU(2) \text{ дублета}, \tag{64}$$

где фактор 3 возникает за счет трех цветов.

Приложение 3. GIM-механизм

Проведем вычисления разности масс K_L- и K_S-мезонов во втором порядке за счет заряженных слабых токов. Переходы между $K^0 = \bar{s}d$ и $\overline{K}^0 = s\bar{d}$, определяющие разность масс K_L- и K_S-мезонов, изображены на рис. 1.

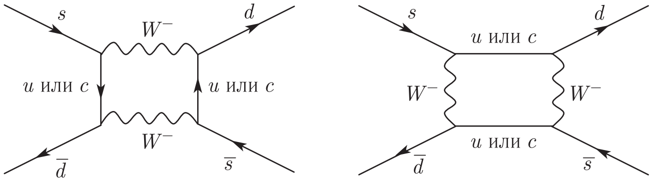


Рис. 1

Фейнмановские амплитуды, не включающие внешние спиноры, пропорциональны g^4. Их размерность должна быть $[M]^{-2}$. Для M_W, много большей массы кварка амплитуда

$$A(K^0 \to \overline{K}^0) \sim \frac{g^4}{M_W^2} \sim \alpha G. \quad (1)$$

Чтобы эта амплитуда соответствовала экспериментальной разности масс

$$m_{K_L} - m_{K_S} = (3{,}522 \pm 0{,}016) \cdot 10^{-6} \text{ эВ}, \quad (2)$$

следует потребовать

$$A(K_0 \to \overline{K}_0) \sim m_p^2 G^2 \sim 10^{-5} G. \quad (3)$$

Очевидно, что оценка (1) дает гораздо большее число. Однако, если посмотреть более внимательно на характер связи W-бозона с кварками, то оказывается, что связь должна включать $\cos\theta_C$ и $\sin\theta_C$:

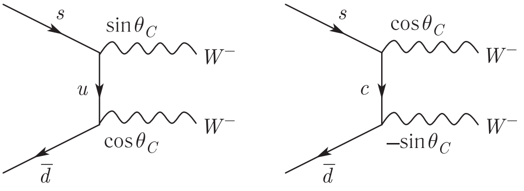


Рис. 2

Если предположить, что $m_u = m_c$, то пропагаторы на рис. 2 будут одинаковыми, и вклад обеих диаграмм окажется пропорциональным

$$\sin\theta_C \cos\theta_C - \cos\theta_C \sin\theta_C = 0. \quad (4)$$

Аналогичный результат получается и для второй диаграммы на рис. 1.

Таким образом, амплитуда $A(K^0 \to \overline{K}^0)$ должна быть пропорциональной $(m_u - m_c)$:

$$A(K^0 \to \overline{K}^0) \sim \frac{\alpha G (m_u - m_c)^2}{M_W^2} (\sin\theta_C \cos\theta_C)^2 \sim \left[G \sin\theta_C \cos\theta_C (m_u - m_c)\right]^2. \quad (5)$$

Следовательно, если разность масс кварков мала, т. е. сравнима с m_p, то выражения (5), (3) согласованы друг с другом. Подобные аргументы применимы к распаду $K^0 \to \mu^+\mu^-$, который может происходить посредством $K^0 \to W^+W^- \to \mu^+\mu^-$. Вероятность этого процесса была бы слишком большой, если бы не было сокращений членов в амплитуде, включающих u- и c-кварки. Именно для сокращения подобных слагаемых в теорию был введен очарованный кварк (механизм GIM).

ГЛАВА 5

СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

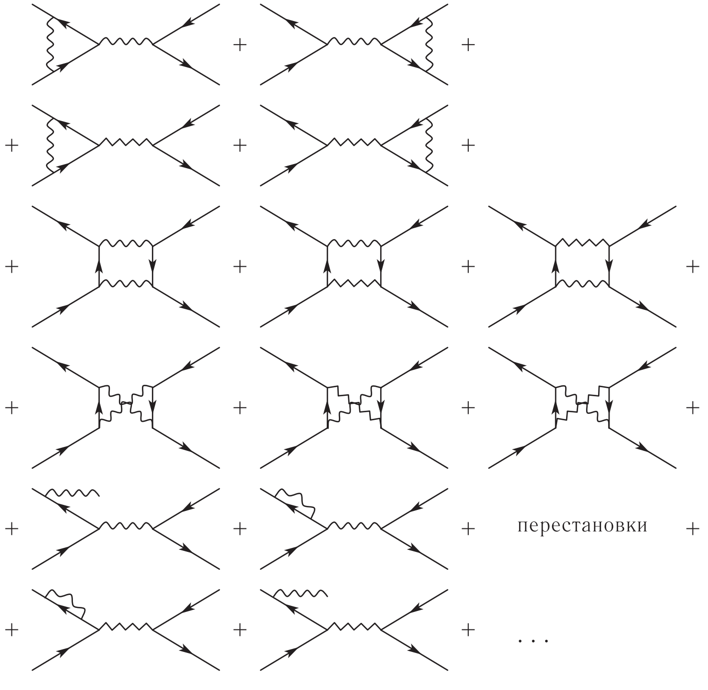
Выше мы рассматривали, в основном, стандартную модель в борновском приближении. Но для сравнения предсказаний стандартной модели с экспериментальными данными необходимо учитывать радиационные (как фотонные, так и электрослабые) поправки. Радиационные поправки также важны для обнаружения эффектов «новой физики» вне стандартной модели.

5.1. Радиационные поправки

Радиационные поправки могут иметь либо КЭД (фотонные), либо электрослабый источник.

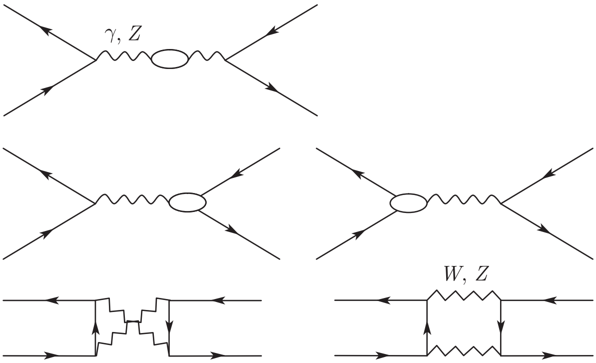
Чтобы понять, о чем идет речь, покажем диаграммы второго порядка для процесса $e^+e^- \to f\overline{f}$ (f — любой заряженный фермион). Эти диаграммы можно разбить на два класса:

а) поправки КЭД, включающие внешний фотон (реальный тормозной фотон или виртуальная фотонная петля), добавленный к борновским членам.



На диаграммах линия ( ) соответствует фотону, а линия ( ) — W- и Z-бозонам.

б) слабые поправки к пропагаторам векторных бозонов, вершинам и боксовым диаграммам.



Оказывается, что наиболее важные вклады возникают за счет «больших логарифмов» — членов вида $[(\alpha/\pi)\ln(M_Z/m_f)]^n$, где f — легкий фермион, или за счет членов, квадратичных по массе t-кварка.

5.2. Ренормировка и физические параметры

Если вычислять поправки высших порядков, исходя из лагранжиана электрослабой теории, в котором рассматривать параметры e и $\sin^2\theta_W$ как фиксированные, то многие диаграммы будут давать бесконечный вклад, и теорию следует перенормировать.

Обычно в теории поля начинают обсуждение с лагранжиана, в котором все параметры, константы связи и массы называются «голыми» параметрами. Их обозначают e_0, g_0, m_0 и т. д. Эти голые параметры — совсем не те, которые измеряются экспериментально. Чтобы теория была конечной, они должны зависеть от параметра обрезания λ, временно вводимого в теорию. Большинство параметров становится бесконечными в пределе $\lambda \to \infty$. Выбор λ зависит от метода регуляризации. Так, λ может быть верхним пределом интегрирования по импульсу петли, или быть $1/\varepsilon$ в схеме размерной регуляризации.

Каждый голый параметр (обозначим его через g_0) заменяется разложением по конечному параметру g:

$$g_0(\lambda) = g[1 + g a_1(\lambda) + \ldots], \tag{1}$$

причем $a_1(\lambda)$ можно разделить на два слагаемых:

$$a_1(\lambda) = a_1^{\text{кон.}}(\lambda) + a_1^{\text{беск.}}(\lambda) \tag{2}$$

в которых

$$a_1^{\text{беск.}}(\lambda) \to \infty \text{ при } \lambda \to \infty, \tag{3}$$

но

$$a_1^{\text{кон.}}(\lambda) \to a_1^F \text{ (конечное) при } \lambda \to \infty. \tag{4}$$

В перенормируемой теории $a_1^{\text{беск.}}$ при вычислении любой физически наблюдаемой $a_1^{\text{беск.}}$ сокращается, т. е. конечный результат зависит от $g[1+ga_1^F+\ldots]$ Когда работают в низшем порядке, пренебрегают членами $ga_1^F+\ldots$ В низшем порядке это эквивалентно замене в лагранжиане g_0 на g. Численное значение g можно найти путем сравнения вычисления в низшем порядке и экспериментально наблюдаемой. Когда несколько различных величин, вычисляемых в низшем порядке, сравниваются с наблюдаемыми, то каждое сравнение дает g. Если теория действительно описывает природу, то все определения величины g должны быть согласованы между собой. Классический пример из электрослабой теории — определение $\sin^2\theta_W$ из различных реакций.

К сожалению, не все так просто устроено. Процесс расщепления $a_1(\lambda)$ на конечную и бесконечную части можно провести разными способами. Каждый способ определяет различные схемы регуляризации с различными конечными частями, скажем $a_1^A, a_1^B, \ldots$ и различными ренормированными параметрами $g^A, g^B, \ldots$ В низшем порядке они все одинаковые, но при учете высших порядков они различаются:

$$g^A = g^B + \Delta g, \tag{5}$$

где Δg порядка g^2.

Много возможных схем регуляризации a priori одинаково хороши, но некоторые из них могут быть удачнее с точки зрения практических приложений. Возникает вопрос о лучшем способе определения физических параметров. Для КЭД существует очевидный и простой выбор. Можно показать, что точная формула для томпсоновского рассеяния имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m_e^2}(\vec{\varepsilon}' \cdot \vec{\varepsilon}) \tag{6}$$

при кинетической энергии, стремящейся к нулю. Сравнивая (6) с экспериментом, получаем постоянную тонкой структуры α как ренормированную константу связи в лагранжиане. К сожалению, для электрослабых констант связи g и g' нет аналога (6).

При обсуждении радиационных поправок будем работать в минимальном варианте стандартной модели, в котором механизм Хиггса генерирует массы. Как мы уже видели, в наинизшем порядке

$$\sin^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}. \tag{7}$$

Выражения низшего порядка модифицируются радиационными поправками, причем они зависят от используемой схемы регуляризации. В качестве примера рассмотрим «on shell» схему, в которой в низшем порядке выполняется соотношение (7). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, определим величину

$$s_W^2 = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}. \tag{8}$$

Возвращаясь к исходному электрослабому лагранжиану, и обозначив голые константы связи и массы индексом «0», получим

$$g_0 = \frac{e_0}{\sin\theta_W^0} = \frac{e_0}{\sqrt{1 - {M_W^0}^2/{M_Z^0}^2}}. \tag{9}$$

Другая константа

$$g_0' = g_0 \operatorname{tg} \theta_W^0 = e_0 \frac{M_Z^0}{M_W^0}. \tag{10}$$

Аналогично соотношению (1), при ренормализации выполняется

$$\begin{aligned} e_0 &= e\left(1 + \frac{\delta e}{e}\right), \\ {M_W^0}^2 &= M_W^2\left(1 + \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right), \\ {M_Z^0}^2 &= M_Z^2\left(1 + \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

причем мы не привели зависимость от параметра обрезания λ. В схеме «on shell» предполагается, что

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi} &= \text{постоянная тонкой структуры;} \\ M_W, M_Z &= \text{физические массы } M_W, M_Z. \end{aligned} \tag{12}$$

Этих требований достаточно для фиксирования δe, δM_W^2, δM_Z^2 и исключения неоднозначности в a_1^F выражений (1), (2).

Второе условие в (12) означает фиксирование полюса в бозонном пропагаторе. Из-за условий (9), (10) отнюдь не обязательно, чтобы g_0 и g_0' ренормировались независимо. Используя (11), определим ренормированные константы связи

$$\begin{aligned} g &= \frac{e}{s_W}, \\ g' &= \frac{e}{c_W}. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, для учета радиационных поправок следует провести вычисления с лагранжианом, в котором $\sin^2\theta_W$ заменен на s_W^2.

5.3. Эффективная константа тонкой структуры

Простейшая радиационная поправка возникает из-за $f\overline{f}$-петель в фотонном пропагаторе. Учет этой поправки приводит к появлению бегущей или эффективной константы связи $\alpha(q^2)$, зависящей от q^2 фотонной линии при его связи с заряженными фермионами. Таким образом,

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha(q^2)}, \tag{14}$$

где α — «обычная» постоянная тонкой структуры, определяемая выражением (6) и соответствующая реальному фотону ($q^2 = 0$), связанному с физическим электроном. Оказывается, что наиболее важный масштаб $q^2 = M_Z^2$. Тогда поправка к величине α будет $\Delta\alpha = \Delta\alpha(M_Z^2)$.

Согласно современным экспериментальным данным

$$\Delta\alpha = 0{,}0601 + \frac{40}{9}\frac{\alpha}{\pi}\ln\left(\frac{M_Z}{91\ \text{ГэВ}}\right) \pm 0{,}0009, \tag{15}$$

что дает $\alpha(M_Z^2) \simeq 1{,}064\alpha$.

Интересно отметить, что «тяжелые» фермионы, чьи массы удовлетворяют условию $m_f^2 \gg q^2$, дают пренебрежимо малый вклад в $\Delta\alpha(q^2)$ порядка $(\alpha/(3\pi))(q^2/(5m_f^2))$. Это не так, когда рассматриваются вклады в пропагаторы W- и Z-бозонов. В этом случае поправки $\sim m_f^2/q^2$ даже для $m_f^2 \gg q^2$.

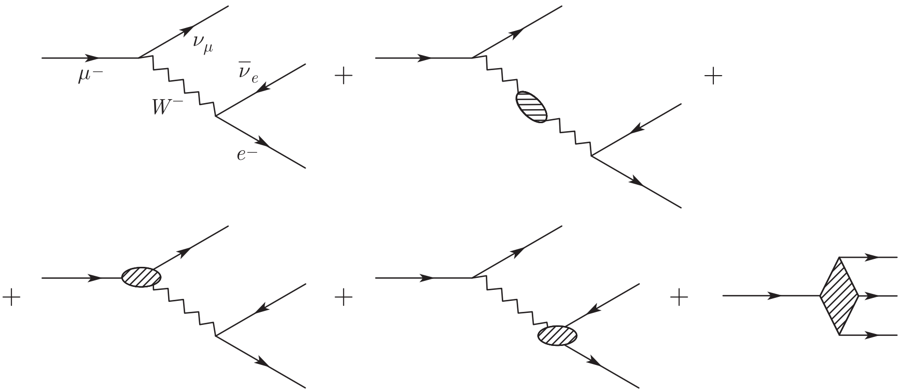
5.4. Поправки к времени жизни мюона

Рассмотрим теперь поправки к соотношению, связывающему в стандартной модели величины G, α и M_W. Исторически, величина фермиевской константы G определялась по времени жизни мюона, вычисляемому в фермиевской модели взаимодействующих токов и с учетом фотонных радиационных поправок.

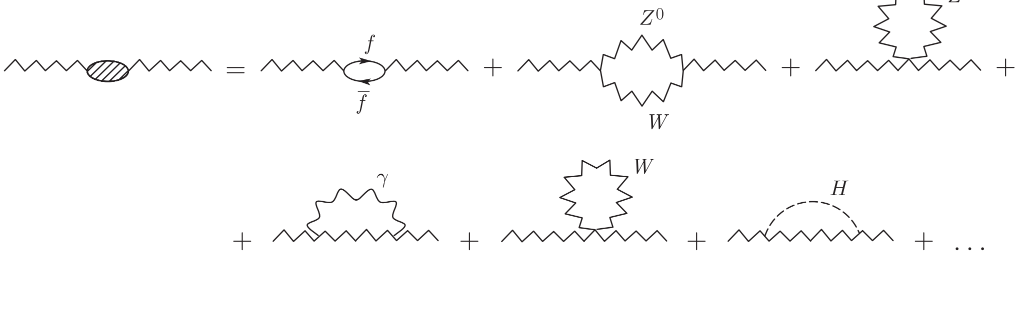
Схематично, амплитуда пропорциональна

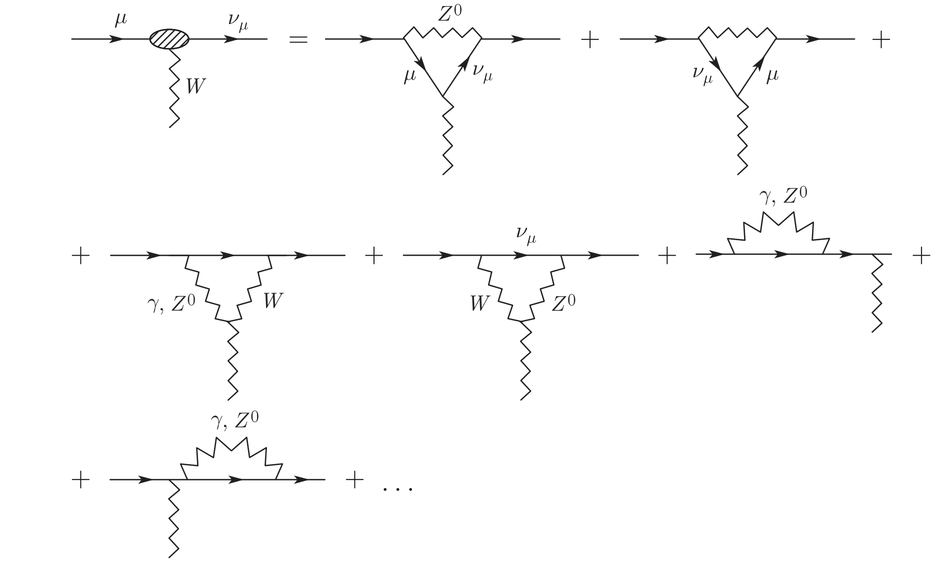
$$\frac{G}{\sqrt{2}}[1 + \text{фотонные поправки к фермиевской амплитуде}]. \tag{16}$$

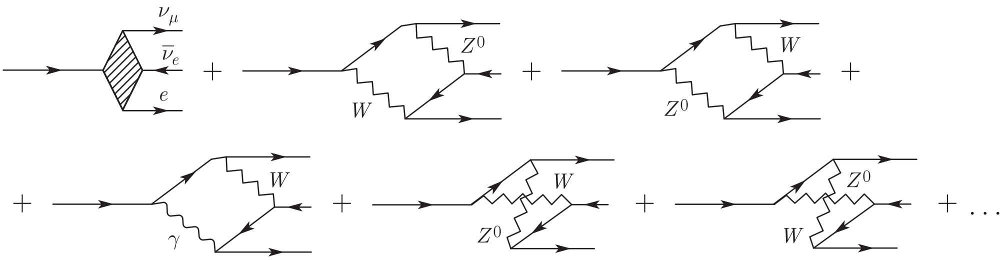
В стандартной модели время жизни мюона определяется диаграммами:



В этих диаграммах пропагаторы, вершины и «боксы» в однопетлевом приближении







Амплитуда процесса мюонного распада пропорциональна

$$\frac{e^2}{8s_W^2c_W^2M_Z^2}\big[(1+\text{фотонные поправки})+\text{пропагатор}+\text{вершина}+\text{«боксовые члены»}\big]. \tag{17}$$

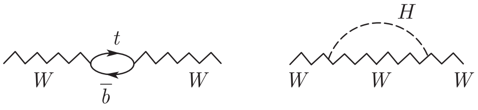
Сравнение (16) и (17) дает

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{e^2}{8s_W^2c_W^2M_Z^2}\big[(1+\text{фотонные поправки})+\text{пропагаторы}+\text{вершины}+ \\ +\text{«боксовые члены»}-\text{фотонные поправки к фермиевской амплитуде}\big]. \tag{18}$$

Перепишем (18) в более компактном виде

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{e^2}{8s_W^2c_W^2M_Z^2}(1+\Delta r). \tag{19}$$

Величина Δr включает эффекты поляризации, вакуума и другие электрослабые поправки, зависящие от всех параметров модели, включая массы t-кварка и Хиггс-бозона. Наиболее важными являются диаграммы



Полное выражение для поправки Δr имеет вид:

$$\Delta r = \Delta\alpha - \frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho + \Delta r_{\text{rem}}, \tag{20}$$

где $\Delta\alpha$ определяется из (15). Слагаемое $\Delta\rho$ в (20) в однопетлевом приближении

$$\Delta\rho = \frac{e^2}{64\pi^2 s_W^2 c_W^2 M_Z^2} \sum_f N_{C_f} |m_{f_1}^2 - m_{f_2}^2|^2, \tag{21}$$

где $N_{C_f} = 1$ для лептонов и $N_{C_f} = 3$ для кварков и m_{f_1,f_2} — массы фермионов в каждом фермионном дублете. Наибольший вклад из-за большой разности масс $(m_t - m_b)$ дает $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$ дублет:

$$\Delta\rho \simeq \frac{3e^2}{64\pi^2 s_W^2 c_W^2 M_Z^2} m_t^2. \tag{22}$$

В Δr_{rem} (20) включены все «оставшиеся» вклады, т. е. все нелидирующие поправки, хиггсовский вклад и логарифмические вклады t-кварка.

Для очень тяжелого хиггсовского бозона ($m_H \gg M_W$) главный вклад — логарифмический

$$\Delta r_{\text{rem}}^{\text{хиггс}} = \frac{e^2}{64\pi^2 s_W^2} \frac{11}{3} \left[\ln\left(\frac{m_H^2}{c_W^2 M_Z^2} \right) - \frac{5}{6} \right]. \tag{23}$$

Вклад от t-кварка — тоже логарифмический

$$\Delta r_{\text{rem}}^{\text{топ}} = \frac{e^2}{64\pi^2 s_W^2} 2\left(\frac{c_W^2}{s_W^2} - \frac{1}{3} \right) \ln\left(\frac{m_t^2}{c_W^2 M_Z^2} \right). \tag{24}$$

Эффекты высших порядков можно оценить, используя подход ренорм-группы, который приводит к замене $1 + \Delta r \to 1/(1 - \Delta r)$. Тогда (19) приобретает вид

$$G = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} M_Z^2 s_W^2 c_W^2} \frac{1}{(1 - \Delta r)}. \tag{25}$$

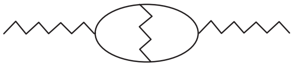
Отметим, что это выражение учитывает все члены по $(\Delta\alpha)^n$. Если вспомнить определение (8), то можно преобразовать (19) в формулу, включающую M_W^2:

$$M_W^2 = \frac{M_Z^2}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{4A^2}{M_Z^2} \frac{1}{(1 - \Delta r)} \right)^{1/2} \right], \quad A^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} G}. \tag{26}$$

Для массы t-кварка $m_t \simeq 175$ ГэВ выражение (25) следует заменить на следующее:

$$G = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} M_Z^2 s_W^2 c_W^2} \left[\left(\frac{1}{1 - \Delta\alpha} \right) \frac{1}{1 + c_W^2 (\Delta\rho_i / s_W^2)} + \Delta r_{\text{rem}} \right], \tag{27}$$

где $\Delta\rho_i$ — улучшенная оценка $\Delta\rho$, учитывающая вклады диаграмм типа



Лидирующий член в $\Delta\rho_i$

$$\Delta\rho_i = \frac{e^2}{64\pi^2 s_W^2 c_W^2} 3\left(\frac{m_t^2}{M_Z^2} \right) \left\{ 1 + \frac{e^2}{64\pi^2 s_W^2 c_W^2} \left(\frac{m_t^2}{M_Z^2} \right) (19 - 2\pi^2) \right\} \tag{28}$$

часто записывают в виде

$$\rho \equiv \frac{1}{1-\Delta\rho_i}, \tag{29}$$

тогда (27) переписывается так

$$G = \rho\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}c_W^2 M_Z^2}\left[\frac{1}{\rho - c_W^2}\frac{1}{1-\Delta\alpha} + \Delta r_{\text{rem}}\right]. \tag{30}$$

Как и раньше, с помощью определения (8), соотношение (30) можем переписать через M_W:

$$M_W^2 = \rho\frac{M_Z^2}{2}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4A^2}{\rho M_Z^2}\left[\frac{1}{1-\Delta\alpha} - \Delta r_{\text{rem}}\right]}\right\}. \tag{31}$$

Если определить

$$\cos^2\overline{\theta}_W \equiv \frac{1}{2}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4A^2}{\rho M_Z^2}\frac{1}{(1-\Delta\alpha)}}\right\}, \tag{32}$$

то (31) принимает вид

$$c_W^2 = \rho\cos^2\overline{\theta}_W. \tag{33}$$

Поскольку M_W известна из экспериментов на LEP, с помощью (25), (30) можно определить Δr или ρ и проверить применимость стандартной модели.

5.5. Радиационные поправки к «минимальному» механизму Хиггса

Как мы уже отмечали, механизм Хиггса может осуществляться не только при наличии дублета комплексных скалярных полей (минимальный механизм), но и при большем наборе скалярных полей. В минимальной схеме, механизм Хиггса можно проверить, вычисляя параметр

$$\rho_0 = \left(\frac{M_W^2}{M_Z^2}\right)\frac{1}{(\cos^2\theta_W)_{\nu_\mu e}} \tag{34}$$

и сравнивая его с единицей. В этом выражении $(\cos^2\theta_W)_{\nu_\mu e}$ определяется из экспериментальных данных по $\nu_\mu e$-рассеянию. В неминимальной модели

$$\frac{M_W}{M_Z} = \sqrt{\rho_0}\cos\theta_W, \tag{35}$$

причем $\rho_0 \neq 1$ — дополнительный параметр в теории. Однако наиболее важный эффект поправок высших порядков для реакций, включающих обмен Z^0, состоит в замене констант связи

$$g_V^f \to \overline{g}_V^f = \sqrt{\rho}(I_{W_3}^{f_L} - 2Q_f\sin^2\overline{\theta}_W), \tag{36}$$

$$g_A^f \to \overline{g}_A^f = \sqrt{\rho}I_{W_3}^{f_L}, \tag{37}$$

где ρ и $\overline{\theta}_W$ определяются выражениями (29) и (33). Сечения рассеяния $\nu_\mu(\overline{\nu}_\mu)$ на электронах модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma(\nu_\mu e) &= \frac{m_e E}{\pi}\left(\frac{e^2(1+\Delta r)}{8s_W^2 c_W^2 M_Z^2}\right)^2 \rho(1-4\sin^2\overline{\theta}_W + \frac{16}{3}\sin^4\overline{\theta}_W),\\ \sigma(\overline{\nu}_\mu e) &= \frac{m_e E}{3\pi}\left(\frac{e^2(1+\Delta r)}{8s_W^2 c_W^2 M_Z^2}\right)^2 \rho(1-4\sin^2\overline{\theta}_W + 16\sin^4\overline{\theta}_W).\end{aligned} \tag{38}$$

где Δr определен соотношением (20).

Выражение (19) позволяет заменить

$$\frac{e^2(1+\Delta r)}{8s_W^2 c_W^2 M_Z^2} \to \frac{G}{\sqrt{2}}. \tag{39}$$

Из (33) видно, что для минимальной модели

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2}\frac{1}{(\cos^2\overline{\theta}_W)_{\nu_\mu e}} = \frac{c_W^2}{(\cos^2\overline{\theta}_W)_{\nu_\mu e}} = \rho \neq 1. \tag{40}$$

Таким образом, поправки высших порядков нарушают простоту исследования неминимального механизма Хиггса. С другой стороны, параметр ρ_0 является свободным, а параметр ρ в (40) — вычисляемый параметр, если известны m_t и m_H.

В случае неминимальной модели Хиггса условие согласования с теорией Ферми дает:

$$G = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}}\frac{1}{M_W^2\sin^2\theta_W}. \tag{41}$$

С учетом (35) получаем

$$G = \frac{\pi\alpha\rho_0}{\sqrt{2}M_W^2}\frac{1}{\rho_0 - M_W^2/M_Z^2}. \tag{42}$$

Фотонные поправки изменяют это выражение

$$G = \frac{\pi\rho_0}{\sqrt{2}M_W^2}\frac{\alpha}{1-\Delta\alpha}\frac{1}{\rho_0 - M_W^2/M_Z^2}. \tag{43}$$

К сожалению, радиационные поправки к минимальной стандартной модели дают точно такой же результат. Если пренебречь Δr_{rem} в (30), то это выражение принимает вид

$$G = \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}M_W^2}\frac{\alpha}{1-\Delta\alpha}\frac{1}{\rho - M_W^2/M_Z^2}. \tag{44}$$

Последнее выражение имеет ту же форму, что и (43). Таким образом, значение $\rho^0 \neq 1$, определенное из (43), не может служить доказательством применимости неминимального механизма Хиггса.

ГЛАВА 6

ОСНОВЫ ФИЗИКИ НЕЙТРИНО

6.1. Введение

В первоначальном варианте стандартной модели, сформулированном в 60-х годах, все сорта нейтрино считались безмассовыми, описываемыми левыми вейлевскими спинорами. Предполагалось, что правых нейтрино не существует, хотя они необходимы для генерации дираковских масс нейтрино посредством механизма Хиггса, который обеспечивает дираковские массы кваркам и заряженным лептонам. Недавние эксперименты обнаружили нейтринные осцилляции, а, следовательно, наличие у нейтрино масс и их смешивания. Поэтому следует дополнить стандартную модель, учитывая наличие масс у различных сортов нейтрино.

Нейтринные взаимодействия содержатся в CC и NC частях лагранжиана электрослабой теории:

$$L^{\mathrm{CC}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_\alpha^{\mathrm{CC}} W^\alpha + \text{э.с.},$$
$$L^{\mathrm{NC}} = -\frac{g}{2\cos\theta_W} j_\alpha^{\mathrm{NC}} Z^\alpha + \text{э.с.}, \tag{1}$$

где g — $SU(2)$ калибровочная константа, θ_W — слабый угол и токи

$$j_\alpha^{\mathrm{CC}} = 2\sum_{l=e,\mu,\tau} \overline{\nu}_{lL}\gamma_\alpha l_L, \quad j_\alpha^{\mathrm{NC}} = \sum_{l=e,\mu,\tau} \overline{\nu}_{lL}\gamma_\alpha \nu_{lL}. \tag{2}$$

Обычно предполагается, что имеется три сорта нейтрино: ν_e, ν_μ, ν_τ. Откуда это известно? Из данных LEP и SLC по измерению ширин Z-бозона действительно следует, что число легких нейтрино, связанных с Z-бозоном, равно трем. Однако ничто не противоречит тому, что имеются и другие легкие сорта нейтрино, которые не связаны с Z- иW-бозонами. Такие нейтрино называются стерильными ν_S или ν'. Их число не ограничивается данными по ширине Z-бозона. Однако если стерильные нейтрино смешиваются с известными нейтрино, то они проявляли себя в ранней Вселенной, поскольку активные нейтрино, имеющиеся в избытке в настоящий момент, способны осциллировать в стерильные нейтрино. При этом плотность стерильных нейтрино возрастала. Это обстоятельство влияет на синтез гелия и дейтерия, усиливая скорость расширения Вселенной. Поэтому, зная первоначальный избыток гелия и дейтерия, можно получить ограничение на число активных и стерильных нейтрино. Согласно современным космологическим данным, допустимо более чем одно стерильное нейтрино, смешанное с активными нейтрино.

6.2. Дираковская и майорановская масса нейтрино

Для нейтрино, как частиц с нулевым электрическим зарядом, есть две возможности для массовых членов в лагранжиане стандартной модели (см. подробнее главу 4 части I).

Прежде чем приступить к рассмотрению двух типов массовых членов для нейтрино, вспомним уравнение Дирака для электрона

$$i\gamma^\lambda \partial_\lambda \psi - m\psi = 0. \tag{3}$$

Как хорошо известно, это уравнение можно получить из свободного лагранжиана

$$L = i\overline{\psi}\gamma^\lambda \partial_\lambda \psi - m\overline{\psi}\psi. \tag{4}$$

Второе слагаемое в лагранжиане относится к массе электрона. Лоренц-инвариантность, однако, допускает другую билинейную комбинацию фермионов, определяющую массовое состояние в лагранжиане: $\psi^T C^{-1}\psi$, где C — матрица зарядового сопряжения. Отличие массового члена $m\overline{\psi}\psi$ от $\psi^T C^{-1}\psi$ состоит в том, что первый инвариантен относительно преобразований $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, а второй — неинвариантен. Чтобы отличить эти две формы массового члена, нужно вспомнить, что инвариантность относительно фазового преобразования подразумевает существование сохраняющегося заряда (электрического, барионного, лептонного). Поэтому присутствие в лагранжиане массового слагаемого второго типа ($\psi^T C^{-1}\psi$) означает, что если поле ψ удовлетворяет условию самосопряжения:

$$\psi = \psi^C \equiv C\overline{\psi}^T, \tag{5}$$

то массовый член $\overline{\psi}\psi$ сводится к $\psi^T C^{-1}\psi$. Таким образом, второй тип массового члена в лагранжиане означает, что нейтрино совпадает с собственной античастицей. Это ограничение уменьшает вдвое число независимых компонент спинора.

Массовое слагаемое $\psi^T C^{-1}\psi$ в лагранжиане называется майорановским, а $\overline{\psi}\psi$ — дираковским.

Для заданного числа произвольных спиноров, описывающих частицы со спином 1/2, можно записать или только дираковский или майорановский тип массового члена или оба. Однако если частица имеет сохраняющееся квантовое число (например, электрический заряд для электрона), то майорановское слагаемое записать нельзя, поскольку оно будет нарушать заряд. Для электронейтральных частиц, к которым принадлежит нейтрино, в теории допустимы оба массовых слагаемых. В настоящий момент неизвестно, являются ли нейтрино дираковскими или майорановскими фермионами. Важнейшими с этой точки зрения представляются эксперименты по поиску безнейтринного двойного β-распада.

Если нейтрино — майорановские фермионы, то лептонное число изменяется на две единицы, и происходит ядерный распад $(A, Z) \to (A, Z + 2) + e^- + e^-$, если он разрешен кинематически. Этот процесс называют $\beta\beta 0\nu$.

Скорость $\beta\beta 0\nu$-распада пропорциональна массе нейтрино. Регистрация $\beta\beta 0\nu$ означала бы серьезный аргумент в пользу майорановской массы, хотя и требовала бы также определения этой массы.

Дело в том, что могут существовать тяжелые частицы вне стандартной модели, приводящие к $\beta\beta 0\nu$-распаду, но в то же время не «обеспечивающие» «большой» массы нейтрино.

Обсудим более подробно дираковский и майорановский массовые члены для нейтрино.

1) Дираковский массовый член определен как

$$L^D = -\overline{\nu}_R M^D \nu_L + \text{э.с.}, \tag{6}$$

где M^D — недиагональная комплексная матрица и поля

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

После диагонализации матрицы M^D массовый член (6) принимает стандартный вид

$$L^D = -\sum_{i=1}^{3} m_i \overline{\nu}_i \nu_i. \tag{8}$$

В выражении (2) смешанные поля ароматов

$$\nu_{lL}(x) = \sum_{i=1}^{3} U_{li} \nu_{iL}(x), \tag{9}$$

а поля $\nu_i(x)$ соответствуют нейтрино с массой m_i.

Для недиагональной матрицы M^D поля ароматов $\nu_{lL}(x)$ в заряженных и нейтральных токах (2) являются «смешанными» полями.

Для дираковского массового члена (6) полный лагранжиан инвариантен относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \nu_{lL}(x) &\to e^{i\alpha} \nu_{lL}(x), \\ \nu_{lR}(x) &\to e^{i\alpha} \nu_{lR}(x), \\ l(x) &\to e^{i\alpha} l(x), \end{aligned} \tag{10}$$

где α — произвольная постоянная фаза. Эта инвариантность означает, что полное лептонное число $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ — сохраняется, а $\nu_i(x)$ — 4-компонентные поля нейтрино ($L = 1$) и антинейтрино ($L = -1$).

2) Майорановский массовый член

$$L^M = -\frac{1}{2} \overline{(\nu'_L)^C} M^M \nu'_L + \text{э.с.}, \tag{11}$$

где

$$(\nu'_L)^C = C {\nu'_L}^T, \quad \overline{(\nu'_L)^C} = -{\nu'_L}^T C^{-1}. \tag{12}$$

В выражениях (11), (12) C — матрица зарядового сопряжения; M^M — недиагональная комплексная матрица и поле

$$\nu'_l = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{13}$$

В этом столбце, в дополнение к трем ароматам ν_{lL} ($l = e, \mu, \tau$) могут содержаться, в принципе, и другие поля. Эти поля не входят в лагранжиан (1) и не имеют стандартных электрослабых взаимодействий. Такие дополнительные поля, как уже отмечалось выше, называются стерильными.

В случае майорановского массового члена полное лептонное число нарушается, и нейтрино с определенными массами оказываются майорановскими частицами. Рассмотрим этот случай более подробно.

Статистика Ферми–Дирака нейтринных полей требует, чтобы

$$(M^M)^T = M^M. \tag{14}$$

Симметричную матрицу, как известно, с помощью унитарной матрицы можно привести к диагональному виду

$$M^M = (U^+)^T m U^+, \tag{15}$$

где $U^+U = 1$ и $m_{ik} = m_i\delta_{ik}$, $m_i > 0$.

Из (12) и (15) находим

$$L^M = -\frac{1}{2}\overline{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2}\sum_i m_i \overline{\nu}_i \nu_i, \tag{16}$$

где

$$\nu^M = U^+\nu'_L + (U^+\nu'_L)^C = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Поле $\nu_i(x)$ соответствует нейтрино с массой m_i. Из соотношения (17) очевидно, что поля $\nu_i(x)$ удовлетворяют майорановскому условию:

$$\nu_i^C(x) = \nu_i(x), \tag{18}$$

причем $\nu_i^C(x) = C\overline{\nu}_i^T(x)$. Представим нейтринное поле в виде

$$\nu_i(x) = \int N_p\big(e^{-ipx}u^r(p)a_r^i(p) + e^{ipx}v^r(p)a_r^{i+}(p)\big)d^3p, \tag{19}$$

где $N_p = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\dfrac{1}{\sqrt{2p^0}}$, $a_r^i(p)$ $(a_r^{i+}(p))$ — операторы уничтожения (рождения) майорановского нейтрино с импульсом p, спиральностью r и массой m_i. Теперь очевидно, что майорановское нейтрино тождественно майорановскому антинейтрино.

Из (17) следует, что поля ароматов $\nu_{lL}(x)$ — смешанные поля

$$\nu_{lL}(x) = \sum_i U_{li}\nu_{iL}(x), \quad l = e, \mu, \tau, \tag{20}$$

а $\nu_i(x)$ — поле майорановского нейтрино массы m_i.

Если n_S — число стерильных полей ν_{S_aL}, входящих в массовый член, то число майорановских полей $\nu_i(x)$ равно $(3 + n_S)$, матрица U — это $(3 + n_S) \times (3 + n_S)$ унитарная матрица, и в дополнение к (20) имеем

$$\nu_{S_aL}(x) = \sum_i U_{S_ai}\nu_{iL}(x), \quad a = 1, \ldots, n_S. \tag{21}$$

Так называемый майорано-дираковский массовый член

$$L^{M+D} = -\frac{1}{2}\overline{(\nu_L)^C}M_L^M\nu_L - \overline{\nu}_R M^D \nu_L - \frac{1}{2}\overline{\nu}_R M_R^M(\nu_R)^C + \text{э.с.} \tag{22}$$

представляет особый интерес. В (22) матрицы $M_{L,R}^M$ — 3×3 майорановские симметричные матрицы, а M^D — 3×3 дираковская матрица. Массовое слагаемое L^{M+D}

можно представить в виде

$$L^{M+D} = -\frac{1}{2}\overline{(\nu'_L)^C} M^{M+D} \nu'_L + \text{э.с.}, \tag{23}$$

где

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^C \end{pmatrix}, \quad M^{M+D} = \begin{pmatrix} M_L^M & (M^D)^T \\ M^D & M_R^M \end{pmatrix}. \tag{24}$$

После диагонализации массового слагаемого в L^{M+D}, получим

$$\begin{aligned} \nu_{lL}(x) &= \sum_{i=1}^{6} U_{li}\nu_{iL}(x), \\ (\nu_{lR}(x))^C &= \sum_{i=1}^{6} U_{\bar{l}i}\nu_{iL}(x), \quad l = e, \mu, \tau. \end{aligned} \tag{25}$$

Существующие экспериментальные данные по нейтринным осцилляциям, которые будут обсуждаться ниже, свидетельствуют о том, что число массивных нейтрино равно числу ароматов нейтрино (трем), и кроме того, легкие стерильные нейтрино отсутствуют. Однако тип нейтринного массового члена, т. е. природа массивных нейтрино (майорановская или дираковская) остается неизвестной. Из экспериментов по β-распаду трития ограничение на массу нейтрино

$$m_\beta < 2{,}3 \text{ эВ}. \tag{26}$$

Из космологических данных сумма масс нейтрино имеет верхнюю границу

$$\sum_i m_i \leq (0{,}4 \div 1{,}7) \text{ эВ}. \tag{27}$$

Если объединить эти данные с данными по нейтринным осцилляциям, то можно сделать вывод: массы нейтрино отличны от нуля и они гораздо меньше масс лептонов и кварков. В пределах одного поколения массы кварков и лептонов отличаются на один–два порядка. Массы же нейтрино на 9–11 порядков меньше масс кварков и лептонов.

6.3. See-saw механизм генерации масс нейтрино

Наиболее привлекательный механизм генерации нейтринных масс, гораздо меньших масс кварков и лептонов, — так называемый see-saw механизм. Рассмотрим этот механизм на примере одного поколения.

Пусть дираковский массовый член

$$L^D = -m_D \overline{\nu}_{lR} \nu_{lL} + \text{э.с.} \tag{28}$$

генерируется стандартным механизмом Хиггса при спонтанном нарушении симметрии. При этом массы частиц, генерируемые этим механизмом, должны быть пропорциональны вакуумному среднему хиггсовского поля $v \simeq 246$ ГэВ. Естественно ожидать, что m_D должна быть того же порядка, что и массы u-, d-кварков и электрона. Как мы уже говорили, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что массы нейтрино гораздо меньше масс кварков и лептонов. Поэтому необходим механизм, подавляющий массу нейтрино.

Предположим, что кроме массового члена (28) имеется нарушающий лептонное число правый майорановский массовый член

$$L_R^M = -\frac{1}{2} M_R \overline{(\nu_{lR})} (\nu_{lR})^C + \text{э.с.}, \tag{29}$$

причем пока не будем конкретизировать, в результате какого механизма возникает это слагаемое. Заметим только, что такое слагаемое допустимо только для нейтрино. Из-за сохранения электрического заряда, подобное слагаемое для кварков и лептонов не допустимо. Тогда полный массовый член майорановского и дираковского типа

$$L^{M+D} = -\frac{1}{2} \overline{(\nu'_L)^C} M^{M+D} \nu'_L + \text{э.с.}, \tag{30}$$

где

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ (\nu_{lR})^C \end{pmatrix}, \quad M^{M+D} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix}. \tag{31}$$

После стандартной диагонализации массовый член (30) имеет вид

$$L^{M+D} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} m_i \overline{\nu}_i \nu_i, \tag{32}$$

где $\nu_{1,2}$ — майорановские поля.

При этом массы нейтрино

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(M_R \mp \sqrt{M_R^2 + 4m_D^2}\Big). \tag{33}$$

Для ν_{lL} и $(\nu_{lR})^C$ находим соотношения смешивания

$$\begin{aligned} \nu_{lL} &= -i\cos\theta \nu_{1L} + \sin\theta \nu_{2L}, \\ (\nu_{lR})^C &= i\sin\theta \nu_{1L} + \cos\theta \nu_{2L}, \end{aligned} \tag{34}$$

причем угол смешивания

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2m_D}{M_R}. \tag{35}$$

Предположим, что масштаб нарушения лептонного числа M_R гораздо больше электрослабого масштаба ($M_R \gg m_D$). Тогда из (33) и (35) получаем

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{M_R} \ll m_D, \quad m_2 \simeq M_R, \quad \theta \simeq \frac{m_D}{M_R} \ll 1. \tag{36}$$

Поле майорановского нейтрино и поле тяжелой майорановской частицы

$$\nu_1 \simeq i\big(\nu_{lL} - (\nu_{lL})^C\big), \quad \nu_2 \simeq \big(\nu_{lR} + (\nu_{lR})^C\big). \tag{37}$$

В случае трех поколений стандартная see-saw симметричная матрица имеет вид

$$M^{M+D} = \begin{pmatrix} 0 & (M^D)^T \\ M^D & M_R \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где $(M_R)^T = M_R$ и $M^D \ll M_R$.

По аналогии со случаем одного поколения, будем выбирать унитарную матрицу в (15), имеющую следующую форму

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -(M^D)^+(M_R^{-1})^+ \\ M_R^{-1} M^D & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) в линейном приближении получаем

$$U^T M^{M+D} U = \begin{pmatrix} (M^D)^T M_R^{-1} M^D & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Матрица 3×3

$$m_\nu = (M^D)^T M_R^{-1} M^D \tag{41}$$

является нейтринной массовой матрицей.

Если механизм генерации нейтринных масс такой, как описано выше (see-saw), то нейтрино являются майорановскими частицами с массами, гораздо меньшими масс кварков и лептонов. Тяжелые майорановские частицы, see-saw партнеры легких майорановских нейтрино, должны существовать. CP-нарушающие распады этих частиц в ранней Вселенной иногда рассматриваются в качестве источника барионной асимметрии Вселенной.

Важное предположение, необходимое для осуществления see-saw механизма: $m_L = 0$. На первый взгляд, это предположение выглядит достаточно произвольным, но это не так. Дело в том, что ν_L относится к слабому изодублету стандартной модели

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}.$$

Поскольку ν_L — компонента слабого изоспина, $I_3 = 1/2$, комбинация $\overline{\nu}_L^C \nu_L = -\nu_L^T C^+ \nu_L$ в майорановском массовом члене имеет $I_3 = 1$ и относится к триплету.

Так как в стандартной модели нет хиггсовского триплета, связанного с $\overline{\nu}_L^C \nu_L$, майорановский массовый член с ν_L подавлен. Другими словами, калибровочные симметрии стандартной модели подразумевают $m_L = 0$, что необходимо для реализации see-saw механизма. С другой стороны, m_D допустима в стандартной модели, поскольку она возникает при механизме Хиггса. Допустима также масса m_R, поскольку ν_R и $\overline{\nu}_R^C \nu_R$ — синглеты по отношению к калибровочным преобразованиям стандартной модели.

Поэтому возникает расширенная стандартная модель с массивными нейтрино — майорановскими частицами, в которой малость нейтринных масс естественно объясняется see-saw механизмом. Единственное предположение, остающееся необъясненным в этом сценарии — это «тяжесть» m_R по сравнению с m_D. Это предположение трудно объяснить в рамках стандартной модели, поскольку в ней m_R — параметр, способный принимать произвольные значения.

В этом случае естественно ожидать, что масса m_R возникает при спонтанном нарушении более общей теории, чем стандартная модель. При этом величина m_R на много порядков больше масштаба нарушения электрослабой симметрии.

6.4. Почему массивность нейтрино требует физики вне стандартной модели?

Покажем, что в стандартной модели масса нейтрино равна нулю, как во всех порядках теории возмущений, так и с учетом непертурбативных вкладов. В стандартной модели, основанной на калибровочной группе $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, кварки, лептоны имеют следующие квантовые числа по отношению к калибровочным преобразованиям:

Поле	Квантовые числа
кварки Q_L	$(3, 2, 1/3)$
правые u_R	$(3, 1, 4/3)$
левые u_L	$(3, 1, -2/3)$
левые лептоны	$(1, 2, -1)$
правые лептоны	$(1, 1, -2)$
Хиггс-бозон	$(1, 2, +1)$
цветные калибровочные поля	$(8, 1, 0)$
$W^{\pm}, Z, \gamma$	$(1, 3, 0)$

Как известно, электрослабая симметрия $SU(2)_L \times U(1)_Y$ нарушена вакуумным средним хиггсовского дублета $v = 246$ ГэВ. При этом калибровочные бозоны и фермионы становятся массивными, за исключением нейтрино. Таким образом, нейтрино являются безмассовыми на «древесном» уровне. Возникают, однако, вопросы. Что происходит, если выйти за рамки «древесного» приближения? Изменяют ли непертурбативные эффекты результаты «древесного» приближения? Наконец, могут ли эффекты квантовой гравитации изменить эти результаты?

На первый вопрос достаточно просто ответить, используя $B-L$-симметрию стандартной модели. Действительно, поскольку в стандартной модели нет $SU(2)_L$ нейтриноподобного поля, единственный массовый член, допустимый Лоренц-инвариантностью, имеет форму $\nu_{iL}^T C^{-1} \nu_{jL}$, где i, j — индексы поколений и C — матрица зарядового сопряжения.

Поскольку ν_{iL} — часть $SU(2)_L$-дублетного поля имеет лептонное число $+1$, массовый член $\nu_{iL}^T C^{-1} \nu_{jL}$ преобразуется как $SU(2)_L$-триплет, т. е. нарушает полное лептонное число ($L = L_e + L_\mu + L_\tau$) на две единицы. Однако лагранжиан стандартной модели сохраняет симметрию по лептонному числу даже после нарушения симметрии, т. е. такой член не может возникнуть в теории возмущений. Таким образом, нейтрино безмассовое во всех порядках теории возмущений.

Что касается непертурбативных эффектов, то до сих пор известны лишь слабые инстантонные эффекты. Эти эффекты могли бы изменить результат, если бы они нарушали симметрию лептонного числа. Один из путей увидеть такое нарушение — аномалии в сохранении лептонного числа в треугольных диаграммах. Действительно, $\partial_\mu j_l^\mu = cW\widetilde{W} + c'B\widetilde{B}$ из-за вклада лептонов в треугольную диаграмму, включающую лептонные токи W и B. К счастью, оказывается, что вклад в аномалию от несохраняющегося барионного тока имеет точно такую же форму, поэтому $B-L$-ток j_{B-L}^μ сохраняется во всех порядках по калибровочной константе связи. Как следствие, непертурбативные эффекты калибровочного сектора не могут вызвать $B-L$-нарушение. Так как вышеприведенный массовый оператор нейтрино нарушает $B-L$-симметрию, то это доказывает, что масса нейтрино остается равной нулю даже в присутствии непертурбативных эффектов.

Обратимся теперь к гравитации. Ясно, если трактовать гравитацию в теории возмущений, то проходят приведенные выше аргументы из-за $B-L$-симметрии констант связи. Однако, если включены непертурбативные гравитационные эффекты (например, черные дыры), то нет гарантии, что глобальные симметрии проявятся только в низкоэнергетической теории. Действительно, допущение того, что барионы поглощаются черными дырами, не дает каких-либо детектируемых следствий, за исключением дефицита барионного числа Вселенной. Поскольку черная дыра способна поглотить любое число барионов, то барионное число в присутствии черной

дыры не может быть точной симметрией. Подобные же аргументы можно привести и для любого глобального заряда, например, лептонного числа в стандартной модели.

Итак, эффективный низкоэнергетический лагранжиан стандартной модели в присутствии черных дыр должен содержать слагаемые, нарушающие барионное и лептонное числа. В рамках стандартной модели единственными такими слагаемыми являются перенормируемые слагаемые типа $LHLH/M_{\rm Pl}$. После нарушения калибровочной симметрии они «генерируют» массу нейтрино порядка $v^2/M_{\rm Pl} \sim 10^{-5}$ эВ. Чтобы решить проблему атмосферных нейтрино, нужны массы нейтрино, по крайней мере, на три порядка величины больше.

Таким образом, предыдущее рассмотрение приводит к необходимости поиска источников масс нейтрино вне стандартной модели.

Существует много возможностей, объясняющих малые нейтринные массы как для дираковского, так и для майорановского типа нейтрино. Ниже рассмотрим возможность существования тяжелого правого нейтрино (или нескольких нейтрино), приводящую к малой нейтринной массе.

6.5. Физика see-saw механизма

Включение правого нейтрино в стандартную модель позволяет выйти за рамки физики стандартной модели, а также рассматривать динамику этой модели на более глубоком уровне. Заметим, что в стандартной модели (которая не содержит ν_R) $B-L$-симметрия только в линейном приближении свободна от аномалии, т. е. $\mathrm{tr}[(B-L)Q_a^2]=0$, где Q_a — калибровочные генераторы стандартной модели. Однако $\mathrm{tr}(B-L)^3 \neq 0$. Это означает, что $B-L$ — глобальная, а не калибровочная симметрия. Вскоре после того, как ν_R было добавлено к стандартной модели, было получено, однако, $\mathrm{tr}(B-L)^3=0$, т. е. можно считать, что $B-L$-симметрия становится калибровочной и можно выбрать в качестве калибровочной группы $SU(2)_L \times U(1)_{I_3R} \times U(1)_{B-L}$ или $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$, причем последняя является группой лево-правосимметричных моделей.

Более того, присутствие ν_R делает модель симметричной по кваркам и лептонам, причем формула Гелл-Манна–Нишиджимы для электрического заряда имеет вид:

$$Q = I_{3L} + I_{3R} + \frac{B-L}{2}. \tag{42}$$

Преимущество этой формулы над формулой стандартной модели заключается в том, что в этом случае все входящие величины имеют физический смысл. Это соотношение естественно приводит к майорановской природе нейтрино, рассматривая масштаб, на котором $SU(2)_L \times U(1)_Y$-симметрия еще не нарушена, а право-левая калибровочная группа уже нарушена. В этом случае

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta I_{3L} = 0, \\ \Delta I_{3R} &= -\Delta\frac{B-L}{2}. \end{aligned} \tag{43}$$

Видно, что если хиггсовские поля, нарушающие «право-левую» калибровочную группу, несут правый изоспин, равный нулю, то $|\Delta L| = 2$. А это означает, что массовый член нейтрино должен быть майорановского типа, и в теории лептонное число изменяется на две единицы.

Дальше попытаемся связать ненулевую массу нейтрино с максимальным $V-A$-характером слабых взаимодействий. Для этих целей обсудим сначала «лево-правые» модели и покажем, как посредством see-saw механизма малая нейтринная масса возникает в этих моделях, и как она связана с масштабом нарушения четности.

6.6. Лево-правая симметрия, масса нейтрино и источник $V-A$-взаимодействий

Лево-правая симметричная теория основана на калибровочной группе $SU(2)_L \times \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ с кварками и лептонами, преобразующимися как дублеты по отношению к $SU(2)_{L,R}$. В таблице представлены кварковые, лептонные и хиггсовские поля в этой модели и их трансформационные свойства относительно калибровочной группы.

Сначала нужно определить, как «лево-правая» группа симметрии нарушается, переходя в стандартную модель, т. е. как нарушается $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$-симметрия, чтобы при низких энергиях воспроизводилась $V-A$-структура слабых взаимодействий. Следующий вопрос — как понять малость нейтринной массы по сравнению с массами других фермионов, если первоначально они трактовались совершенно симметрично (проблема натуральности). Замечательно, что обе эти проблемы имеют общее решение.

Поле	$\boldsymbol{SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}}$**-представления**
Q_L	$(2, 1, +1/3)$
Q_R	$(1, 2, +1/3)$
L_L	$(2, 1, -1)$
L_R	$(1, 2, -1)$
ϕ	$(2, 2, 0)$
Δ_L	$(3, 1, +2)$
Δ_R	$(1, 3, +2)$

Процесс спонтанного нарушения $SU(2)_R$-симметрии, подавляющий $V+A$-токи при низких энергиях, обеспечивает и очень малую массу нейтрино. Действительно, перепишем хиггсовские поля следующим образом:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^+/\sqrt{2} & \Delta^{++} \\ \Delta^0 & -\Delta^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_2^+ \\ \phi_1^- & \phi_2^0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Все хиггсовские поля имеют юкавские константы связи, задаваемые лагранжианом

$$L = h_1 \overline{L}_L \phi L_R + h_2 \overline{L}_L \widetilde{\phi} L_R + h_1' \overline{Q}_L \phi Q_R + h_2' \overline{Q}_L \widetilde{\phi} Q_R + f(L_L L_L \Delta_L + L_R L_R \Delta_R) + \text{э.с.} \tag{45}$$

Группа $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ нарушена подгруппой гиперзаряда $U(1)_Y$ стандартной модели за счет ненулевого вакуумного среднего $\langle \Delta_R^0 \rangle = V_R \neq 0$, так как это поле несет как $SU(2)_R$, так и $U(1)_{B-L}$ квантовые числа. В результате правые заряженные и нейтральные калибровочные бозоны приобретают массу: $M_{W_R} = gV_R$ и $M_Z' = \sqrt{2} g V_R (\cos\theta_W / \sqrt{\cos 2\theta_W})$. Таким образом, подбирая величину V_R, можно

подавить эффекты правых токов и получить левую форму тока слабых взаимодействий при низких энергиях.

Тот факт, что при этом получается нейтрино малой массы, можно увидеть из анализа юкавских констант связи. Заметим сначала, что f-член в (45) генерит массу правых нейтрино только на масштабе V_R. При нарушении симметрии стандартной модели за счет вакуумных средних полей ϕ: $\mathrm{diag}\langle\phi\rangle = (k, k')$ возникают массы не только у W_L- и Z-бозонов, но и у кварков и лептонов. В нейтринном секторе юкавские константы связи после нарушения $SU(2)_L$ ненулевым $\langle\phi\rangle$ приводят к дираковской массе нейтрино. На языке двухкомпонентного нейтрино получается следующая массовая матрица ν, N(ν — левая и N — правая компоненты нейтрино):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & hk \\ hk & fV_R \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Иногда обозначают через $m_D = hk$ и связывают эту массу с масштабом слабых взаимодействий, а массу правого нейтрино $M_R = fV_R$ — с локальной $B - L$-симметрией. Очевидно, что M_R имеет масштаб, меньший планковской массы. Поэтому часто говорят, что see-saw механизм, связанный с наблюдаемыми нейтринными осцилляциями, является сильным указанием на существование локальной $B - L$-симметрии на масштабах, гораздо меньших планковских масс.

6.7. Четность и II-й тип see-saw механизма

При выводе формулы для массы нейтрино, приведенной выше, предполагалось, что вакуумное среднее для левого триплета равно нулю, поэтому элемент массовой матрицы ν_L равен нулю. Однако возможен и случай «индуцированного» вакуумного среднего $\langle\Delta_L^0\rangle = V_T \simeq v_{wk}^2/V_R$. В лево-правых моделях это вакуумное среднее возникает из-за связи с хиггсовским потенциалом $\Delta_L\phi\Delta_R^+\phi^+$. В присутствие вакуумного среднего Δ_L формула see-saw механизма претерпевает значительные изменения. Вообще можно выделить два типа see-saw формулы в зависимости от того, равно нулю или нет вакуумное среднее Δ_L. Новая see-saw формула запишется в виде

$$M_\nu^{II} = M_L - M_\nu^D M_R^{-1}(M_\nu^D)^T, \tag{47}$$

где $M_L = fV_L$, $M_R = fV_R$, а $V_{L,R}$ — вакуумные средние хиггсовских полей, связанных с правыми и левыми нейтрино.

На рис. 1 изображены диаграммы, которые в симметричной по четности теории генерируют формулу II типа для see-saw механизма.

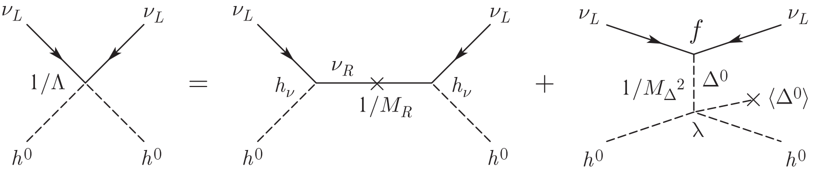


Рис. 1

Первая из диаграмм в правой части содержит обмен правым нейтрино и приводит к see-saw механизму I-го типа. Вторая диаграмма соответствует вкладу в see-saw механизм в симметричных по четности теориях (II-й тип).

Представим себе, что нейтринный спектр масс определен. Что можно тогда сказать о типе see-saw формулы? В I-й тип see-saw формулы входит квадрат дираковской

нейтринной массовой матрицы, которая имеет ту же иерархическую структуру, что и соответствующая матрица заряженных фермионов.

Действительно, в некоторых моделях большого объединения, например, $SO(10)$, $M_D = M_u$, и see-saw формула дает следующую иерархию масс: $m_{\nu_e} \ll m_{\nu_\mu} \ll m_{\nu_\tau}$ или даже более определенное соотношение $m_{\nu_e} : m_{\nu_\mu} : m_{\nu_\tau} = m_u^2 : m_c^2 : m_t^2$.

С другой стороны, при see-saw формуле II-го типа нет причин ожидать какой-либо иерархии: все нейтрино вырождены по массе. Поскольку see-saw формула II-го типа есть отражение четности при низких энергиях, ее справедливость указывала бы на лево-правую симметрию при высоких энергиях.

Общие see-saw модели имеют интересные феноменологические и космологические следствия. Например, see-saw механизм в суперсимметричных моделях с нарушенной суперсимметрией на масштабе слабых взаимодействий вызывает нарушение лептонного аромата. В этих моделях бренчинг распада $\mu \to e + \gamma$ составляет 10^{-11}.

6.8. Смешивание нейтрино

Унитарная $(n \times n)$ матрица U характеризуется $n(n-1)/2$ углами и $n(n+1)/2$ фазами. Эту матрицу можно представить в виде

$$U = S^{+}(\beta) U^0 S(\alpha), \tag{48}$$

где $S(\alpha)$ и $S(\beta)$ — диагональные фазовые матрицы:

$$S_{l'l}(\beta) = e^{i\beta_l}\delta_{l'l}, \quad S_{ik}(\alpha) = e^{i\alpha_i}\delta_{ik}. \tag{49}$$

Поскольку общая фаза ненаблюдаема, одну из фаз β_l и α_i можно выбрать равной нулю. Пусть $\alpha_n = 0$.

Рассмотрим сначала случай дираковских нейтрино. Фазы дираковских полей являются ненаблюдаемыми, поэтому для дираковских нейтрино фазовые факторы $e^{i\beta_i}$ и $e^{i\alpha_i}$ можно отнести к полям $l(x)$ и $\nu_i(x)$. Поэтому дираковская матрица смешивания

$$U^D = U^0. \tag{50}$$

Дираковская матрица смешивания характеризуется $n(n-1)/2$ углами и $n(n+1)/2 - (2n-1) = (n-1)(n-2)/2$ физическими фазами.

При $n = 3$ матрица смешивания характеризуется тремя углами и одной фазой. В стандартной модели матрица

$$U^0 = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

где $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$.

В случае майорановского нейтрино только фазовые факторы $e^{i\beta_l}$ можно включить в дираковские лептонные поля $l(x)$. Нейтринные поля $\nu_i(x)$ удовлетворяют майорановскому условию (18), которое фиксирует фазы полей $\nu_i(x)$. Таким образом, в майорановском случае фазы α_i являются физически наблюдаемыми. Майорановская матрица смешивания имеет вид

$$U^M = U^0 S(\alpha). \tag{52}$$

В общем случае $(n \times n)$ матрица U^M характеризуется $n(n-1)/2$ углами и $n(n+1)/2 - n = n(n-1)/2$ физическими фазами. Заметим, что можно включить

$(n-1)$ майорановскую фазу в майорановские поля, введя новые поля $\nu'_i = e^{i\alpha_i}\nu_i$. Тогда

$$\nu_{lL} = \sum_i U^M_{l_i}\nu_i = \sum_i U^0_{l_i}\nu'_i. \tag{53}$$

Майорановское условие для полей ν'_i имеет вид

$$\nu'^C_i(x) = e^{-2i\alpha_i}\nu'_i(x). \tag{54}$$

Таким образом есть два альтернативных способа включения майорановских нейтрино в соотношения, выражающие смешивание нейтрино:

1) использовать майорановское условие (18). В этом случае матрица майорановского смешивания характеризуется $n(n-1)/2$ фазами и имеет вид (52).

2) Выбрать майорановское условие в форме (54). Тогда майорановская матрица смешивания определяется $(n-1)(n-2)/2$ фазами и имеет ту же форму, что и дираковская матрица смешивания. Остальные $(n-1)$ физические фазы входят в майорановские условия.

Как мы увидим ниже, оба пути дают одинаковый физический результат.

Обратимся теперь к CP-инвариантности в лептонном секторе. Очевидно, что

$$V_{CP}L^{\mathrm{CC}}(x)V^{-1}_{CP} = L^{\mathrm{CC}}(x'), \tag{55}$$

где V_{CP} — оператор CP-преобразования и $x' = (x^0, -\vec{x})$.

В случае смешивания нейтрино «заряженная» часть лагранжиана имеет вид

$$L^{\mathrm{CC}} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i,l} U^*_{l_i}\overline{\nu}_{iL}\gamma_\alpha l_L W^\alpha - \frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i,l} U_{l_i}\bar{l}_L\gamma_\alpha\nu_{iL}W^{\alpha+}. \tag{56}$$

Рассмотрим сначала случай дираковских нейтринных полей. Произвольные CP-фазовые факторы дираковских полей могут быть выбраны равными единице. Для нейтринных полей

$$\begin{aligned} V_{CP}\nu_{iL}(x)V^{-1}_{CP} &= \gamma_0 C\overline{\nu}^T_{iL}(x'); \\ V_{CP}\overline{\nu}_{iL}(x)V^{-1}_{CP} &= -\nu^T_{iL}(x')C^{-1}\gamma_0. \end{aligned} \tag{57}$$

Принимая во внимание, что $C\gamma_\alpha C^{-1} = -\gamma^T_\alpha$ и $V_{CP}W^\alpha(x)V^{-1}_{CP} = \eta^\alpha(W^\alpha)^+(x')$ $(\eta^\alpha = (-1,1,1,1))$, находим

$$V_{CP}\overline{\nu}_{iL}(x)\gamma_\alpha l_L(x)W^\alpha(x)V^{-1}_{CP} = \bar{l}_L(x')\gamma_\alpha\nu_{iL}(x')W^{\alpha+}(x'). \tag{58}$$

Из соотношений (55), (56), (57) можно сделать вывод: в случае CP-инвариантности в лептонном секторе дираковская матрица смешивания вещественна:

$$(U^D)^* = U^D. \tag{59}$$

Для майорановского поля $\nu_i(x)$ имеем:

$$V_{CP}\nu_i(x)V^{-1}_{CP} = \eta^*_i\gamma_0\nu_i(x'), \tag{60}$$

где η_i — CP-четность майорановского нейтрино с массой m_i. Эта величина может принимать значения $\eta_i = \pm i$.

Действительно, с учетом майорановского условия, из (60) получаем

$$V_{CP}\nu_i(x)V^{-1}_{CP} = -\eta_i\gamma_0\nu_i(x'), \tag{61}$$

т. е. $\eta_i = -\eta^*_i$ или $\eta^2_i = -1$.

С учетом соотношения (60) в майорановском случае получаем

$$V_{CP}\overline{\nu}_{iL}(x)\gamma_\alpha l_L(x)W^\alpha(x)V_{CP}^{-1} = \eta_i \overline{l}_L(x')\gamma_\alpha \nu_{iL}(x')W^{\alpha+}(x'). \quad (62)$$

Из (55), (56), (57) и (62) находим, что в случае CP-инвариантности в лептонном секторе майорановская матрица смешивания удовлетворяет условию

$$(U_{li}^M)^* = \eta_i^* U_{li}^M. \quad (63)$$

6.9. Осцилляции нейтрино в вакууме

Активные нейтрино, рождающиеся и детектируемые с определенным сортом в слабых взаимодействиях, описываются лагранжианом (1) (см. гл. 6). Состояние, которое описывает активное нейтрино сорта α, рождающееся совместно с заряженным лептоном α^+ в распаде $A \to B + \alpha^+ + \nu_\alpha$, можно представить в виде

$$|\nu_\alpha\rangle \sim \sum_{k=1}^{3} |\nu_k\rangle\langle\nu_k, \alpha^+|j_{\text{CC}}^\rho|0\rangle J_\rho^{A\to B}, \quad (64)$$

где $J_\rho^{A\to B}$ — ток, соответствующий переходу $A \to B$.

Пренебрегая массами нейтрино, из соотношений (1) и (20) следует, что

$$\langle\nu_k, \alpha^+|j_{\text{CC}}^\rho|0\rangle J_\rho^{A\to B} \sim U_{\alpha k}^*. \quad (65)$$

Поэтому нормированное состояние, описывающее нейтрино сорта α

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle. \quad (66)$$

Это состояние описывает нейтрино в точке рождения в данный момент времени. Состояние, описывающее нейтрино в точке детектирования после промежутка времени T на расстоянии L, получается из $|\nu_\alpha\rangle$ действием пространственно-временного оператора $\exp(-i\widehat{E}T + i\widehat{P}L)$, где $\widehat{E}$ и $\widehat{P}$ — операторы энергии и импульса соответственно.

Результирующее состояние

$$|\nu_\alpha(L,T)\rangle = \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k}^* e^{-iE_kT+ip_kL}\big|\nu_k\big\rangle, \quad (67)$$

E_k и p_k — энергия и импульс массивного нейтрино ν_k. Используя выражения для $|\nu_k\rangle$ в терминах состояний различных сортов нейтрино, имеем

$$|\nu_k\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} U_{\beta k}|\nu_k\rangle \text{и} \qquad |\nu_\alpha(L,T)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \Big(\sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k}^* e^{-iE_kT+ip_kL} U_{\beta k}\Big)\big|\nu_\beta\big\rangle. \quad (68)$$

Последнее соотношение показывает, что детектируемое состояние является суперпозицией нейтрино различных сортов.

Коэффициент $|\nu_\beta\rangle$ представляет собой амплитуду перехода $\nu_\alpha \to \nu_\beta$, происходящего с вероятностью

$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}(L,T) = \big|\langle\nu_\beta\,|\,\nu_\alpha(L,T)\rangle\big|^2 = \Big|\sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k}^* e^{-iE_kT+ip_kL} U_{\beta k}\Big|^2. \quad (69)$$

Эта величина зависит от пространственно-временного распространения нейтрино. Однако в реальном эксперименте время распространения не измеряется. Поэтому надо связать время распространения с расстоянием, чтобы вероятность перехода зависела только от известного расстояния между источником нейтрино и детектором. Для ультрарелятивистских нейтрино $T \simeq L$, поэтому

$$E_k t - p_k x \simeq (E_k - p_k)L = \frac{E_k^2 - p_k^2}{E_k + p_k} L = \frac{m_k^2}{E_k + p_k} L \simeq \frac{m_k^2}{2E} L, \tag{70}$$

где E — энергия в предположении о безмассовости нейтрино.

Это предположение для фазы нейтринных осцилляций очень важное, поскольку оно показывает, что фаза ультрарелятивистских нейтрино зависит только от отношения $m_k^2(L/E)$, а не от E_k и p_k, которые, вообще говоря, определяются характеристиками процесса рождения нейтрино.

Таким образом, результирующая вероятность осцилляции имеет общий характер, независимый от конкретного механизма рождения.

В приближении (70) вероятность перехода на длине L:

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L) = \Big|\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-i\frac{m_k^2}{2E}L} U_{\beta k}\Big|^2 = \\ = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L\right), \tag{71}$$

где $\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2$. Уравнение (71) показывает, что величина нейтринных осцилляций определяется элементами матрицы смешивания и разностью квадратов нейтринных масс.

Различные эксперименты характеризуются разными значениями энергий нейтрино E и разными расстояниями L между источником и детектором.

В выражении (71) нужно отделить постоянное слагаемое

$$\overline{P}_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 \tag{72}$$

от осциллирующего слагаемого, создающего интерференцию вкладов различных массивных нейтрино. Если энергия E или расстояние L неизвестны с достаточной точностью, осцилляторный член усредняется, и только постоянное слагаемое (72) может быть измерено.

В простейшем случае смешивания двух нейтрино, между ν_α, ν_β и ν_1, ν_2 есть только одна разность $\Delta m \equiv \Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$, и матрицу смешивания можно параметризовать в терминах угла смешивания θ:

$$U = \big(\cos\theta \sin\theta - \sin\theta \cos\theta\ \big). \tag{73}$$

В этом случае результирующая разность перехода между двумя сортами нейтрино

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right). \tag{74}$$

Это выражение исторически очень важно, поскольку именно оно использовалось для обработки данных по нейтринным осцилляциям. Вероятность двухнейтринного перехода можно записать в виде

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{1{,}27(\Delta m^2/\text{эВ}^2)}{(E/\text{ГэВ})} \frac{L}{(\text{км})}\right). \tag{75}$$

Формула (75) полезна с точки зрения классификации различного типа нейтринных экспериментов. Поскольку нейтрино взаимодействуют с веществом очень слабо, скорость счета событий весьма мала, обычно на уровне фона. Поэтому переходы нейтрино наблюдаются в том случае, если переходная вероятность не слишком мала, т. е.

$$\frac{\Delta m^2 L}{4E} \geq 0{,}1 \div 1. \tag{76}$$

Используя это соотношение, можно классифицировать нейтринные осцилляционные эксперименты по величине отношения L/E, устанавливающего интервал Δm^2 разности масс, к которому чувствителен эксперимент.

1. Эксперименты с короткой пролетной базой.

В этих экспериментах $L/E \leq 1$ эВ$^{-2}$. Поскольку расстояние между источником и детектором в этих экспериментах небольшое, скорость счета осцилляций велика, при этом $\Delta m^2 L/4E \geq 0{,}1$, а чувствительность $\Delta m^2 \geq 0{,}1$ эВ^2. К этому типу экспериментов относятся реакторные эксперименты.

2. Эксперименты с большой пролетной базой и атмосферные эксперименты.

Для них $L/E \leq 10^4$ эВ$^{-2}$. Скорость счета событий в этих экспериментах невелика. Осцилляции могут быть детектируемы, если $\Delta m^2 L/(4E) \geq 1$, т. е. их чувствительность $\Delta m^2 \geq 10^{-4}$ эВ^2. Примеры таких экспериментов — реакторные CHOOZ, MINOS; атмосферные — Kamiokande, IMB, Super-Kamiokande.

3. Эксперименты с очень большой пролетной базой и солнечные эксперименты.

Пример — реакторный эксперимент KamLand с $L \simeq 180$ км, $E \simeq 3$ МэВ, при этом $L/E \simeq 3 \cdot 10^5$ эВ$^{-2}$, а чувствительность $\Delta m^2 \geq 3 \cdot 10^{-5}$ эВ^2. Для солнечных нейтринных экспериментов GALLEX, GNO, SAGE $L \simeq 1{,}5 \cdot 10^8$ км, $E \simeq 1$ МэВ, $L/E \sim 10^{12}$ эВ$^{-2}$, а чувствительность $\Delta m^2 \geq 10^{-12}$ эВ^2.

6.10. Нейтринные осцилляции в среде

До сих пор рассматривались нейтринные осцилляции в вакууме. В 1978 г. Вольфенштейн установил, что при распространении нейтрино в среде осцилляции модифицируются когерентными взаимодействиями со средой с эффективными потенциалами, отличающимися друг от друга для нейтрино различных сортов.

Рассмотрим сначала для простоты состояние нейтрино определенного сорта с определенным импульсом p:

$$|\nu_\alpha(p)\rangle \equiv \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k(p)\rangle. \tag{77}$$

Массивные нейтринные состояния $|\nu_k(p)\rangle$ с импульсом p имеют собственные состояния вакуумного гамильтониана H_0:

$$\begin{aligned} H_0|\nu_k(p)\rangle &= E_k|\nu_k(p)\rangle, \\ E_k &= \sqrt{p_k^2 + m_k^2}. \end{aligned} \tag{78}$$

Полный гамильтониан в среде $H = H_0 + H_I$,

$$\text{где} \quad H_I|\nu_\alpha(p)\rangle = V_\alpha|\nu_\alpha(p)\rangle. \tag{79}$$

V_α — эффективный потенциал для активных сортов нейтрино ν_α $(\alpha = e, \mu, \tau)$ вследствие когерентных взаимодействий со средой при упругом рассеянии вперед в про-

цессах со слабыми заряженными (CC) и нейтральными (NC) токами. Фейнмановские диаграммы для этих процессов представлены на рис. 2.

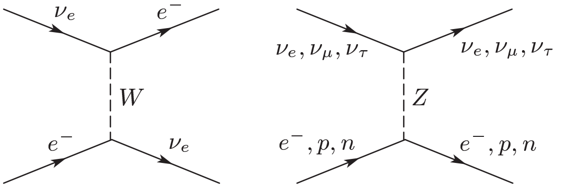


Рис. 2

Потенциалы, связанные с заряженными и нейтральными токами (см. приложение)

$$V_{\rm CC} = \sqrt{2} G_F N_e, \quad V_{\rm NC} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_n, \tag{80}$$

где G_F — фермиевская константа, N_e и N_n — плотности электронов и нейтронов.

Как видно из рис. 2, потенциал $V_{\rm CC}$ чувствителен только к электронному нейтрино, в то время как $V_{\rm NC}$ — к трем активным сортам нейтрино. Более того, поскольку NC-потенциалы при рассеянии на электронах и протонах равны и противоположны по знаку, они сокращают друг друга (в предположении об электронейтральности), и только NC-потенциал, связанный с рассеянием на нейтронных, дает вклад в $V_{\rm NC}$. Поэтому

$$V_\alpha = V_{\rm CC}\delta_{\alpha e} + V_{\rm NC}. \tag{81}$$

Для антинейтрино знаки всех потенциалов обратные.

В шредингеровской картине нейтринные состояния определенного сорта α удовлетворяют уравнению эволюции

$$i\frac{d}{dt}|\nu_\alpha(p,t)\rangle = H|\nu_\alpha(p,t)\rangle, \tag{82}$$

причем $|\nu_\alpha(p,0)\rangle = |\nu_\alpha(p)\rangle$.

Рассмотрим амплитуды переходов $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ различных сортов нейтрино

$$\psi_{\alpha\beta}(p,t) = \langle \nu_\beta(p) \mid \nu_\alpha(p,t)\rangle, \tag{83}$$

при этом $\psi_{\alpha\beta}(p,0) = \delta_{\alpha\beta}$.

Другими словами, $\psi_{\alpha\beta}(p,t)$ — амплитуда вероятности найти нейтрино, рожденное при $t=0$ в состоянии α, в момент времени t в состоянии β.

Используя (78), (79) и (82), получаем уравнение, описывающее эволюцию во времени амплитуд перехода между различными сортами нейтрино

$$i\frac{d}{dt}\psi_{\alpha\beta}(p,t) = \sum_\rho \Big(\sum_k U_{\beta k} E_k U^*_{\rho k} + \delta_{\alpha\rho} V_\beta\Big)\psi_{\alpha\rho}(p,t). \tag{84}$$

Для ультрарелятивистских нейтрино $E_k \simeq E + m_k^2/(2E)$, $p=E$, $t=x$; получаем уравнение эволюции в пространстве

$$i\frac{d}{dx}\psi_{\alpha\beta}(x) = \left(p + \frac{m_1^2}{2E} + V_{\rm NC}\right)\psi_{\alpha\beta}(x) + \sum_\rho \left(\sum_k U_{\beta k}\frac{\Delta m^2_{k1}}{2E}U^*_{\rho k} + \delta_{\beta e}\delta_{\rho e}V_{\rm CC}\right)\psi_{\alpha\rho}(x), \tag{85}$$

где выделено слагаемое $(p + m_1^2/(2E) + V_{\rm NC})\psi_{\alpha\beta}(x)$, которое формирует общую фазу для всех сортов нейтрино. Эта фаза несущественна для переходов различных сортов

и может быть исключена путем фазового сдвига

$$\psi_{\alpha\beta}(x) \to \psi_{\alpha\beta}(x) \exp\left[-i\left(p + \frac{m_1^2}{2E}\right)x - i\int\limits_0^x V_{\rm NC}(x')dx'\right], \tag{86}$$

поскольку она не влияет на вероятность перехода $\nu_\alpha \to \nu_\beta$:

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(x) = |\psi_{\alpha\beta}(x)|^2. \tag{87}$$

Поэтому соответствующее уравнение эволюции для амплитуд перехода различных сортов нейтрино

$$i\frac{d}{dx}\psi_{\alpha\beta}(x) = \sum_\rho \left(\sum_k U_{\beta k}\frac{\Delta m_{k1}^2}{2E}U_{\rho k}^* + \delta_{\beta e}\delta_{\rho e}V_{\rm CC}\right)\psi_{\alpha\rho}(x). \tag{88}$$

Это уравнение показывает, что нейтринные осцилляции в среде, как и осцилляции в вакууме, зависят от квадратов нейтринных масс, а не от абсолютного значения масс.

Уравнение (88) можно записать в матричной форме:

$$i\frac{d}{dx}\psi_\alpha = \frac{1}{2E}(U\Delta M^2 U^+ + A)\psi_\alpha, \tag{89}$$

для смешивания трех нейтрино

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix}\psi_{\alpha e}\\ \psi_{\alpha\mu}\\ \psi_{\alpha\tau}\end{pmatrix}, \quad \Delta M^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0\\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}A_{\rm CC} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{90}$$

где $A_{\rm CC} \equiv 2EV_{\rm CC} = 2\sqrt{2}EG_F N_e$.

Поскольку случай смешивания трех нейтрино достаточно громоздок, начнем обсуждение с простейшего случая смешивания между ν_e, ν_μ и ν_1, ν_2. Пренебрегая несущественной общей фазой, уравнение эволюции (89) запишется в виде

$$i\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\psi_{ee}\\ \psi_{e\mu}\end{pmatrix} = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix}-\Delta m^2\cos 2\theta + 2A_{\rm CC} & \Delta m^2 \sin 2\theta\\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2\cos 2\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi_{ee}\\ \psi_{e\mu}\end{pmatrix}, \tag{91}$$

где $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ и θ — угол смешивания,

$$\begin{aligned}\nu_e &= \cos\theta\nu_1 + \sin\theta\nu_2,\\ \nu_\mu &= -\sin\theta\nu_1 + \cos\theta\nu_2.\end{aligned} \tag{92}$$

Если начальное нейтрино — ν_e, как в солнечных нейтринных экспериментах, то начальное условие для уравнения эволюции (91):

$$\begin{pmatrix}\psi_{ee}(0)\\ \psi_{e\mu}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{93}$$

Тогда вероятности перехода $\nu_e \to \nu_\mu$ и сохранения ν_e:

$$\begin{aligned}P_{\nu_e\to\nu_\mu}(x) &= |\psi_{e\mu}(x)|^2,\\ P_{\nu_e\to\nu_e}(x) &= |\psi_{ee}(x)|^2 = 1 - P_{\nu_e\to\nu_\mu}(x).\end{aligned} \tag{94}$$

Уравнения эволюции для амплитуд перехода практически решаются численно с точностью, определяемой возможностями компьютера.

Обсудим аналитическое решение уравнения (91) для достаточно плавного профиля плотности вещества. Это решение полезно для понимания качественных аспектов проблемы осцилляции нейтрино.

Гамильтонову матрицу в (91) можно диагонализовать ортогональным преобразованием

$$\psi_e = U_M\psi,$$

$$\text{где } \psi_e = \begin{pmatrix}\psi_{ee}\\ \psi_{e\mu}\end{pmatrix}, \quad U_M = \begin{pmatrix}\cos\theta_M & \sin\theta_M\\ -\sin\theta_M & \cos\theta_M\end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}. \tag{95}$$

В этом выражении ψ_k можно рассматривать как амплитуду эффективного нейтрино в веществе (хотя такая вероятность не измеряется, поскольку детектируются только сорта нейтрино).

Угол θ_M — эффективный угол смешивания в веществе:

$$\operatorname{tg} 2\theta_M = \frac{\operatorname{tg} 2\theta}{1 - A_{\text{CC}}/(\Delta m^2\cos 2\theta)}. \tag{96}$$

Интересный новый эффект, открытый в 1985 г. Михеевым и Смирновым состоит в том, что имеется резонанс при

$$A_{\text{CC}} = \Delta m^2\cos 2\theta, \tag{97}$$

соответствующий плотности электронов

$$N_e^R = \frac{\Delta m^2\cos 2\theta}{2\sqrt{2}EG_F}. \tag{98}$$

В резонансе эффективный угол смешивания равен 45°, т. е. смешивание максимально. При этом возможны полные переходы между двумя сортами нейтрино, если область резонанса достаточно широкая. Этот механизм был назван «эффект Михеева–Смирнова–Вольфенштейна».

Эффективный квадрат разности масс в веществе

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{(\Delta m^2\cos 2\theta - A_{\text{CC}})^2 + (\Delta m^2\sin 2\theta)^2}. \tag{99}$$

Пренебрегая несущественной общей фазой, получаем уравнение эволюции амплитуд эффективных массивных нейтрино в веществе

$$i\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{4E}\begin{pmatrix}-\Delta m_M^2 & 0\\ 0 & \Delta m_M^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -i\dfrac{d\theta_M}{dx}\\ i\dfrac{d\theta_M}{dx} & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \tag{100}$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix}\psi_1(0)\\ \psi_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_M^0 & -\sin\theta_M^0\\ \sin\theta_M^0 & \cos\theta_M^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_M^0\\ \sin\theta_M^0\end{pmatrix}, \tag{101}$$

где θ_M^0 — эффективный угол смешивания в веществе в той точке, где нейтрино рождено.

Если плотность вещества постоянна, то $d\theta_M/dx = 0$. При этом амплитуды эффективных массивных нейтрино в веществе становятся независимыми,

$$P_{\nu_e\to\nu_\mu}(x) = \sin^2 2\theta_M\sin^2\left(\frac{\Delta m_M^2 x}{4E}\right) \tag{102}$$

имеет ту же структуру, что и двухнейтринная вероятность перехода в вакууме, только угол смешивания и квадрат разности масс заменены их эффективными значениями в среде. Если плотность вещества не постоянна, то $d\theta_M/dx \neq 0$ и

$$\frac{d\theta_M}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{\mathrm{CC}})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}\frac{dA_{\mathrm{CC}}}{dx}, \tag{103}$$

которая максимальна в резонансе

$$\left.\frac{d\theta_M}{dx}\right|_R = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,2\theta}\left.\frac{d\ln N_e}{dx}\right|_R. \tag{104}$$

Это поведение показано на рис. 3 для $\Delta m^2 = 7\cdot 10^{-6}$ эВ^2, $\sin^2 2\theta = 10^{-3}$. Видно, что для $N_e \ll N_e^R$ эффективный угол смешивания практически равен углу смешивания в вакууме, $\theta_M \simeq \theta$. При $N_e \simeq N_e^R$ эффективный угол смешивания меняется очень быстро с плотностью электронов: от 45° при $N_e \simeq N_e^R$ до 90° при $N_e \gg N_e^R$.

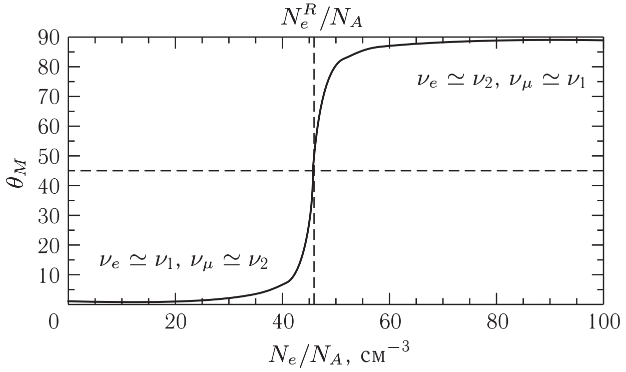


Рис. 3

На рис. 4 показано соответствующее поведение эффективного квадрата разности масс Δm_M^2.

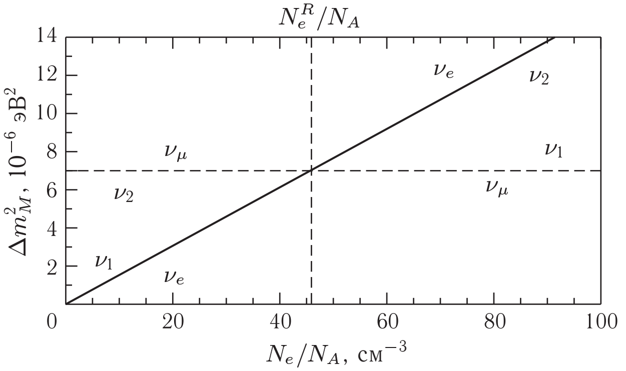


Рис. 4

Этот рисунок позволяет понять, как присутствие резонанса может вызвать практически полное превращение $\nu_e \to \nu_\mu$ солнечных нейтрино. Если параметры смешивания таковы, что в центре Солнца $N_e \gg N_e^R$, то угол эффективного смешивания $\simeq 90°$, и электронные нейтрино рождаются почти в чистом ν_α состоянии.

При распространении нейтрино от Солнца, резонанс достигается при $N_e = N_e^R$, где энергетический зазор между ν_1 и ν_2 минимален. Если резонанс пересекается адиабатически, нейтрино остается в состоянии ν_2 и выходит за пределы Солнца как $\nu_2 = \sin \nu_e + \cos \nu_\mu$, которое почти совпадает с ν_μ, если угол смешивания мал, приводя к почти полной конверсии $\nu_e \to \nu_\mu$.

Это именно тот случай, когда эффект Михеева–Смирнова–Вольфенштейна проявляется наиболее полно, поскольку «большая» конверсия достигается при малых углах смешивания.

Если резонанс пересекается неадиабатически, $\nu_2 \to \nu_1$ переходы происходят в некотором интервале около резонанса, и нейтрино, испущенное Солнцем как смесь ν_1 и ν_2, частично преобразуется из ν_e в ν_μ. Можно записать амплитуды состояний ν_1 и ν_2 в любой точке x после пересечения резонансной области в следующем виде

$$\psi_1(x) = \left[\cos\theta_M^0 \exp\Big(i\int_0^{x_R} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E}dx'\Big)A_{11}^R + \sin\theta_M^0 \exp\Big(-i\int_0^{x_R} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E}dx'\Big)A_{21}^R\right] \times \\ \times \exp\Big(i\int_{x_R}^{x} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E}dx'\Big); \quad (105)$$

$$\psi_2(x) = \left[\cos\theta_M^0 \exp\Big(i\int_0^{x_R} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E}dx'\Big)A_{12}^R + \sin\theta_M^0 \exp\Big(-i\int_0^{x_R} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E}dx'\Big)A_{22}^R\right] \times \\ \times \exp\Big(-i\int_{x_R}^{x} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E}dx'\Big), \quad (106)$$

где A_{kj}^R — амплитуда перехода $\nu_k \to \nu_j$ в резонансе.

Рассматривая x как точку детектирования на Земле, практически в вакууме, получим для вероятности «выживания» ν_e

$$\overline{P}_{\nu_e\to\nu_e}(x) = |\psi_{ee}(x)|^2, \quad (107)$$

где $\psi_{ee}(x) = \cos\theta\psi_1(x) + \sin\psi_2(x)$.

Если $\Delta m^2 \gg 10^{-10}$ эВ^2, все фазы в выражениях (105) и (106) велики и являются быстро осциллирующими функциями энергии нейтрино. В этом случае усредненные по энергетическому разрешению детектора вероятности переходов не содержат интерференционных слагаемых, а содержат лишь следующие слагаемые

$$\overline{P}^{\rm Sun}_{\nu_e\to\nu_e} = \cos^2\theta\cos^2\theta_M^0|A_{11}^R|^2 + \cos^2\theta\sin^2\theta_M^0|A_{21}^R|^2 + \\ + \sin^2\theta\cos^2\theta_M^0|A_{12}^R|^2 + \sin^2\theta\sin^2\theta_M^0|A_{22}^R|^2. \quad (108)$$

Эта вероятность не зависит от расстояния между Землей и Солнцем.

Принимая во внимание сохранение вероятности, получим

$$|A_{11}^R|^2 = |A_{22}^R|^2 = 1 - P_C, \quad |A_{12}^R|^2 = |A_{21}^R|^2 = P_C, \quad (109)$$

где P_C — вероятность перехода $\nu_1 \rightleftarrows \nu_2$ в резонансе. Тогда вероятность осцилляций есть

$$\overline{P}^{\rm Sun} = \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{2} - P_C\Big)\cos 2\theta_M^0 \cos 2\theta. \quad (110)$$

Эта формула широко используется для анализа солнечных нейтринных данных.

Основная проблема использования формулы (110) — вычисление переходной вероятности P_C. Эта вероятность должна включать энергетический член $\Delta m_M^2/2E$, разделяющий ν_1 и ν_2, а также недиагональные слагаемые, пропорциональные $d\theta_M/dx$ в выражении (88) и вызывающие $\nu_1 \rightleftarrows \nu_2$ переходы.

Действительно, переходные вероятности можно записать в виде

$$P_C = \frac{\exp[-(\pi/2)\gamma F] - \exp[-(\pi/2)\gamma(F/\sin^2\theta)]}{1 - \exp[-(\pi/2)\gamma(F/\sin^2\theta)]}, \tag{111}$$

где параметр адиабатичности

$$\gamma = \left.\frac{\Delta m_M^2/2E}{2|d\theta_M/dx|}\right|_R = \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E\cos 2\theta |d\ln N_e/dx|_R}. \tag{112}$$

Если γ велико, резонанс пересекается адиабатически и $P_C \ll 1$, при этом

$$\overline{P}^{\text{Sun,adiab}}_{\nu_e\to\nu_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta_M^0 \cos 2\theta. \tag{113}$$

Параметр F в (111) зависит от профиля электронной плотности.

В стандартной модели Солнца $N_e(R) = N_e(0)e^{-R/R_0}$, где $N_e(0) = 245N_A/\text{см}^3$, $R_0 = R_{\text{Sun}}/10{,}54$, R — расстояние от центра Солнца, R_{Sun} — радиус Солнца. В этом случае параметр

$$F = 1 - \text{tg}^2\,\theta. \tag{114}$$

Для анализа солнечных нейтринных данных нужно учесть эффект земной материи при распространении нейтрино ночью (регенерация ν_e в Земле). Вероятность «выживания» солнечного нейтрино ν_e после пересечения Земли

$$P^{\text{Sun+Earth}}_{\nu_e\to\nu_e} = \overline{P}^{\text{Sun}}_{\nu_e\to\nu_e} + \frac{(1 - 2\overline{P}^{\text{Sun}}_{\nu_e\to\nu_e})(P^{\text{Earth}}_{\nu_e\to\nu_e} - \sin^2\theta)}{\cos 2\theta}. \tag{115}$$

Поскольку профиль плотности Земли — не плавная функция, вероятность $P^{\text{Earth}}_{\nu_e\to\nu_e}$ вычисляется численно.

Если аппроксимировать профиль плотности Земли ступенчатой функцией, то эффективные массивные нейтрино распространяются как плоские волны с фазой $\exp(\pm i\Delta m_M^2 \Delta x/(4E))$, где Δx — ширина ступеньки.

На границах ступенек нейтринные сорта объединяются, согласно схеме

$$\begin{aligned}\psi(x_n) = \big[U_M\phi(x_n - x_{n-1})U_M^+\big]_{(n)}\big[U_M\phi(x_{n-1} - x_{n-2})U_M^+\big]_{(n-1)}\cdots\\ \cdots\big[U_M\phi(x_2 - x_1)U_M^+\big]_{(2)}\big[U_M\phi(x_1 - x_0)U_M^+\big]_{(1)}U\phi(x_0),\end{aligned} \tag{116}$$

где x_0 — координата точки, в которой нейтрино входит в Землю, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — границы n ступенек, которыми аппроксимируется профиль плотности Земли, $\phi(\Delta x) = \text{diag}[\exp(-i\Delta m_M^2\Delta x/(4E)), \exp(i\Delta m_M^2\Delta x/(4E))]$ и обозначение $[\ldots]_{(i)}$ указывает, что все зависящие от плотности вещества величины в квадратных скобках следует вычислить с плотностями, соответствующими i-й ступеньке, простирающейся от x_{i-1} до x_i.

В заключение этого раздела следует упомянуть, что майорановские фазы в матрице смешивания не оказывают влияния на нейтринные осцилляции, как в вакууме, так и в веществе. Поэтому дираковская или майорановская природа не может быть установлена в экспериментах по нейтринным осцилляциям. Обсудим это подробнее.

6.11. Можно ли установить природу нейтрино в экспериментах по нейтринным осцилляциям?

Вернемся к осцилляциям нейтрино в вакууме. Вероятность перехода $\nu_l \to \nu_l'$ можно записать в виде

$$P(\nu_l \to \nu_l') = \left|\sum_i U_{l'i} e^{-i\Delta m^2_{1i}\frac{L}{2E}} U^*_{li}\right|^2. \tag{117}$$

Но $(n-1)$ майорановских фаз не входят в вероятность перехода, поэтому она одинакова для дираковских и майорановских нейтрино:

$$P^M(\nu_l \to \nu_l') = P^D(\nu_l \to \nu_l'). \tag{118}$$

Это же утверждение справедливо для нейтринных осцилляций в среде.

Действительно, стандартный эффективный гамильтониан взаимодействия нейтрино с веществом

$$H^m_{\nu_l',\nu_l}(t) = \langle \nu_l' | H_0 | \nu_l \rangle + \sqrt{2} G_F \rho_e(t) x_{\nu_l',\nu_l}. \tag{119}$$

В этом выражении H_0 — свободный гамильтониан, ρ_e — плотность электронов и $x_{\nu_l',\nu_l} = \delta_{x_{\nu_l',\nu_l}} \delta_{x_{\nu_l,\nu_l}}$.

Гамильтониан эффективного взаимодействия со средой (второе слагаемое в (119)), определяется амплитудой упругого $\nu_l - e$ рассеяния на угол ноль. Но это слагаемое не зависит от масс нейтрино и смешивания. Массы нейтрино и смешивание входят только в свободную часть гамильтониана H_0.

Состояние нейтрино с определенным ароматом задается соотношением

$$|\nu_l\rangle = \sum_i U^*_{li} |\nu_i\rangle, \tag{120}$$

где $|\nu_i\rangle$ — собственные состояния свободного лагранжиана

$$H_0 |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle, \quad E_i \simeq p + m_i^2/(2p). \tag{121}$$

Из (120) и (121) получаем

$$\langle \nu_l' | H_0 | \nu_l \rangle = \sum_i U_{l'i} \frac{m_i^2}{2E} U^*_{li} = \left(U \frac{m^2}{2E} U^+ \right)_{l',l}. \tag{122}$$

Но для дираковских и майорановских матриц смешивания

$$U^M \frac{m^2}{2E} U^{M+} = U^D \frac{m^2}{2E} U^{D+}. \tag{123}$$

Поэтому дополнительные майорановские CP-фазы не входят в гамильтониан взаимодействия нейтрино с материей. Другими словами, гамильтониан взаимодействия с веществом имеет одинаковую форму как для дираковских, так и майорановских нейтрино. Поэтому природа нейтрино (дираковская или майорановская) не может быть установлена в экспериментах по осцилляциям нейтрино в вакууме.

6.12. Эквивалентность теорий с безмассовыми дираковскими и майорановскими нейтрино

Все существующие экспериментальные данные согласуются с предположением о том, что нейтринные взаимодействия описываются лагранжианами (1) и (2). Для таких взаимодействий теории с безмассовыми дираковскими и майорановскими

нейтрино эквивалентны. Это утверждение основано на том, что для безмассовых нейтрино левые дираковские и майорановские поля связаны унитарным преобразованием

$$V\nu_{lL}^{D}V^{-1} = \nu_{lL}^{M}. \tag{124}$$

Из майорановского условия (18) следует, что для майорановского поля правые и левые компоненты связаны соотношением

$$\nu_{iR}(x) = (\nu_{iL}(x))^{C}. \tag{125}$$

В дираковском случае правые и левые компоненты — независимы.

Если $m_i = 0$, то правые поля не входят в стандартный лагранжиан. В этом случае различить дираковские и майорановские нейтрино невозможно. Поэтому безмассовые теории с дираковским и майорановским нейтрино эквивалентны.

6.13. Нарушение полного лептонного числа в нейтринных процессах

В случае смешивания нейтрино стандартный лагранжиан заряженного взаимодействия пары лептон-нейтрино с W-бозоном задается соотношением (56). Это соотношение определяет два типа нейтринных (антинейтринных) взаимодействий. В процессах первого типа нейтрино рождаются (первое слагаемое в (56)). С первым слагаемым в (56) связано рождение нейтрино при переходе

$$W^{+} \to l^{+} + \nu_i. \tag{126}$$

За счет второго слагаемого в лагранжиане происходит «поглощение» нейтрино в процессе

$$\nu_i \to l'^{-} + W^{+}. \tag{127}$$

В физических процессах, основанных на переходах (126) и (127), полное лептонное число сохраняется. Нейтрино в переходах (126) и (127) могли бы быть как дираковскими, так и майорановскими.

В матричные элементы процессов рождения и поглощения нейтрино с импульсом p и массой m_i входит спинор $((1-\gamma_5)/2)u^r(p)$. С точностью до линейных по $m_i/(2E)$ членов получаем

$$\frac{(1-\gamma_5)}{2}u^r(p) = \frac{(1-r)}{2}u^r(p) + r\frac{m_i}{2E}\gamma^0 u^r(p). \tag{128}$$

В нейтринных экспериментах энергии нейтрино гораздо больше нейтринных масс. Таким образом, в переходах (126) и (127) рождаются и поглощаются, главным образом, левые нейтрино.

Как видно из (126), совместно с лептоном l^{+} рождается нейтрино ν_l. Если нейтрино являются майорановскими частицами, то возможен второй тип нейтринных процессов. Для майорановских нейтрино оператор $\nu_{iL}(x)$ представляет собой сумму операторов рождения и поглощения нейтрино. Таким образом, нейтрино, которые рождаются в переходе (126), за счет первого слагаемого в лагранжиане (56), могут поглощаться в переходе

$$\nu_i \to l'^{+} + W^{-} \tag{129}$$

за счет того же члена в лагранжиане. Очевидно, что в процессах (126) и (129) полное лептонное число изменяется на две единицы. В матричный элемент поглощения нейтрино входит спинор $((1-\gamma_5)/2)v^r(p)$, где $v^r(p) = C(\overline{u}^r(p))^T$. Опять с точностью до линейных по $m_i/(2E)$ членов

$$\frac{1-\gamma_5}{2}v^r(p) = \frac{1+r}{2}v^r(p) + r\frac{m_i}{2E}\gamma^0 v^r(p). \tag{130}$$

Цепочка процессов, индуцируемая переходами (126), (129), например, $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_i$, $\nu_i + N \to e^+ + X$, однако, сильно подавлена. Как видно из (128), рождаются в основном левые нейтрино. Из (130) следует, что сечение поглощения таких нейтрино содержит фактор $(m_i/(2E))^2$. Вероятность рождения правых нейтрино, имеющих «большое» сечение поглощения, подавлено фактором $(m_i/(2E))^2$. Имея в виду, что энергии нейтрино в нейтринных процессах составляют МэВ-ы и выше, а массы нейтрино $m_{\max} \le 2$ эВ, получаем фактор подавления

$$\frac{m_{\max}^2}{4E^2} \le 10^{-12}. \tag{131}$$

Поэтому в обозримом будущем представляется весьма проблематичным установление природы нейтрино в экспериментах с нарушением полного лептонного числа.

6.14. Процессы $|\Delta L| = 2$ с участием виртуальных майорановских нейтрино

Обсудим теперь $|\Delta L| = 2$ процессы с виртуальными майорановскими нейтрино, которые индуцируются первыми (или вторым) слагаемым в лагранжиане (56). Примером таких процессов является безнейтринный двойной β-распад ($\beta\beta 0\nu$) четно-четных ядер:

$$(A, Z) \to (A, Z+2) + e^- + e^-, \tag{132}$$

а также распады

$$K^+ \to \pi^- + \mu^+ + \mu^+, \quad K^- \to \pi^+ + \mu^- + e^- \tag{133}$$

и процесс

$$\mu^- + (A, Z) \to (A, Z-2) + e^+. \tag{134}$$

Лептонная часть оператора, дающего вклад в матричный элемент процессов (132) и (133):

$$\sum_{i,k} T\big(\bar{l}_L(x_1)\gamma_\alpha \langle 0|T(\nu_{iL}(x_1)\nu_{kL}^T(x_2))|0\rangle \gamma_\beta^T \overline{l'}{}_L^T U_{li}U_{l'k}\big). \tag{135}$$

Рассмотрим структуру пропагатора нейтрино. Из майорановского условия имеем

$$\nu_k^T = -\overline{\nu}_k C. \tag{136}$$

Учитывая это соотношение при $m_i^2 \ll p^2$, находим

$$\langle 0|T(\nu_{iL}(x_1)\nu_{kL}^T(x_2))|0\rangle = -\delta_{ik}\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{(1-\gamma_5)}{2}\int e^{-ip(x_1-x_2)}\frac{\gamma p + m_i}{p^2 - m_i^2}d^4p\frac{1-\gamma_5}{2}C. \tag{137}$$

Таким образом, пропагаторы левых компонент нейтринных полей пропорциональны массам нейтрино. В пределе $m_i \to 0$ процессы (132) и (133) оказываются подавленными.

Из (135) и (137) следует, что матричные элементы процессов (132) и (133) пропорциональны

$$m_{ll'} = \sum_i U_{li} U_{l'i} m_i. \tag{138}$$

Аналогично, матричные элементы процессов (134) пропорциональны $m^*_{ll'}$. Учитывая унитарность матрицы смешивания, получаем

$$|m_{ll'}| \leq m_{\max}. \tag{139}$$

Согласно современным экспериментальным данным

$$|m_{ll'}| \leq 2{,}3 \text{ эВ}. \tag{140}$$

Вероятности процессов с $|\Delta L| = 2$, в которых участвуют виртуальные майорановские нейтрино чрезвычайно малы. Во-первых, это процессы второго порядка по фермиевской константе G_F. Во-вторых, эти процессы подавлены по спиральности. Фактор подавления по спиральности $m_i^2/\langle Q^2\rangle$, где $\langle Q^2\rangle$ — средний квадрат передаваемого импульса (обычно $\simeq 10$ МэВ^2).

Современные ограничения на процессы (134):

$$\frac{\Gamma(\mu^- \text{Ti} \to e^+ \text{Ca})}{\Gamma(\mu^- \text{Ti} \to \text{все})} \leq 1{,}7 \cdot 10^{-12}. \tag{141}$$

Для процессов (133):

$$\frac{\Gamma(\text{K}^+ \to \pi^- \mu^+ \mu^+)}{\Gamma(\text{K}^+ \to \text{все})} \leq 3 \cdot 10^{-9}. \tag{142}$$

6.15. Безнейтринный двойной β-распад

Исключительным процессом, чувствительным к майорановской массе нейтрино, является безнейтринный двойной β-распад четно-четных ядер.

Стандартный эффективный гамильтониан взаимодействия пары электрон-нейтрино с адронами

$$H^{\text{CC}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} 2\overline{e}_L \gamma_\alpha \nu_{lL} j^\alpha + \text{э.с.}, \tag{143}$$

где j^α — адронный заряженный ток. Будем предполагать майорановское смешивание нейтрино

$$\nu_{lL} = \sum_i U_{li} \nu_{iL}, \tag{144}$$

где ν_i — майорановское нейтринное поле массы m_i.

Матричный элемент $\beta\beta 0\nu$-распада имеет следующий вид

$$\langle f|S|i\rangle = -4\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{i}{(2\pi)^4} N_{p_1} N_{p_2} m_{\beta\beta} \overline{u}(p_2)\gamma_\alpha \frac{(1-\gamma_5)}{2} \gamma_\beta^T \overline{u}^T(p_1) \times \\ \times \int e^{ip_1x_1 + ip_2x_2} e^{-ip(x_1-x_2)} \frac{1}{p^2} \langle \psi_f | T(J^\alpha(x_1) J^\beta(x_2)) | \psi_i\rangle \, d^4x_1 \, d^4x_2 \, d^4p. \tag{145}$$

Здесь

$$m_{ll} \equiv m_{\beta\beta} = \sum_i U_{li}^2 m_i \tag{146}$$

эффективная майорановская масса, $|\psi_i\rangle$ и $|\psi_f\rangle$ — вектора начального и конечного состояния ядер; $N_{p_i} = (2\pi)^{-3/2}(2p_i^0)^{-1/2}$, $J^\alpha(x)$ — заряженный адронный ток.

С помощью (145) можно вычислить время полураспада

$$\frac{1}{T_{1/2}^{0\nu}(A,Z)} = |m_{\beta\beta}|^2 |M(A,Z)|^2 G^{0\nu}(E_0,Z), \tag{147}$$

где $M(A,Z)$ — ядерный матричный элемент, $G^{0\nu}(A,Z)$ — фазовый фактор, E_0 — энергия распада.

Заметим, что ядерный матричный элемент определяется сильными взаимодействиями и не зависит от масс нейтрино и их смешивания. В эксперименте CUORICINO получено ограничение

$$T_{1/2}^{0\nu}(^{130}\mathrm{Te}) \geq 1{,}8\cdot 10^{24}\ \text{лет}. \tag{148}$$

С учетом неопределенностей в ядерном матричном элементе, это ограничение дает

$$|m_{\beta\beta}| \leq (0{,}2 \div 1{,}1)\ \text{эВ}. \tag{149}$$

В эксперименте Heidelberg–Moscow

$$T_{1/2}^{0\nu}(^{76}\mathrm{Ge}) \geq 1{,}55\cdot 10^{25}\ \text{лет}, \tag{150}$$

отсюда

$$|m_{\beta\beta}| \leq (0{,}3 \div 1{,}2)\ \text{эВ}. \tag{151}$$

Планируемые эксперименты по поиску безнейтринного двойного β-распада способны отодвинуть $T_{1/2}^{0\nu}$ до $10^{27} \div 10^{28}$ лет, т. е. обеспечить чувствительность на уровне $|m_{\beta\beta}| \sim 10^{-2}$ эВ.

6.16. $\mu - \tau$-симметрия и большое атмосферное смешивание

Чтобы увидеть, как симметрия массовой матрицы влияет на матрицу смешивания, рассмотрим случай только двух поколений нейтрино, μ и τ. Эксперименты по нейтрино свидетельствуют о том, что углы смешивания близки к максимальным, т. е. $\theta_A = \pi/4$.

Работая в базисе, для которого массовая матрица заряженных лептонов диагональна, получаем, что майорановская массовая матрица, дающая максимальное смешивание

$$M_\nu^{(2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{152}$$

Эта матрица имеет $\mu - \tau$-зарядовую симметрию. Малость масс солнечных нейтрино позволяет записать $b = -1$ и $a = 1 + \varepsilon$. Ясно, если такая симметрия «ответственна» за максимальный атмосферный угол смешивания, то она противоречит кварк-лептонному объединению как фундаментальной части большого объединения. Поскольку в теориях большого объединения можно также достичь максимального смешивания, то возникает вопрос: как отличить приближение лептонной симметрии от общего

кварк-лептонного смешивания? Для ответа на этот вопрос расширим обсуждаемую симметрию на три нейтрино:

$$M_\nu = \frac{\sqrt{\Delta m_A^2}}{2} \begin{pmatrix} c\varepsilon & d\varepsilon & b\varepsilon \\ d\varepsilon & 1 + a\varepsilon & -1 \\ b\varepsilon & -1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{153}$$

Заметим, что если $a = 1$ и $b = d$, то эта матрица имеет $\mu - \tau$-симметрию и приводит к большому смешиванию. Кроме того, $\theta_{13} = 0$. Однако, если 1) $a \neq 1$ или 2) $b \neq d$, то $\theta_{13} \neq 0$ и $\theta_{13} \simeq \Delta m_0^2/(\Delta m_A^2)$ в первом случае и $\theta_{13} \simeq \sqrt{\Delta m_0^2/\Delta m_A^2}$ во втором случае.

При динамическом сценарии, основанном на теории большого объединения, $a \neq 1$ и $b \neq d$, поэтому следует ожидать, что $\theta_{13} \geq \sqrt{\Delta m_0^2/\Delta m_A^2}$. Это соотношение может быть проверено в следующем поколении нейтринных экспериментов.

6.17. Обобщенная иерархия, $L_e - L_\mu - L_\tau$ и большое солнечное смешивание

Другой способ понять большое смешивание — предположить $L_e - L_\mu - L_\tau$-симметрию для нейтрино. Эта симметрия ведет к обращенной иерархии масс нейтрино ($m_1 \simeq m_2 \gg m_3$), т. е. может быть экспериментально проверена. Действительно, рассмотрим массовую матрицу

$$M_\nu = m_0 \begin{pmatrix} \varepsilon & c & s \\ c & \varepsilon & \varepsilon \\ s & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad c = \cos\theta_A, \quad s = \sin\theta_A. \tag{154}$$

Эта матрица содержит углы смешивания, согласующиеся с экспериментальными данными. При этом два собственных массовых состояния, «ответственных» за осцилляции солнечных нейтрино, практически вырождены по массе, а масса третьего нейтрино гораздо меньше и могла бы быть равной нулю. В пределе $\varepsilon \to 0$ эта матрица имеет $L_e - L_\mu - L_\tau$-симметрию. Поэтому можно надеяться, что если обращенная иерархия масс нейтрино подтвердится, то это будет проявлением новой лептонной симметрии $L_e - L_\mu - L_\tau$ вне стандартной модели.

6.18. $SO(10)$ большое объединение и смешивание нейтрино

Рассмотрим в качестве модели большого объединения модель, основанную на группе симметрии $SO(10)$, и обсудим в ней проблему масс и смешивания нейтрино.

Заметим, что $SO(10)$ содержит 16-мерное спинорное представление, состоящее из 15-ти фермионов стандартной модели плюс правое нейтрино, преобразующееся относительно подгруппы $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C$ следующим образом

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \nu \\ d_1 & d_2 & d_3 & e \end{pmatrix}. \tag{155}$$

Можно выбрать три таких спинора для фермионов трех поколений. Присутствие подгруппы Пати–Салама $SU(4)_C$ устанавливает соотношения между нейтринными

и кварковыми константами связи, уменьшая число параметров по сравнению с обычной формулой see-saw механизма. Кроме того, $SO(10)$ содержит $B-L$-симметрию как калибровочную симметрию. Так как масса правого нейтрино нарушает $B-L$-симметрию, она ограничена масштабом большого объединения. Для того чтобы see-saw механизм заработал, нужно нарушить $B-L$-симметрию. В суперсимметричной группе $SO(10)$ $B-L$-симметрию можно нарушить путем введения: 1) 16 хиггсовских полей; 2) 126 хиггсовских полей.

Если $B-L$-симметрия нарушена за счет хиггсовского поля, относящегося к 16-ти мерному хиггсовскому полю (обозначаемому ψ_H), то поле, приобретающее ненулевое вакуумное среднее, имеет квантовые числа ν_R, т. е. $B-L$-симметрия нарушается на одну единицу. Если вспомним определение R-четности: $R_p = (-1)^{3(B-L)+2S}$, то увидим, что $R_p = -1$. Это означает, что эффективная минимальная суперсимметричная стандартная модель (MSSM) на масштабах, меньших масштаба большого объединения, нарушает R-четность.

Чтобы увидеть, насколько «опасными» могут быть эти операторы, заметим, что операторы высших размерностей (например, $\psi\psi\psi_H\psi_H$) индуцируют нарушение R-четности в эффективной MSSM при низких энергиях, а также большое нарушение лептонных и барионных чисел и приводит ко времени жизни протона $\tau_p \leq$ сек.

Кроме того, в этом классе теории масса правого нейтрино возникает за счет операторов $\lambda\psi\psi\psi_H\psi_H/M_{\text{Pl}}$. Чтобы получить $M_R \sim 10^{14}$ ГэВ, нужно иметь $\lambda \sim 1$. Однако известно, что подобные операторы размерности 5 $\lambda'\psi\psi\psi\psi/M_{\text{Pl}}$ противоречат времени жизни протона вплоть до значений $\lambda' \sim 10^{-6}$. Естественно возникает вопрос: почему некоторые операторы имеют коэффициент ~ 1, а другие — коэффициент $\sim 10^{-6}$? Если нарушать $B-L$-симметрию 126-мерным хиггсовским полем, то этих проблем не возникает.

Чтобы увидеть это, отметим, что те члены 126-плета, которые приобретают ненулевые вакуумные средние, имеют $B-L=2$, т. е. сохраняют R-четность как симметрию низкоэнергетического лагранжиана. В этом случае существует стабильная «скрытая» материя. Кроме того, все фермионные массы (включая правые нейтрино) возникают за счет операторов размерности четыре.

Любая теория с асимптотической симметрией четности приводит ко II-му типу see-saw формулы. Оказывается, что если $B-L$-симметрия нарушена 16 хиггсовскими полями, то первый член во II-м типе see-saw (эффективный триплет вакуумных средних) становится очень малым по сравнению с I-м типом. С другой стороны, если $B-L$-симметрия нарушена 126 полем, то первый член во II-м типе see-saw формулы не обязательно мал и может, в принципе, доминировать в see-saw формуле. Ниже мы обсудим этот тип модели.

В этой модели только два хиггсовских мультиплета дают вклад в фермионные массы: один 10-плет и один 126-плет. Уникальное свойство 126-плета состоит в том, что он не только нарушает $B-L$-симметрию, и, следовательно, формирует массы правых нейтрино, но и дает вклады в фермионные массы, поскольку содержит MSSM дублеты, которые смешиваются с 10-мерными мультиплетами и «выживают» на масштабе MSSM. Это обстоятельство позволяет значительно сократить число произвольных параметров. В этой модели имеется только два типа матриц юкавских констант связи: а) h для 10-плета хиггсов; б) f для 126-плета хиггсов. Для группы $SO(10)$ юкавские константы, входящие в 10-плет и 126-плет хиггсовских представлений, симметричны.

Поэтому если предположить, что CP-нарушение возникает за счет других секторов теории (например, масс суперсимметричных партнеров кварков), и работать в базисе, в котором одна из матриц юкавских констант связи диагональна, то имеется всего лишь девять параметров. Отметим, что (2, 2, 15)-субмультиплет

126-плета имеет пару дублетов стандартной модели, которые вносят вклад в массы заряженных фермионов. В $SO(10)$ 126-плет содержит двух партнеров по четности хиггсовского субмультиплета (обозначаемых $\Delta_{L,R}$), которые связаны с $\nu_L\nu_L$ и $N_R N_R$ соответственно, и после спонтанного нарушения симметрии приводящих ко II-му типу see-saw формулы для нейтрино.

6.19. Максимальное смешивание нейтрино для II-го типа see-saw

Для того чтобы увидеть, как II-й тип see-saw вызывает большое смешивание нейтрино, заметим, что в определенных областях параметров модели, вторая матрица во II-м типе see-saw формулы может быть гораздо меньше, чем первый член. Это может произойти тогда, когда масштаб $B-L$-нарушения гораздо больше 10^{16} ГэВ. Когда это происходит, возникает правило сумм

$$M_\nu = a(M_l - M_d). \tag{156}$$

Это основное уравнение для обсуждения масс нейтрино и смешивания. Используя это соотношение, можно получить большие углы смешивания для двух и трех поколений.

Рассмотрим сначала случай двух поколений. Матрицы $M_{l,d}$ для второго и третьего поколений:

$$\begin{aligned} M_l &\simeq m_\tau \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_d &\simeq m_b \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{157}$$

где $\lambda \simeq 0{,}22$ (угол Кабиббо).

Как хорошо известно, в суперсимметричных теориях, когда низкоэнергетические кварковые и лептонные массы экстраполируются на масштаб большого объединения, то вблизи этой точки $m_b \simeq m_\tau$. Как видно из правил сумм (156) для нейтринных масс, имеет место сокращение всех слагаемых $\sim \lambda^2$, что естественно дает большие углы атмосферного смешивания. Отметим, что для этих целей нет необходимости предполагать какую-либо дополнительную симметрию.

В случае трех поколений нужно снова показать $b-\tau$-сходимость масс на масштабе большого объединения и объяснить большой солнечный угол θ_{12} и малый θ_{13}. Для того, чтобы это увидеть, заметим, что в базисе, в котором массовая матрица d-кварка диагональна, все эффекты кваркового смешивания содержатся в массовой матрице u-кварка, $M_u = U^T_{CKM} M^d_u U_{CKM}$.

В параметризации Вольфенштейна

$$M_d \simeq m_b \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & \lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{158}$$

и M_l и M_d имеют одинаковую структуру. В соотношении (158) матричные элементы определены по порядку величины. При экстраполяции масс кварков на масштаб большого объединения $m_b - m_\tau \simeq m_\tau\lambda^2$, и нейтринная массовая матрица

$M_\nu = c(M_d - M_l)$ принимает следующую форму:

$$M_\nu = c(M_d - M_l) \simeq m_0 \begin{pmatrix} \lambda^4 & \lambda^5 & \lambda^3 \\ \lambda^5 & \lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{159}$$

Из структуры этой матрицы видно, что и θ_{12} (солнечный угол) и θ_{23} (атмосферный угол) велики, а угол $\theta_{13} \sim \lambda$.

6.20. Существование стерильных нейтрино в природе

Пока нельзя привести экспериментальные данные, которые бы отвергали существование одного или нескольких стерильных нейтрино в природе. A priori можно было бы ожидать, что они имеют массу порядка массы Планка. Однако стерильные нейтрино могут быть и легкими. Как может возникнуть малая масса у стерильных нейтрино?

Эту проблему решает модель зеркальной Вселенной, которая постулирует наряду с частицами и взаимодействиями стандартной модели, существование зеркальных частиц и взаимодействий. Мы не видим зеркальные частицы и соответствующие взаимодействия, поскольку они не связаны с обычными частицами и взаимодействиями. Между «обычным» и зеркальным мирами могли бы существовать только гравитационные взаимодействия.

В этой модели имеется аналог нейтрино $\nu_{e,\mu,\tau}$ в зеркальном секторе $(\nu'_{e,\mu,\tau})$. Они и играют роль стерильных нейтрино. Ясно, что безотносительно к конкретному механизму, обеспечивающему легкость «обычных» нейтрино, тот же механизм будет придавать массу стерильным нейтрино. В следующей таблице обозначены частицы видимого сектора и сектора зеркальных частиц.

Видимый сектор $\boldsymbol{SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$	**Зеркальный сектор** $\boldsymbol{SU(3)'_C \times SU(2)'_L \times U(1)'_Y}$
W, Z, γ, глюоны	W', Z', γ', глюоны$'$
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}$
$u_R, \quad d_R$	$u'_R, \quad d'_R$
$\begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu'_L \\ l'_L \end{pmatrix}$
$l_R, \quad N_R$	$l'_R, \quad N'_R$

За последние годы проведены важные эксперименты, существенно расширившие наши представления о массах и смешивании нейтрино. Эти данные определяют направления развития «новой физики» вне рамок стандартной модели. Что касается теоретических идей, то see-saw механизм генерации нейтринных масс рассматривается как первый кандидат не только из-за его простоты, но и очевидной привлекательности. Возможно, что этот механизм есть проявление физики вне стандартной модели, например, кварк-лептонной $SU(4)_C$-симметрии или большого объединения.

6.21. Заключение

В 60-х и 70-х годах прошлого века, когда были предложены идеи смешивания нейтрино и осцилляций, считалось, что нейтрино — безмассовые частицы. С точки зрения современной физики, представляется вполне естественным наличие у нейтрино масс. Загадочной остается чрезвычайная малость нейтринных масс. Наиболее естественный see-saw механизм малости масс нейтрино требует нарушения полного лептонного числа на больших масштабах и майорановского нейтрино.

Нейтринные осцилляции очень чувствительны к квадратам разностей масс нейтрино, однако не дают ответа о природе (дираковской или майорановской) нейтрино. Майорановская природа нейтрино может быть установлена только в процессах, в которых полное лептонное число не сохраняется. Но стандартные слабые взаимодействия «устроены» так, что вероятности подобных процессов сильно подавлены. Исследования безнейтринного двойного β-распада четно-четных ядер наиболее чувствительны к майорановской природе нейтрино. Наблюдение $\beta\beta0\nu$-распада было бы прямым доказательством майорановской природы нейтрино.

Если нейтрино являются майорановскими частицами, матрица смешивания нейтрино содержит дополнительные (по отношению к дираковскому случаю) CP-фазы (две для смешивания трех сортов нейтрино). Эффект этих фаз должен проявляться в $\beta\beta0\nu$-распаде. К сожалению, анализ $\beta\beta0\nu$-экспериментов осложняется отсутствием надежного знания ядерных матричных элементов. Будущие прецизионные эксперименты, как и теоретические успехи в этой области, призваны прояснить природу нейтрино.

Приложение. Потенциалы взаимодействия нейтрино с веществом

Вакуумный гамильтониан, описывающий распространение нейтрино определенного сорта, изменяется в присутствии вещества. Это можно обнаружить, рассматривая вклады в энергию за счет рассеяния на таких составляющих, как электроны и нейтроны.

Допустим, что собственные состояния слабых взаимодействий, соответствующие определенным ароматам, связаны с собственными массовыми состояниями следующим преобразованием

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где U — матрица смешивания

$$U = U_{23}U_{13}U_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

и $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, θ_{ij} — углы смешивания нейтринных состояний. Фаза δ_{CP} — CP-нарушающая фаза, принимающая значения из интервала $[0, 2\pi]$. Если $\delta_{CP} \in \{0, \pi\}$, то CP-инвариантность сохраняется, если же $\delta_{CP} \in \{\pi/2, 3/2\pi\}$, CP-нарушение максимально. Примем далее для наших целей $\delta_{CP} = 0$.

Эволюция в вакууме массовых собственных состояний $\psi^M(x)$ описывается уравнением Шредингера

$$i\frac{d}{dt}\psi^M(x) = H_0^M \psi^M(x), \tag{3}$$

где

$$H_0^M = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причем E_i, $i = 1, 2, 3$ — собственные значения энергий этих состояний.

Для перехода в пространство ароматов, осуществим преобразование $H_0 = UH_0^M U^{-1}$, где U — матрица смешивания (2).

Когда нейтрино распространяется в веществе, нужно учесть рассеяние нейтрино на частицах вещества, т. е. записать гамильтониан в виде

$$H = H_0 + H_I, \tag{5}$$

$$H_1 = H_Z^n + H_Z^p + H_Z^e + H_W^e =$$
$$= \begin{pmatrix} V_Z^n & 0 & 0 \\ 0 & V_Z^n & 0 \\ 0 & 0 & V_Z^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_Z^p & 0 & 0 \\ 0 & V_Z^p & 0 \\ 0 & 0 & V_Z^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_Z^e & 0 & 0 \\ 0 & V_Z^e & 0 \\ 0 & 0 & V_Z^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_W^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В этом выражении индексы указывают, какой калибровочный бозон участвует во взаимодействии, т. е. характеризуют нейтральные и заряженные токи. Например, V_Z^e — эффективный потенциал взаимодействия с электронами за счет обмена Z-бозоном. Заметим, что учитываются лишь потенциалы V_Z^n, V_Z^p, V_Z^e, V_W^e, поскольку концентрация μ и τ в веществе Земли практически равна нулю.

Для нахождения потенциалов взаимодействия нейтрино с веществом Земли, запишем следующие эффективные гамильтонианы

$$\begin{aligned} H_W^{\text{eff}} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_{W\mu} J_W^{\mu+}, \\ H_Z^{\text{eff}} &= \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J_Z^{\mu} J_{Z\mu}, \end{aligned} \tag{7}$$

где фермиевская константа $G_F = \sqrt{2}g^2/(8m_W^2)$ и токи

$$\begin{aligned} J_W^{\mu} &= \sum_l \left[\overline{l}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu_l + \overline{d}_{\theta}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)u\right], \\ J_Z^{\mu} &= \frac{1}{2}\sum_i \overline{\psi}_i\gamma^{\mu}\left[I_i^3(1-\gamma_5) - 2Q_i\sin^2\theta_W\right]\psi_i, \end{aligned} \tag{8}$$

причем $i = (l, \nu_l, u, d)$, I_i^3 — изоспин частицы, Q_i — электрический заряд (в единицах e), $d_{\theta} = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$, где $\cos\theta_C \simeq 0{,}98$ — угол Кабиббо.

1. Нахождение потенциала V_W^e. Этот потенциал имеет следующую структуру:

$$V_W^e = \left\langle \nu_e(p_1,s_1)e(p_2,s_2)|H_W|\nu_e(p_1,s_1)e(p_2,s_2)\right\rangle, \tag{9}$$

где H_W — вклад в гамильтониан от рассеяния на электронах, осуществляемого посредством заряженного тока (индекс «eff» для простоты отсутствует). Поскольку рассматривается упругое рассеяние, состояния нейтрино и электрона, как видно из (9), не меняются. Плотность эффективного гамильтониана для $\nu_e e$ рассеяния:

$$H_W(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\overline{e}(x)\gamma^{\beta}(1-\gamma_5)\nu_e(x)\right]\left[\overline{\nu}_e(x)\gamma_{\beta}(1-\gamma_5)e(x)\right]. \tag{10}$$

Важно подчеркнуть, что эффективный гамильтониан нельзя получить простым интегрированием плотности гамильтониана (10). Дело в том, что следует учесть распределение электронов среды по энергиям, включив фермиевскую функцию $f(E_e,T)$ с нормировкой $\int f(E_e,T)d\vec{p}_e = 1$. Во-вторых, поскольку неизвестна поляризация электрона, следует усреднить по спинам $(1/2)\sum\limits_s$, т. е. выражение (10) следует записать в виде

$$H_W(x) = \int f(E_e,T)\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\sum_{s_2}\left[\overline{e}(x)\gamma^{\beta}(1-\gamma_5)\nu_e(x)\right]\left[\overline{\nu}_e(x)\gamma_{\beta}(1-\gamma_5)e(x)\right]d\vec{p}_2. \tag{11}$$

Поскольку электроны с $(p,s) = (p_2,s_2)$ дают вклад в выражение (9), получим

$$\begin{aligned} &\left[\overline{e}(x)\gamma^{\beta}(1-\gamma_5)\nu_e(x)\right]\left[\overline{\nu}_e(x)\gamma_{\beta}(1-\gamma_5)e(x)\right]\left[\nu_e(p_1,s_1)e(p_2,s_2)\right] = \\ &\quad = \frac{1}{2VE_2(p_2)}\left[a_{s_2}^+(\vec{p}_2)a_{s_2}(\vec{p}_2)\overline{u}_{s_2}(p_2)\gamma^{\beta}(1-\gamma_5)\nu_e(x)\right] \times \\ &\quad\quad \times \left[\overline{\nu}_e(x)\gamma_{\beta}(1-\gamma_5)u_{s_2}(p_2)\right]\left[\nu_e(p_1,s_1)e(p_2,s_2)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Вводя числовой оператор $\text{Num}_{s_2}(\vec{p}_2) = a_{s_2}^+(\vec{p}_2)a_{s_2}(\vec{p}_2)$ в (12) и подставив в (9), получим

$$\begin{aligned} V_W^e = \langle\nu_e(p_1,s_1)e(p_2,s_2)|\frac{G_F}{4\sqrt{2}V}\int\int f(E_e,T)\sum_{s_2}\frac{\text{Num}_{s_2}(\vec{p}_2)}{E_2(\vec{p}_2)}\left[\overline{u}_{s_2}(p_2)\gamma^{\beta}(1-\gamma_5)\nu_e(x)\right] \times \\ \times \left[\overline{\nu}_e(x)\gamma_{\beta}(1-\gamma_5)u_{s_2}(p_2)\right]dx\,d\vec{p}_2|\nu_e(p_1,s_1)e(p_2,s_2)\rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

В этом выражении $\nu_e(x)$ и $\overline{\nu}_e(x)$ символы относятся к вторично-квантованным полям

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{s,\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_p}}\left[a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + b_s^+(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}\right];\\ \overline{\psi}(x) &= \sum_{s,\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_p}}\left[b_s(\vec{p})\overline{v}_s(\vec{p})e^{-ipx} + a_s^+(\vec{p})\overline{u}_s(\vec{p})e^{ipx}\right],\end{aligned} \tag{14}$$

где ψ — лептон или кварк. С другой стороны, вектора состояний $|\nu_e(p_i, s_i)\rangle$, $i = 1, 2$ — представления нейтрино с 4-импульсом p_i и спином s_i.

Для простоты предположим, что вещество изотропно и содержит равное число электронов со спинами «вверх» и «вниз». Тогда

$$\begin{aligned}V_W^e &= \left\langle \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\right| \frac{G_F}{4\sqrt{2}} \int\int \frac{f(E_e, T)N_e(\vec{p}_2)}{E_e(\vec{p}_2)} \sum_{s_2} \left[\overline{u}_{s_2}(p_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)\nu_e(x)\right] \times\\ &\times \left[\overline{\nu}_e(x)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_{s_2}(p_2)\right] d\vec{x}d\vec{p}_2 |\nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\rangle = \langle \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)| \frac{G_F}{4\sqrt{2}} \times\\ &\times \int\int \frac{f(E_e, T)}{E_e(\vec{p}_2)} N_e(\vec{p}_2)\overline{\nu}_e(x)\gamma_\beta(1-\gamma_5)\nu_e(x) \sum_{s_2} \left[\overline{u}_{s_2}(p_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_{s_2}(p_2)\right] dx\, d\vec{p}_2|\\ &\qquad \left|\nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\right\rangle.\end{aligned} \tag{15}$$

Если использовать тождество Фирца для перестановки ν_e и e спиноров, то оставшаяся сумма

$$\sum_{s_2} \left[\overline{u}_{s_2}(p_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_{s_2}(p_2)\right] = \operatorname{tr}\left\{(\not{p}_2 + m_e)\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right\} = p_{2\alpha} \operatorname{tr}\left\{\gamma^\alpha\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right\} = 4p_2^\beta. \tag{16}$$

Тогда эффективный потенциал

$$\begin{aligned}V_W^e &= \langle \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)| \left| \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int\int \frac{f(E_e, T)}{E_e(\vec{p}_2)} N_e(\vec{p}_2)\overline{\nu}_e(x)\gamma_\beta(1-\gamma_5)\nu_e(x)p_2^\beta dx\, d\vec{p}_2 \right|\\ &|\nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\rangle = \langle \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)| \left| \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \int \overline{\nu}_e(x)\gamma_0(1-\gamma_5)\nu_e(x)d\vec{x} \right|\\ &\qquad |\nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\rangle,\end{aligned} \tag{17}$$

где использовано условие изотропности $\int \vec{p}_2 f(E_e, T)d\vec{p}_2 = 0$ и полная электронная плотность $N_e = \int f(E_e, T)N_e(\vec{p}_2) = N_e$. Остается лишь интегрирование по $\vec{x}$, т. е.

$$\begin{aligned}V_W^e &= \left\langle \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\right| \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \int \overline{\nu}_e(x)\gamma_0(1-\gamma_5)\nu_e(x)d\vec{x} \left|\nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\right\rangle =\\ &= \left\langle \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\right| \left| \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \frac{1}{2VE_{\nu_e}} \int \operatorname{tr}\left\{(\not{p}_{\nu_e} + m_{\nu_e})\gamma^0(1-\gamma_5)\right\} a_{s_1}^+(\vec{p}_1)a_{s_1}(\vec{p}_1)d\vec{x} \right|\\ &\qquad |\nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\rangle.\end{aligned} \tag{18}$$

Предполагая нормированность векторов состояний $|\nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\rangle$, из (18) получаем

$$V_W^e = \frac{G_F N_e}{\sqrt{2}} \frac{2}{V} \int d\vec{x} \langle \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2) \,|\, \nu_e(p_1, s_1)e(p_2, s_2)\rangle = \sqrt{2} G_F N_e. \tag{19}$$

Применяя тот же метод вычислений, можно получить и другие потенциалы:

$$V_Z^n = -\frac{G_F N_n}{\sqrt{2}}; \quad V_Z^p = \frac{G_F}{\sqrt{2}}(1 - 4\sin^2\theta_W)N_p;$$
$$V_Z^e = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}(1 - 4\sin^2\theta_W)N_e; \quad V_W^e = \sqrt{2}G_F N_e, \tag{20}$$

где N_e, N_n, N_p — плотности электронов, нейтронов и протонов соответственно. Очевидно, что при $N_e = N_p$ $V_Z^e + V_Z^p = 0$. Потенциалы для взаимодействия антинейтрино отличаются от выражений (20) только знаками.

ГЛАВА 7

CP-НАРУШЕНИЕ

7.1. Введение

В этой главе рассматриваются преобразования частиц и их взаимодействий при зарядовом сопряжении C, переводящем частицу в античастицу, при обращении пространственных осей (P-четность), а также обращении времени (T-четность). Как известно, все взаимодействия, за исключением слабого, инвариантны относительно этих преобразований. Мы не рассматриваем здесь проблему сильного CP-нарушения (см. приложение 4 к главе 2).

Нарушение C- и P-симметрии слабых взаимодействий нашло свое отражение в $V-A$-варианте лагранжиана слабых взаимодействий. Особый интерес к проблеме CP-нарушения возник после экспериментов с K-мезонами Кронина и др. 1964 года. Как обнаружить CP-нарушение? Очевидно, если частица может распадаться на состояния с противоположными CP-четностями, то CP-симметрия в таком распаде нарушается.

Существует два состояния нейтральных каонов, являющихся собственными для лагранжиана сильных взаимодействий: K^0, состоящий из $\overline{s}d$-кварков, и $\overline{K}^0$, состоящий из $s\overline{d}$. Поэтому состояние нейтрального каона должно быть линейной комбинацией этих двух состояний. Преобразование зарядового сопряжения C меняет K^0 на $\overline{K}^0$, а преобразование четности P изменяет на противоположные 3-мерные импульсы частиц. Поэтому преобразование CP, действуя на состояние $K^0(\vec{p})$, преобразует его в состояние $\overline{K}^0(-\vec{p})$. Определим фазу CP-преобразования

$$CP|K^0(\vec{p})\rangle = e^{i\xi}|\overline{K}^0(-\vec{p})\rangle. \tag{1}$$

Фазу ξ иногда называют «ложной» (spurious) фазой CP-преобразования.

Будем рассматривать каоны в системе покоя, опуская зависимость от импульса каона. Состояния

$$|K_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle \pm e^{i\xi}|\overline{K}^0\rangle\big) \tag{2}$$

являются собственными состояниями оператора CP, соответствующими собственным значениям ±1.

Предположим сначала, что CP — точная симметрия полного гамильтониана. Тогда собственные состояния гамильтониана являются собственными CP-состояниями, и они должны распадаться на конечные состояния с теми же собственными значениями CP.

Двухпионные и трехпионные состояния, образующиеся при распаде нейтральных каонов, имеют следующие CP-четности:

$$\begin{aligned} CP|\pi\pi\rangle &= |\pi\pi\rangle, \\ CP|\pi\pi\pi\rangle_0 &= -|\pi\pi\pi\rangle_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где через $|\pi\pi\pi\rangle_0$ обозначено основное состояние трехпионной системы. Следовательно, если предположить сохранение CP, то $|K_+\rangle$ может распадаться только на два пиона (или на некоторое возбужденное состояние трех пионов). В свою очередь, $|K_-\rangle$ не может распадаться на два пиона, однако способен распадаться на трехпионную систему в основном состоянии. Поскольку фазовое пространство для распада на два пиона больше, чем для распада на три пиона (в этом случае масса трех пионов почти равна массе каона), то время жизни $|K_+\rangle$ должно быть меньше времени жизни $|K_-\rangle$. В результате гипотеза CP-сохранения полного гамильтониана позволяет отождествить

$$\begin{aligned} |K_+\rangle &\to |K_S\rangle, \\ |K_-\rangle &\to |K_L\rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

где $K_L(K_S)$ — долгоживущий (короткоживущий) каон.

Экспериментально измеренные времена жизни $\tau_S = (8{,}953 \pm 0{,}006) \cdot 10^{-11}$ с, $\tau_L = (5{,}18 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-8}$ с. Как видно, времена жизни отличаются на три порядка, поэтому пучок каонов, распространяющийся за время $\tau \gg \tau_S$, будет состоять лишь из K_L. При этом K_L должен распадаться на три пиона. Однако эксперименты Кронина и др. показали, что, помимо ожидаемых распадов на три пиона, иногда происходит и распад на два пиона. Так впервые было установлено CP-нарушение. Эти эксперименты относятся к 1964 году, и вплоть до 1999 года считалось, что CP-нарушение связано с каонами. Однако в 1999 году эксперименты BaBar (SLAC) и Belle (KEK) обнаружили CP-нарушение в системе B_d-мезонов.

На рис. 1 показана принципиальная схема наблюдения CP-нарушения в системе B_d-мезонов. Сначала нужно образовать начальное состояние, содержащее B_d-мезон. После этого мезон эволюционирует, распадается, и конечные состояния детектируются.

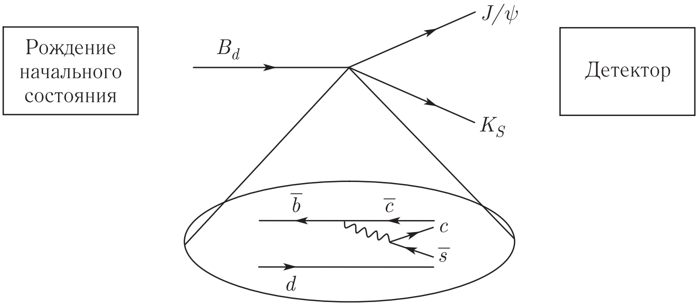


Рис. 1

Из этого рисунка очевидна и проблема интерпретации подобного рода экспериментов: теория формулируется в терминах фундаментальных кварковых полей, а эксперимент имеет дело с адронами. В самом деле, как мы увидим, необходимо знать матричные элементы эффективных операторов кварковых полей между начальными и конечными состояниями, содержащими адроны (адронные матричные элементы):

$$\langle \text{конечное адр. состояние} | O(\text{кварковый оператор}) | \text{начальное адр. состояние} \rangle. \tag{5}$$

Поскольку процесс объединения кварков в адроны происходит на больших расстояниях (малых энергиях), то эти матричные элементы известны плохо. Однако ситуация не столь безнадежна. Существуют распады, которые могут быть интерпре-

тированы в терминах параметров лагранжиана слабых взаимодействий, включающих кварки.

Начнем обсуждение CP-нарушения с описания смешивания нейтральных мезонов.

7.2. Смешивание нейтральных мезонов

7.2.1. Базис ароматов. Будем описывать смешивание нейтрального мезона P^0 с его античастицей $\overline{P}^0$, где $P = K$, D, B_d или B_s. Временная эволюция состояния $|\psi(t)\rangle$, соответствующего $P^0 - \overline{P}^0$, определяется уравнением

$$i\frac{d}{dt}\Big|\psi(t)\rangle = H\psi(t), \tag{6}$$

где H — матрица 2×2, записанная в системе покоя $P^0 - \overline{P}^0$, t — собственное время. Обычно матрицу H разбивают на эрмитову и антиэрмитову части: $H = M - (i/2)\Gamma$, где

$$M = (H + H^+)/2; \quad -i(\Gamma/2) = (H - H^+)/2. \tag{7}$$

Отметим, что M и Γ — эрмитовы.

Базис ароматов $\{|P^0\rangle, |\overline{P}^0\rangle\}$ удовлетворяет обычным соотношениям ортонормированности

$$\langle P^0|\overline{P}^0\rangle = \langle\overline{P}^0|P^0\rangle = 0; \quad \langle P^0|P^0\rangle = \langle\overline{P}^0|\overline{P}^0\rangle = 1. \tag{8}$$

Операторы $|P^0\rangle\langle P^0|$ и $|\overline{P}^0\rangle\langle\overline{P}^0|$ являются проекционными с условиями полноты

$$|P^0\rangle\langle P^0| + |\overline{P}^0\rangle\langle\overline{P}^0| = 1. \tag{9}$$

Тогда эффективный гамильтониан H можно представить в виде:

$$H = |P^0\rangle H_{11}\langle P^0| + |P^0\rangle H_{12}\langle\overline{P}^0| + |\overline{P}^0\rangle H_{21}\langle P^0| + |\overline{P}^0\rangle H_{22}\langle\overline{P}^0| = (|P^0\rangle, |\overline{P}^0\rangle)H\begin{pmatrix}\langle P^0| \\ \langle\overline{P}^0|\end{pmatrix}. \tag{10}$$

При CP-преобразовании

$$H_{12} \equiv \langle P^0|H|\overline{P}^0\rangle \xrightarrow{CP} \langle P^0|(CP)^+(CP)H(CP)^+(CP)|\overline{P}^0\rangle = \\ = \langle\overline{P}^0|e^{-i\xi}H_{CP}e^{-i\xi}|P^0\rangle = e^{-2i\xi}\langle\overline{P}^0|H_{CP}|P^0\rangle, \tag{11}$$

$$H_{11} \equiv \langle P^0|H|P^0\rangle \xrightarrow{CP} \langle P^0|(CP)^+(CP)H(CP)^+(CP)|P^0\rangle = \langle\overline{P}^0|H_{CP}|\overline{P}^0\rangle, \tag{12}$$

где

$$H_{CP} = (CP)H(CP)^+. \tag{13}$$

Поэтому, если CP сохраняется, то $H = H_{CP}$ и

$$H_{12} = e^{-2i\xi}H_{21}, \quad H_{11} = H_{22}. \tag{14}$$

Поскольку ξ как фаза не имеет физической значимости, то и фазы H_{12}, H_{21} тоже не важны. Поэтому $|H_{12}| = |H_{21}|$. Подобное же исследование других дискретных симметрий позволяет утверждать, что при CPT-инвариантности

$$H_{11} = H_{22}, \tag{15.1}$$

при T-инвариантности

$$|H_{12}| = |H_{21}| \tag{15.2}$$

и при CP-инвариантности

$$H_{11} = H_{22}, \quad |H_{12}| = |H_{21}|. \tag{15.3}$$

Если же эти симметрии нарушены, матрица H — произвольна.

Будем предполагать, что CPT сохраняется, и $H_{11} = H_{22}$. Тогда CP-нарушающие наблюдаемые в системе $P^0 - \overline{P}^0$ должны быть пропорциональны величине

$$\delta \equiv \frac{|H_{12}| - |H_{21}|}{|H_{12}| + |H_{21}|}. \tag{16}$$

7.2.2. Массовый базис. Эволюция во времени в выражении (6) становится тривиальной в массовом базисе, диагонализирующем гамильтониан H. Обозначим комплексные собственные значения H:

$$\mu_H = m_H - \frac{i}{2}\Gamma_H, \quad \mu_L = m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L. \tag{17}$$

Соответствующие собственные вектора

$$\begin{pmatrix} |P_H\rangle \\ |P_L\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |P^0\rangle \\ |\overline{P}^0\rangle \end{pmatrix} = X^T \begin{pmatrix} |P^0\rangle \\ |\overline{P}^0\rangle \end{pmatrix}. \tag{18}$$

В (17) и (18) индексы H и L относятся к «тяжелым» и «легким» собственным значениям, т. е. величина $\Delta m = m_H - m_L > 0$. Удобно также определить

$$m - i\frac{\Gamma}{2} \equiv \mu \equiv \frac{\mu_H + \mu_L}{2}, \tag{19}$$

$$\Delta m - i\frac{\Delta\Gamma}{2} \equiv \Delta\mu \equiv \mu_H - \mu_L. \tag{20}$$

Соотношение между этими параметрами и матричными элементами H, записанными в базисе ароматов получается путем диагонализации

$$X^{-1} H X = \begin{pmatrix} \mu_H & 0 \\ 0 & \mu_L \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где

$$X^{-1} = \frac{1}{2pq} \begin{pmatrix} q & -p \\ q & p \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Поэтому

$$\mu = H_{11} = H_{22}, \tag{23}$$

$$\Delta\mu = 2\sqrt{H_{12} H_{21}}; \tag{24}$$

$$\frac{q}{p} = -\sqrt{\frac{H_{21}}{H_{12}}} = -\frac{2H_{21}}{\Delta\mu}. \tag{25}$$

С другой стороны, из соотношения (21) имеем

$$H = X \begin{pmatrix} \mu_H & 0 \\ 0 & \mu_L \end{pmatrix} X^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & -\dfrac{\Delta\mu}{2}\dfrac{p}{q} \\ -\dfrac{\Delta\mu}{2}\dfrac{q}{p} & \mu \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Последнее соотношение интересно тем, что оно выражает величины H_{ij}, вычисляемые в теории, через физические наблюдаемые. Заметим, что фазы H_{12}, следовательно, и q/p — нефизические, их можно изменять, переопределяя $|P^0\rangle$ и $|\overline{P}^0\rangle$.

Выражение (24) можно привести к более известному виду, возведя его в квадрат и выделив вещественную и мнимую части:

$$(\Delta m)^2 - \frac{1}{4}(\Delta\Gamma)^2 = 4|M_{12}|^2 - |\Gamma_{12}|^2; \quad (\Delta m)(\Delta\Gamma) = 4\,\mathrm{Re}(M_{12}^*\Gamma_{12}). \tag{27}$$

Тогда величина δ (16) имеет следующий вид:

$$\delta = \frac{|p/q| - |q/p|}{|p/q| + |q/p|} = \frac{2\,\mathrm{Im}(M_{12}^*\Gamma_{12})}{(\Delta m)^2 + |\Gamma_{12}|^2}. \tag{28}$$

Для нейтрального сектора каонов $\Delta m_K \simeq -(1/2)\Delta\Gamma$. С другой стороны, $\delta_K \simeq 10^{-3}$. Поэтому

$$\Delta m \simeq 2|M_{12}| \simeq -\frac{1}{2}\Delta\Gamma \simeq |\Gamma_{12}|, \tag{29}$$

$$\delta_K \simeq \frac{\mathrm{Im}(M_{12}^*\Gamma_{12}/|\Gamma_{12}|)}{\Delta m} \simeq \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right). \tag{30}$$

7.2.3. Смешивание в нейтральных B_d- и B_s-системах. Как будет показано ниже, для B_d- и B_s-систем $|\Gamma_{12}| \ll |M_{12}|$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Delta m_B &= 2|M_{12}|; \\ \Delta\Gamma_B &= 2\,\mathrm{Re}\,(M_{12}^*\Gamma_{12})/|M_{12}|; \\ \frac{q}{p} &= -\frac{M_{12}^*}{|M_{12}|}\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)\right], \end{aligned} \tag{31}$$

причем последнее выражение получено путем разложения по величине $|\Gamma_{12}/M_{21}|$. Тогда величина δ, определенная в выражении (28):

$$\delta_B \simeq \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right). \tag{32}$$

Как показать, что $|\Gamma_{12}| \ll |M_{12}|$? Начнем с соотношения

$$\left|\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right| = 2\frac{|\Gamma_{12}|/\Gamma}{\Delta m/\Gamma}. \tag{33}$$

Величина

$$\Gamma_{12} = \sum_f \langle f|T|P^0\rangle\langle f|T|\overline{P}^0\rangle \tag{34}$$

определяется древесными диаграммами стандартной модели и включает общие каналы для P^0 и $\overline{P}^0$. В системе B_d такие каналы СКМ-подавлены, их бренчинг $\leq 10^{-3}$. Кроме того, эти каналы входят в (34) с противоположными знаками. Поэтому следует ожидать $|\Gamma_{12}|/\Gamma < 10^{-2}$, $|\delta_{B_d}| < O(10^{-2})$.

Ситуация в B_s-системе другая, так как доминирующим общим каналом распада является $b \to c\bar{c}s$. Следовательно, в B_s-системах соотношение $|\Gamma_{12}/\Gamma|$ гораздо больше, чем в B_d-системах. Из анализа экспериментальных данных следует

$$|\Gamma_{12}/\Gamma| = \frac{1}{2}(0{,}16^{+0{,}11}_{-0{,}09}). \tag{35}$$

Приведенные выше аргументы достаточно общие, справедливые для различных физических моделей. Что касается фаз δ_{B_d} и δ_{B_s}, то вычисления в рамках стандартной модели дают следующие оценки: $\delta_{B_d} \simeq -2{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\delta_{B_s} \simeq 0{,}1 \cdot 10^{-4}$.

Таким образом, величину $\Delta\Gamma$ при рассмотрении B_d-систем можно положить равной нулю, однако ее необходимо учитывать при эволюции B_s-систем.

7.2.4. Эволюция во времени. Временная эволюция тривиальна в массовом базисе

$$|P_H(t)\rangle = e^{-i\mu_H t}|P_H\rangle; \quad |P_L(t)\rangle = e^{-i\mu_L t}|P_L\rangle. \tag{36}$$

Как записать эволюцию в базисе ароматов? Предположим, что в момент $t = 0$ состояние P^0. Используя (18), начальное состояние представим в виде

$$|P^0\rangle = \frac{1}{2p}\big(|P_H\rangle + |P_L\rangle\big). \tag{37}$$

С учетом (36) получаем

$$|P^0(t)\rangle = \frac{1}{2p}\big(e^{-i\mu_H t}|P_H\rangle + e^{-i\mu_L t}|P_L\rangle\big). \tag{38}$$

Снова применяя выражение (18), получаем в базисе ароматов:

$$|P^0(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{-i\mu_H t} + e^{-i\mu_L t})|P^0\rangle - \frac{q}{p}\frac{1}{2}(e^{-i\mu_H t} - e^{-i\mu_L t})|\overline{P}^0\rangle. \tag{39}$$

Если ввести функции

$$g_\pm(t) \equiv \pm\frac{1}{2}(e^{-i\mu_H t} \pm e^{-i\mu_L t}) = e^{-imt}e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \begin{cases} \cos(\Delta\mu t/2) \\ i\sin(\Delta\mu t/2) \end{cases}, \tag{40}$$

то

$$\begin{aligned} |P^0(t)\rangle &= g_+(t)|P^0\rangle + \frac{q}{p}g_-(t)|\overline{P}^0\rangle; \\ |\overline{P}^0(t)\rangle &= \frac{p}{q}g_-(t)|P^0\rangle + g_+(t)|\overline{P}^0\rangle \end{aligned} \tag{41}$$

описывают временную эволюцию состояний.

7.3. Феноменология рождения и распада нейтральных мезонов

7.3.1. Определение существенных параметров. Рассмотрим цепочку рождения нейтральных мезонов $i \to P + X \to f + X$, изображенную на рис. 2. В начальном состоянии рождается мезон P, эволюционирует во времени и распадается в конечное состояние f.

Амплитуда этой распадной цепочки (и ее CP-сопряженная амплитуда) зависят от амплитуд начальных процессов

$$\begin{aligned} A_{i\to P^0} &\equiv \langle P^0|T|i\rangle, \quad A_{\bar{i}\to P^0} \equiv \langle P^0|T|i\rangle, \\ A_{i\to \overline{P}0} &\equiv \langle \overline{P}^0|T|i\rangle, \quad A_{\bar{i}\to \overline{P}0} \equiv \langle \overline{P}^0|T|i\rangle \end{aligned} \tag{42}$$

и параметров, описывающих временную эволюцию нейтральной P-системы, а также от амплитуд распада в конечное состояние:

$$A_f \equiv \langle f|T|P^0\rangle, \quad A_{\overline{f}} \equiv \langle \overline{f}|T|P^0\rangle, \quad \overline{A}_f \equiv \langle f|T|\overline{P}^0\rangle, \quad \overline{A}_{\overline{f}} \equiv \langle \overline{f}|T|\overline{P}^0\rangle. \tag{43}$$

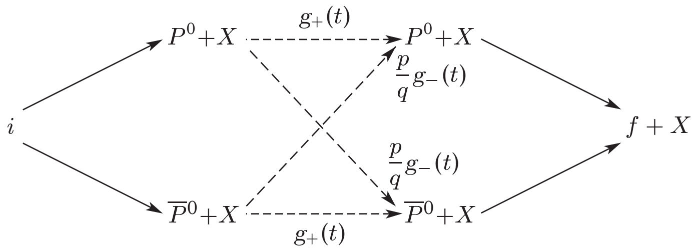


Рис. 2

Как уже отмечалось, все состояния можно переопределить путем произвольного фазового преобразования. Очевидно, что величины переходных амплитуд и величины $|q/p|$ инвариантны относительно этих преобразований. Однако имеются и величины, которые инварианты относительно фазовых преобразований, но возникают за счет «интерференции» между параметрами, описывающими смешивание и параметрами, описывающими переходы:

$$\lambda_f = \frac{q}{p}\frac{A_{\overline{f}}}{A_f}, \quad \lambda_{\overline{f}} = \frac{q}{p}\frac{\overline{A}_{\overline{f}}}{A_{\overline{f}}}, \tag{44}$$

$$\xi_{i\to P} = \frac{A_{i\to \overline{P}0}}{A_{i\to P^0}}\frac{p}{q}, \quad \xi_{\overline{i}\to P} = \frac{A_{\overline{i}\to \overline{P}0}}{A_{\overline{i}\to P^0}}\frac{p}{q}. \tag{45}$$

Параметры (44) описывают интерференцию между смешиванием в $P^0 - \overline{P}^0$ системе и последующим распадом этой системы в конечное $f - \overline{f}$ состояние. Параметры (45) описывают интерференцию между рождением $P^0 - \overline{P}^0$ и смешиванием в этой системе.

7.3.2. Три типа CP-нарушения. Если CP сохраняется, то должны существовать фазы ξ_i, ξ и ξ_f, и собственные значения $\eta_P = \pm 1$, причем

$$\begin{aligned} CP|i\rangle &= e^{i\xi_i}|\overline{i}\rangle, \\ CP|P^0\rangle &= e^{i\xi}|\overline{P}^0\rangle, \\ CP|f\rangle &= e^{i\xi_f}|\overline{f}\rangle, \\ CP|P_H\rangle &= \eta_P|P_H\rangle, \\ CP|P_L\rangle &= -\eta_P|P_L\rangle, \end{aligned} \tag{46}$$

где, как и раньше, $H(L)$ обозначают «тяжелые» («легкие») собственные значения. При этом считается, что $\Delta m > 0$, а знак η_P должен определяться экспериментально. Например, из эксперимента известно, что наиболее тяжелый каон имеет и большее время жизни. Более того, если в смеси нейтральных каонов нет CP-нарушения, то это состояние будет CP-нечетными. Поэтому для каонов $\eta_K = -1$.

С другой стороны, при CP-преобразовании многочастичного промежуточного состояния XP^0:

$$CP|XP^0\rangle = \eta_X e^{i\xi}|\overline{XP}^0\rangle. \tag{47}$$

Здесь η_X включает как CP-трансформационные свойства состояния X, так и орбитальный момент между X и P.

Из (46) и (47) получаем условия, необходимые для CP-инвариантности:

$$\frac{q}{p} = -\eta_P e^{i\xi}, \tag{48}$$

а также

$$\begin{aligned} A_{i\to P^0} &= \eta_X e^{i(\xi_i-\xi)} A_{\bar{i}\to \overline{P}0}, \\ A_{i\to P^0} &= \eta_X e^{i(\xi_i+\xi)} A_{\bar{i}\to P^0}; \\ A_f &= e^{i(\xi-\xi_f)}\overline{A}_{\overline{f}}, \\ A_{\overline{f}} &= e^{i(\xi+\xi_f)}\overline{A}_f. \end{aligned} \tag{49}$$

Поэтому, если CP-симметрия точная, то

$$\left|\frac{q}{p}\right| = 1, \quad |A_{i\to P^0}| = |A_{\bar{i}\to\overline{P}0}|, \quad |A_{i\to\overline{P}0}| = |A_{\bar{i}\to P^0}|, \quad |A_f| = |\overline{A}_{\overline{f}}|, \quad |A_{\overline{f}}| = |\overline{A}_f|. \tag{50}$$

Параметры, описывающие интерференцию в CP-нарушении

$$\lambda_f\lambda_{\overline{f}} = 1; \quad \xi_{i\to P}\xi_{\bar{i}\to P} = 1. \tag{51}$$

Если CP-инвариантность сохраняется, то $\arg\lambda_f + \arg\lambda_{\overline{f}}$ и $\arg\xi_{i\to P} + \arg\xi_{\bar{i}\to P}$ должны обращаться в ноль.

Интересно отметить очень важный частный случай, когда конечное состояние f является собственным CP-состоянием. Тогда $\eta_f = e^{i\xi_f} = \pm 1$, и условия CP-инвариантности

$$|A_f| = |\overline{A}_f|; \quad \lambda_f = \eta_P\eta_f. \tag{52}$$

Таким образом, можно выделить три «обычных» типа CP-нарушения:

1) $|q/p| - 1$ описывает CP-нарушение в смешивании нейтральных мезонных систем;

2) разности $|A_{i\to P^0}| - |A_{\bar{i}\to\overline{P}0}|$ и $|A_{i\to\overline{P}0}| - |A_{\bar{i}\to P^0}|$ с одной стороны, и $|A_f| - |\overline{A}_{\overline{f}}|$ и $|A_{\overline{f}}| - |\overline{A}_f|$ с другой стороны, соответствуют CP-нарушению при рождении нейтральной мезонной системы и при ее распаде;

3) $\arg\lambda_f + \arg\lambda_{\overline{f}}$ является мерой CP-нарушения за счет интерференции между смешиванием в нейтральной мезонной системе и ее последующим распадом в конечные состояния f и $\overline{f}$. Обычно это явление называют «интерференционным CP-нарушением». Если $f = f_{CP}$ есть собственное CP-состояние, то CP-нарушающая переменная $\arg\lambda_f + \arg\lambda_{\overline{f}}$ пропорциональна $\operatorname{Im}\lambda_f$.

7.3.3. Четвертый тип CP-нарушения. При рассмотрении механизма рождения нейтральной мезонной системы возникает новая переменная, описывающая CP-нарушение:

$$\arg\xi_{i\to P} + \arg\xi_{\bar{i}\to P}. \tag{53}$$

Эта величина характеризует CP-нарушение за счет интерференции между рождением нейтральной мезонной системы и смешиванием в этой системе. Этот тип нарушения был обнаружен в 1998 г. при изучении эффектов $D^0 - \overline{D}^0$ смешивания в распадной цепочке:

$$B^\pm \to \{D^0, \overline{D}^0\}K^\pm \to [f]_D K^\pm. \tag{54}$$

Схематично интерференционное CP-нарушение в распаде $B^+ \to DK^+ \to D^0K^+$ показано на рис. 3.

Очевидно, что это новый тип CP-нарушения, не сводящийся к трем типам, описанным в предыдущем подразделе. В самом деле, поскольку B-мезон заряженный, то этот процесс нечувствителен к интерференционному CP-нарушению, характерному для нейтральных B-мезонов.

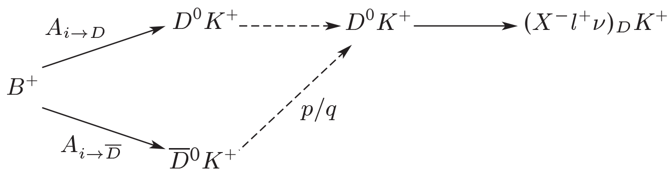


Рис. 3

7.3.4. Распад нейтральной мезонной системы. На время оставим обсуждение механизма рождения нейтральной мезонной системы и сконцентрируемся на изучении зависимости от времени скоростей распада этой системы в конечное состояние f. Итак, рассматриваем распад P^0 и $\overline{P}^0$ в конечное состояние f. Этот распад определяется двумя распадными амплитудами

$$\begin{aligned} A_f &= \langle f|T|P^0\rangle, \\ \overline{A}_f &= \langle f|T|\overline{P}^0\rangle. \end{aligned} \tag{55}$$

Состояние в момент $t = 0$ определим как собственное состояние сильных взаимодействий P^0. Эволюция состояния во времени описывается уравнениями (41), при этом амплитуда распада в конечное состояние f в момент t:

$$A[P^0(t) \to f] = \langle f|T|P^0(t)\rangle = g_+(t)A_f + \frac{q}{p} g_-(t)\overline{A}_f. \tag{56}$$

Аналогично

$$A[\overline{P}^0(t) \to f] = \langle f|T|\overline{P}^0(t)\rangle = \frac{p}{q} g_-(t)A_f + g_+(t)\overline{A}_f. \tag{57}$$

Тогда соответствующие вероятности распадов в CP-сопряженные состояния f и $\overline{f}$:

$$\begin{aligned} \Gamma[P^0(t) \to f] &= |A_f|^2\big\{|g_+(t)|^2 + |\lambda_f|^2|g_-(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big[\lambda_f g_+^*(t)g_-(t)\big]\big\}, \\ \Gamma[P^0(t) \to \overline{f}] &= |\overline{A}_f|^2\left|\frac{p}{q}\right|^2\big\{|g_-(t)|^2 + |\overline{\lambda}_f|^2|g_+(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big[\overline{\lambda}_{\overline{f}} g_+(t)g_-{}^*(t)\big]\big\}, \\ \Gamma[\overline{P}^0(t) \to f] &= |A_f|^2\left|\frac{p}{q}\right|^2\big\{|g_-(t)|^2 + |\lambda_f|^2|g_+(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\lambda_f g_+(t)g_-{}^*(t)]\big\}, \\ \Gamma[\overline{P}^0(t) \to \overline{f}] &= |\overline{A}_f|^2\big\{|g_+(t)|^2 + |\overline{\lambda}_f|^2|g_-(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\overline{\lambda}_f g_+^*(t)g_-(t)]\big\}, \end{aligned} \tag{58}$$

где функции, описывающие временную эволюцию

$$\begin{aligned} |g_\pm(t)|^2 &= \frac{1}{4}\big[e^{-\Gamma_H t} + e^{-\Gamma_L t} \pm 2e^{-\Gamma t}\cos(\Delta m t)\big] = \frac{e^{-\Gamma t}}{2}\left[\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2} \pm \cos(\Delta m t)\right], \\ g_+^*(t)g_-(t) &= \frac{1}{4}\big[e^{-\Gamma_H t} + e^{-\Gamma_L t} + 2ie^{-\Gamma t}\sin\Delta m t\big] = \frac{e^{-\Gamma t}}{2}\left[\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2} + i\sin(\Delta m t)\right]. \end{aligned} \tag{59}$$

Выражения (59), проинтегрированные по времени вероятности, дают вероятность распада, деленную на dt

$$\begin{aligned} G_\pm &= \int_0^\infty |g_\pm(t)|^2 dt = \frac{1}{2\Gamma}\left(\frac{1}{1-y^2} \pm \frac{1}{1+x^2}\right), \\ G_{+-} &= \int_0^\infty g_+^*(t)g_-(t)dt = \frac{1}{2\Gamma}\left(\frac{y}{1-y^2} + \frac{ix}{1+x^2}\right); \quad x = \frac{\Delta m}{\Gamma} \quad \text{и} \quad y = \frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma}. \end{aligned} \tag{60}$$

7.3.5. Распады в состояния с определенным ароматом и CP-нарушение в смешивании. Обозначим через 0 конечное состояние, в которое может распадаться только P^0, и через $\overline{0}$ — его CP-сопряженное состояние, в которое способно распадаться только $\overline{P}^0$. Например, 0 — полулептонное конечное состояние

$$K^0 \to \pi^- l^+ \nu_l \text{или} \quad B_d^0 \to h^- l^+ \nu_l, \tag{61}$$

где h^- — отрицательно заряженный адрон, l^+ — заряженный антилептон (l^+, μ^+, τ^+) и ν_l — соответствующее нейтрино.

Тогда $A_{\overline{0}} \to \langle \overline{0}|T|P^0\rangle$, $\overline{A}_0 \to \langle 0|T|\overline{P}^0\rangle$ и уравнения (58) принимают вид

$$\begin{aligned}
\Gamma[P^0(t) \to 0] &= |A_0|^2 |g_+(t)|^2, \\
\Gamma[P^0(t) \to \overline{0}] &= |\overline{A}_{\overline{0}}|^2 |\frac{q}{p}|^2 |g_-(t)|^2, \\
\Gamma[\overline{P}^0(t) \to 0] &= |A_0|^2 |\frac{p}{q}|^2 |g_-(t)|^2, \\
\Gamma[\overline{P}^0(t) \to \overline{0}] &= |\overline{A}_{\overline{0}}|^2 |g_+(t)|^2.
\end{aligned} \tag{62}$$

Очевидно, что $\Gamma[P^0(t) \to \overline{0}]$ и $\Gamma[\overline{P}^0(t) \to 0]$ равны нулю при $t = 0$, но из-за смешивания нейтральных мезонов отличны от нуля для $t \neq 0$. Критерием нарушения CP-инвариантности является асимметрия

$$\begin{aligned}
A_M = \frac{\Gamma[\overline{P}^0(t) \to 0] - \Gamma[P^0(t) \to \overline{0}]}{\Gamma[\overline{P}^0(t) \to 0] + \Gamma[P^0(t) \to \overline{0}]} &= \frac{|p/q|^2 - |q/p|^2}{|p/q|^2 + |q/p|^2} = \\
&= \frac{2\delta}{1+\delta^2} = \frac{|H_{12}|^2 - |H_{21}|^2}{|H_{12}|^2 + |H_{21}|^2} = \frac{4\,\mathrm{Im}(M_{12}^*\Gamma_{12})}{4|M_{12}|^2 + |\Gamma_{12}|^2},
\end{aligned} \tag{63}$$

где использовано соотношение $|A_0| = |\overline{A}_{\overline{0}}|$. Заметим, что асимметрия A_M не зависит от t и определяет величину δ — характеристику CP-нарушения в смешивании. Поскольку эта асимметрия проявляется в полулептонных распадах (61), ее называют полулептонной асимметрией и обозначают a_{SL}.

В каонных системах асимметрия (с учетом (29)):

$$A_M \simeq \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\Gamma_{12}/M_{12}). \tag{64}$$

При этом в каонной системе нарушение CP может наблюдаться как в распадах $K_L \to \pi\pi$, так и в полулептонных распадах.

7.3.6. Приближения и обозначения для распадов B-мезонов. В ближайшие несколько лет (2007–2010 гг.) будут получены экспериментальные данные по CP-нарушению в распадах $B^\pm$- и B_d-мезонов (BaBar и Belle), а также по распадам B_s (эксперименты CDF и D0).

Для B_d- и B_s-систем

$$\left|\frac{q}{p}\right| = 1, \quad |\lambda_f| = \left|\frac{\overline{A}_f}{A_f}\right|, \tag{65}$$

при этом для B_d-систем $\Delta\Gamma = 0$.

В первом приближении

$$\frac{q}{p} = -\frac{2M_{21}}{\Delta m} = -\frac{M_{12}^*}{|M_{21}|}. \tag{66}$$

Ниже эта величина будет вычислена в стандартной модели.

Как следует из (14) и (25), сохранение CP в смешивании подразумевает, что

$$\frac{q}{p} = -\eta_P e^{i\xi}, \tag{67}$$

где ξ — произвольная фаза CP-преобразования в соотношении (1). Знак $\eta_P = \pm 1$ возникает из квадратного корня в (25) и, согласно (18), приводит к $CP|P_H\rangle = \eta_P|P_H\rangle$.

Поэтому η_P, определенное в пределе сохранения CP в смешивании, показывает, является ли тяжелое собственное состояние CP-четным ($\eta_P = 1$) или CP-нечетным ($\eta_P = -1$). Для B_s-систем используем зависящие от времени вероятности распадов (58):

$$\Gamma[B_s^0 \to f] = \frac{|A_f|^2 + |\overline{A}_f|^2}{2} e^{-\Gamma t}\left\{\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2} + D_f \sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2} + C_f\cos(\Delta m t) - S_f \sin(\Delta m t)\right\},$$
$$\Gamma[\overline{B}_d^0 \to f] = \frac{|A_f|^2 + |\overline{A}_f|^2}{2} e^{-\Gamma t}\left\{\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2} + D_f \sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2} - C_f\cos(\Delta m t) + S_f \sin(\Delta m t)\right\}, \tag{68}$$

где

$$D_f = \frac{2\,\mathrm{Re}(\lambda_f)}{1 + |\lambda_f|^2}, \tag{69}$$

$$C_f = \frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2}, \tag{70}$$

$$S_f = \frac{2\,\mathrm{Im}(\lambda_f)}{1 + |\lambda_f|^2}. \tag{71}$$

Так как

$$\lambda_f = \frac{1}{1 + C_f}(D_f + iS_f), \tag{72}$$

то

$$D_f^2 + C_f^2 + S_f^2 = 1. \tag{73}$$

Поэтому $C_f^2 + S_f^2 \leq 1$, причем равенство справедливо тогда, когда λ_f — чисто мнимая величина.

Соответствующие выражения для B_d-систем упрощаются, поскольку $\Delta\Gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma[B_d^0(t) \to f] &= \frac{|A_f|^2 + |\overline{A}_f|^2}{2} e^{-\Gamma t}\{1 + C_f\cos(\Delta m t) - S_f\sin(\Delta m t)\}, \\ \Gamma[\overline{B}_d^0(t) \to f] &= \frac{|A_f|^2 + |\overline{A}_f|^2}{2} e^{-\Gamma t}\{1 - C_f\cos(\Delta m t) + S_f\sin(\Delta m t)\}. \end{aligned} \tag{74}$$

Заметим, что в приближении $\Delta\Gamma = 0$ величина D_f неизмеряема.

Для проверки CP мы должны сравнить $B^0(t) \to f$ с $\overline{B}^0(t) \to \overline{f}$ или $B^0(t) \to \overline{f}$ с $\overline{B}^0(t) \to f$. Для простоты рассмотрения ограничимся распадами в состояния f_{CP}, являющиеся собственными CP-состояниями:

$$CP|f_{CP}\rangle = \eta_f|f_{CP}\rangle, \quad \eta_f = \pm 1. \tag{75}$$

В этом случае определим CP-асимметрию следующим образом:

$$A_{CP}(t) = \frac{\Gamma[\overline{B}^0(t) \to f_{CP}] - \Gamma[B^0(t) \to f_{CP}]}{\Gamma[\overline{B}^0(t) \to f_{CP}] + \Gamma[B^0(t) \to f_{CP}]}. \tag{76}$$

Так как мы предположили, что $|q/p| = 1$, $1 - |\lambda_f|^2 \sim |A_f|^2 - |\overline{A}_f|^2$, то C_f является мерой CP-нарушения в распадных амплитудах. С другой стороны, $S_f \sim \operatorname{Im}\lambda_f$ определяет CP-нарушение за счет интерференции смешивания в $B_d^0 - \overline{B}_d^0$ системе и распада в конечное состояние f_{CP}.

CP-нарушающую асимметрию можно определить и для распада заряженных B-мезонов. Однако среди заряженных B-мезонов нет смешивания, поэтому асимметрия соответствует прямому CP-нарушению:

$$A_D = \frac{\Gamma[B^+ \to f^+] - \Gamma[B^- \to f^-]}{\Gamma[B^+ \to f^+] + \Gamma[B^- \to f^-]} = \frac{|A_+|^2 - |A_-|^2}{|A_+|^2 + |A_-|^2}. \tag{77}$$

На этом мы пока закончим обсуждение CP-нарушения на адронном уровне и обратимся к электрослабой теории, предсказывающей CP-нарушение на уровне кварковых полевых операторов в соотношении (5).

7.4. CP-нарушение в стандартной модели

Как известно, стандартная модель включает в себя калибровочные поля:

глюоны $G^k_{\mu\nu}$, $\quad k = 1, \ldots, 8$;

$SU(2)_L$-бозоны W^a_μ, $\quad a = 1, 2, 3$;

$U(1)_Y$-бозон B_μ.

А также:

кварки $q_L = \begin{pmatrix} p_L \\ n_L \end{pmatrix} [1/2, 1/6]$, $\quad p_R[0, 2/3]$, $\quad n_R[0, -1/3]$;

лептоны $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ c_L \end{pmatrix} [1/2, -1/2]$, $\quad c_R[0, -1]$;

хиггсовский бозон $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} [1/2, 1/2]$,

где в квадратных скобках приведены электрослабые квантовые числа $[T, Y]$.

Нарушение симметрии $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \to SU(3)_C \times U(1)_{em}$ вызвано хиггсовским потенциалом

$$V(\phi^+\phi) = -\mu^2(\phi^+\phi) + \lambda(\phi^+\phi)^2 = -L_{\text{Higgs}}, \tag{78}$$

имеющим минимум

$$\langle \phi^+\phi \rangle = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda}. \tag{79}$$

Электрослабая часть лагранжиана стандартной модели

$$L_{EW} = L_{\text{gauge}} + L_{\text{Higgs}} + L_{\text{kinet}} + L_{\text{Yukawa}}, \tag{80}$$

где первое слагаемое содержит только калибровочные бозоны,

$$L_{\text{kinet}} = i\overline{q}_L\gamma^\mu D^{q_L}_\mu q_L + i\overline{p}_R\gamma^\mu D^{p_R}_\mu p_R + i\overline{n}_R\gamma^\mu D^{n_R}_\mu n_R + \\ + i\overline{L}_L\gamma^\mu D^{L_L}_\mu L_L + i\overline{c}_R\gamma_\mu D^{c_R}_\mu c_R + \left|\left(i\partial_\mu - \frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2, \tag{81}$$

причем

$$iD_\mu = i\partial_\mu - \frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W}_\mu - g'YB_\mu;$$
$$iD_\mu = i\partial_\mu - g'YB_\mu, \tag{82}$$

для $SU(2)_L$-дублетов и синглетов.

Юкавское взаимодействие

$$L_{\text{Yukawa}} = -\overline{q}_L Y_d n_R \phi - \overline{q}_L Y_\mu p_R (i\tau_2\phi^*) - \overline{L}_L Y_L c_R \phi + \text{э.с.}, \tag{83}$$

где Y_u, Y_d и Y_l — комплексные 3×3 матрицы констант связи.

Будем использовать матричное представление, в котором поля q_L, n_R и т. д. являются 3×1 векторами в пространстве поколений:

$$q_L = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{L_1} \\ n_{L_1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{L_2} \\ n_{L_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{L_3} \\ n_{L_3} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad n_R = \begin{bmatrix} n_{R_1} \\ n_{R_2} \\ n_{R_3} \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Тогда

$$Y_u = \begin{bmatrix} Y_{u11} & Y_{u12} & Y_{u13} \\ Y_{u21} & Y_{u22} & Y_{u23} \\ Y_{u31} & Y_{u32} & Y_{u33} \end{bmatrix}, \quad i\tau_2\phi^* = \begin{bmatrix} \phi^{0*} \\ \phi^- \end{bmatrix}. \tag{85}$$

В обозначениях, приведенных выше, круглые скобки соответствуют пространству $SU(2)_L$, а квадратные скобки — пространству поколений.

Калибровочные бозоны взаимодействуют с кварками в слабом базисе:

$$-L_W = \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{p}_L \gamma^\mu n_L W_\mu^+ + \text{э.с.}, \tag{86}$$

$$-L_Z = \frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu \big\{ C_L^{up} \overline{p}_L \gamma^\mu p_L + C_L^{down} \overline{n}_L \gamma^\mu n_L + (L \leftrightarrow R) \big\}, \tag{87}$$

где $C = T_3 - Q\sin^2\theta_W$.

Под слабым базисом понимается такой выбор q_L, p_R и n_R, при котором разность $L_{EW} - L_{\text{Yukawa}}$ остается инвариантной. Два таких базиса связаны «преобразованием слабого базиса»:

$$\begin{pmatrix} p'_L \\ n'_L \end{pmatrix} = q'_L = W_L q_L = W_L \begin{pmatrix} p_L \\ n_L \end{pmatrix},$$
$$p'_R = W_{p_R} p_R, \quad n'_R = W_{n_R} n_R. \tag{88}$$

Этим базисам соответствует глобальная группа симметрии ароматов

$$F = U(3)_{q_L} \times U(3)_{p_R} \times U(3)_{n_R}, \tag{89}$$

которая нарушается L_{Yukawa} до

$$F' = U(1)_B,$$

сохраняющей барионное число.

К сожалению, в любом слабом базисе взаимодействия с хиггсовскими полями недиагональны. Эту проблему можно решить, выбрав кварковые состояния в массовом базисе u_L, u_R, d_L, d_R посредством преобразований:

$$\begin{aligned} \overline{p}_L &= \overline{u}_L U^+_{u_L}, \quad \overline{n}_L = \overline{d}_L U^+_{d_L}, \\ p_R &= U_{u_R} u_R, \quad n_R = U_{d_R} d_R, \end{aligned} \tag{90}$$

где унитарные матрицы U выбраны так, чтобы диагонализовать юкавские константы:

$$\begin{aligned} M_U &= \mathrm{diag}(m_u, m_c, m_t) = \frac{v}{\sqrt{2}} U^+_{u_L} Y_u U_{u_R}, \\ M_D &= \mathrm{diag}(m_d, m_s, m_b) = \frac{v}{\sqrt{2}} U^+_{d_L} Y_d U_{d_R}. \end{aligned} \tag{91}$$

В этом базисе

$$\begin{aligned} -L_H &= \left(1 + \frac{H^0}{v}\right)\big\{\overline{u} M_u u + \overline{d} M_d d\big\}, \\ -L_W &= \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{u}_L (U^+_{u_L} U_{d_L}) \gamma^\mu d_L W^+_\mu + \text{э.с.}, \\ -L_Z &= \frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu \big\{ C^{up}_L \overline{u}_L (VV^+) \gamma^\mu u_L + C^{down}_L \overline{d}_L (V^+ V) \gamma^\mu u_L + (L \leftrightarrow R) \big\}, \end{aligned} \tag{92}$$

где H^0 — хиггсовское поле, а матрица

$$V = U^+_{u_L} U_{d_L} \tag{93}$$

называется матрицей Кабиббо–Кобаяши–Маскава (СКМ). Заметим, что отсутствие нейтральных токов с изменением аромата является следствием унитарности матрицы СКМ.

Действительно, так как U_{u_L} и U_{d_L} — унитарны, то унитарной будет и матрица V. Как видно из (92), в этом случае взаимодействия диагональны по ароматам. К сожалению, возникает дополнительное усложнение из-за того, что матрицы U не определяются выражением (91) единственным образом, т. е. массовый базис в (91) недостаточно определен.

В самом деле, при введении диагональных матриц

$$\theta_u = \mathrm{diag}(e^{i\theta_{u_1}}, e^{i\theta_{u_2}}, e^{i\theta_{u_3}}) \quad \text{и} \quad \theta_d = \mathrm{diag}(e^{i\theta_{d_1}}, e^{i\theta_{d_2}}, e^{i\theta_{d_3}}), \tag{94}$$

и переопределении собственных массовых состояний

$$\begin{aligned} u'_L &= u_L \theta^+_u, \quad \overline{d}'_L = d_L \theta^+_d, \\ u'_R &= \theta_u u_R, \quad d'_R = \theta_d d_R \end{aligned} \tag{95}$$

выражения (92) не меняются.

Число параметров матрицы СКМ можно определить двумя способами. Сначала заметим, что унитарная 3×3 матрица V имеет 3 угла и 6 фаз. Однако кварковые преобразования (95) не меняют L_W в (92), если матрица V изменяется при этом следующим образом:

$$V' = \theta_u V \theta^+_d. \tag{96}$$

Эта процедура позволяет исключить из матрицы V пять фаз.

Таким образом, остается три вещественных параметра (угла) и одна (CP-нарушающая) фаза матрицы СКМ.

При другом подходе к оценке числа параметров и фаз матрицы СКМ отметим, что в двух юкавских матрицах Y_u и Y_d содержится $N_{\text{Yuk}} = 18$ величин и $N_{\text{Yuk}} = 18$ фаз. При нарушении глобальной симметрии (89) $F \to F'$ остается

$$N = N_{\text{Yuk}} - N_F + N'_F \tag{97}$$

параметров, где N_F и N'_F — число параметров в F и F'. Заметим, что (97) справедливо как для величин, так и для фаз. Применяя (97) к стандартной модели, получаем $9 = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 3$ вещественных параметров (6 масс и три угла смешивания) и только одну фазу (CP-нарушающую фазу). Очевидно, что CP-нарушающей фазы нет, если имеется только два поколения кварков.

Поскольку имеется только одна нарушающая CP-фаза, то в стандартной модели любые две CP-нарушающие наблюдаемые пропорциональны друг другу.

Нарушение CP связано с юкавскими константами, которые возникают при взаимодействии со скалярами, т. е. CP имеет прямое отношение к сектору спонтанного нарушения симметрии.

7.4.1. Определение CP-нарушающих величин в стандартной модели. Начнем с CP-сохраняющего лагранжиана $L_{EW} - L_W$, записанного в массовом базисе. Лагранжиан $L_{EW} - L_W$ инвариантен относительно преобразования кварковых полей (95), и это обстоятельство можно учесть, введя фазы ξ в общее определение:

$$\begin{aligned} (CP)W^+_\mu(CP)^+ &= -e^{i\xi_W} W^{\mu-}; \\ (CP)\overline{u}_\alpha(CP)^+ &= -e^{-i\xi_\alpha} u^T_\alpha C^{-1}\gamma^0; \\ (CP)d_\kappa(CP)^+ &= e^{i\xi_\kappa}\gamma^0 C\overline{d}^T_\kappa. \end{aligned} \tag{98}$$

Легко проверить, что лагранжиан, описывающий взаимодействие заряженных токов:

$$\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{\alpha=u,c,t} \sum_{\kappa=d,s,b} \left[W^+_\mu V_{\alpha\kappa}\overline{u}_\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_\kappa + W^-_\mu V^*_{\alpha\kappa}\overline{d}_\kappa\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_\alpha\right] \tag{99}$$

инвариантен относительно CP-преобразований тогда и только тогда, когда

$$V_{\alpha\kappa} = e^{i(-\xi_W+\xi_\alpha-\xi_\kappa)} V^*_{\alpha\kappa}. \tag{100}$$

Для любого заданного матричного элемента $V_{\alpha\kappa}$ всегда можно выбрать фазы $\xi_W + \xi_\alpha - \xi_\kappa$ так, чтобы соотношение (100) выполнялось. Однако CP-нарушение подразумевает выполнение следующего равенства:

$$V_{\alpha i}V_{\beta j}V^*_{\alpha j}V^*_{\beta i} = (V_{\alpha i}V_{\beta j}V^*_{\alpha j}V^*_{\beta i})^*, \tag{101}$$

где $\alpha \neq \beta$, $i \neq j$.

Выражение (101) не содержит фаз ξ_W, ξ_α и ξ_κ, т. е. оно инвариантно относительно преобразований (95). Поэтому ненулевое значение

$$J_{\text{CKM}} = |\text{Im}(V_{\alpha i}V_{\beta j}V^*_{\alpha j}V^*_{\beta i})| \tag{102}$$

является сигналом CP-нарушения. Можно построить и другие комбинации из $V_{\alpha i}$, нарушающие CP, но все они пропорциональны J_{CKM}. Это есть следствие существования только одной CP-нарушающей фазы в стандартной модели. Из (102) очевидно также, что нарушение CP требует, чтобы все матричные элементы СКМ были отличны от нуля.

Однако можно поступить и по-другому: провести все вычисления до перехода к массовому базису, стартуя с CP-сохраняющего лагранжиана $L_{EW} - L_{\text{Yukawa}}$. Эта

процедура инвариантна относительно преобразований (88). В этом случае CP-преобразования можно определить следующим образом

$$\begin{aligned}(CP)\phi(CP)^+ &= \phi^* = (\phi^+)^T;\\ (CP)\overline{q}_L(CP)^+ &= -q_L^T C^{-1}\gamma^0 K_L^+,\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}(CP)n_R(CP)^+ &= K_{u_R}\gamma^0 C\overline{n}_R^T;\\ (CP)p_R(CP)^+ &= K_{p_R}\gamma^0 C\overline{p}_R^T,\end{aligned} \tag{104}$$

где K — унитарные матрицы, действующие в пространстве ароматов.

При этом L_{Yukawa} в (83) будет инвариантен относительно CP-преобразований, если матрицы K удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}K_L^+ Y_u K_{p_R} &= Y_u^*,\\ K_L^+ Y_d K_{p_R} &= Y_d^*.\end{aligned} \tag{105}$$

Важно отметить наличие K_L в обоих условиях (105). Это происходит потому, что левые «up» и «down» кварки относятся к одному $SU(2)_L$-дублету. Что касается J_{CKM}, то для определения знака CP-нарушения можно использовать обобщенные CP-преобразования.

7.4.2. Параметризации матрицы СКМ. Начнем обсуждение со стандартных параметризаций матрицы СКМ. СКМ-матрица содержит четыре физически значимых величины: три угла смешивания и одна CP-нарушающая фаза. Стандартной считается параметризация

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}}\\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13}\\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13}\end{pmatrix}, \tag{106}$$

где $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ — определяют смешивание ij поколений.

Другая — параметризация Вольфенштейна — основана на экспериментальных данных о матричных элементах

$$|V_{us}|^3 \simeq |V_{cb}|^{3/2} \simeq |V_{ub}| \tag{107}$$

и на свойстве унитарности матрицы СКМ. Тогда матричные элементы СКМ получаются в виде ряда по величине $\lambda = |V_{us}| = 0{,}22$. Выбирая фазу таким образом, чтобы V_{ud}, V_{us}, V_{ts} и V_{tb} были вещественными, Вольфенштейн предложил следующую параметризацию

$$V = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta)\\ -\lambda & 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2\\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1\end{pmatrix} + O(\lambda^4). \tag{108}$$

Как видно из (108), величина η связана с CP-нарушением, другие три параметра не нарушаются CP-преобразованием.

Из экспериментальных данных по $|V_{cb}|$ следует оценка для $A \simeq 0{,}8$, поэтому нужно найти экспериментальные ограничения на величины ρ и η. Это будет сделано ниже.

В этой параметризации

$$J_{\text{CKM}} = c_{12}c_{23}c_{13}^2 s_{12}s_{23}s_{13}|\sin\delta_{13}| \sim A^2\lambda^6|\eta|. \tag{109}$$

Из этого выражения следует, что величина J_{CKM} является малой, даже если δ_{13} и η порядка единицы. Причина — малость углов смешивания. Таким образом, большие CP-нарушающие асимметрии следует ожидать в каналах распада с малыми бренчингами. И наоборот, каналы с большими бренчингами проявляют малые CP-нарушающие асимметрии. Поэтому необходима большая статистика рождения B-мезонов.

7.4.3. Ограничения на величины матричных элементов СКМ-матрицы. Эти ограничения следуют из различных экспериментальных данных. Рассмотрим экспериментальные ограничения.

I. $|V_{ud}|$. Ограничения следуют из трех независимых процессов: 1) сверхразрешенных Ферми-переходов в β-распаде двух $J^P = 0^+$ нуклидов из одного изотопического мультиплета; 2) β-распада нейтрона; 3) пионного β-распада $\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$.

II. $|V_{us}|$. Этот матричный элемент извлекается из полулептонных распадов $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$ и $K_L \to \pi^- e^+ \nu_e$. Менее точные ограничения возникают из анализа распада гиперонов, например, $\Lambda \to p e^- \overline{\nu}_e$. Этот матричный элемент определяет параметр разложения λ.

III. $|V_{cd}|$ и $|V_{cs}|$. Прямое определение этих матричных элементов сопряжено со значительными теоретическими неопределенностями. Они извлекаются из данных по глубоконеупругому нейтринному возбуждению чарма в реакциях $\nu_\mu d \to \mu^- c$ ($|V_{cd}|$) и $\nu_\mu s \to \mu^- c$ ($|V_{cs}|$). Их можно получить также из полулептонных распадов D-мезонов: $D^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$, $D^0 \to K^- e^+ \nu_e$ и $D^+ \to \overline{K}^0 e^+ \nu_e$.

IV. $|V_{cb}|$. Извлекается из эксклюзивного распада $B \to D^* l^- \overline{\nu}_l$ и инклюзивного распада $B \to X_c l^- \overline{\nu}_l$. Этот матричный элемент определяет параметр A в параметризации Вольфенштейна.

V. $|V_{ub}|$. Определяется из инклюзивных распадов $B \to \{\pi, p, ...\} l^- \overline{\nu}_l$ и инклюзивных распадов $B \to X_u l^- \overline{\nu}_l$.

Соберем все экспериментальные данные (на лето 2005 г.), матричные элементы СКМ-матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9739 \div 0{,}9751 & 0{,}221 \div 0{,}227 & 0{,}0029 \div 0{,}0045 \\ 0{,}221 \div 0{,}227 & 0{,}9730 \div 0{,}9744 & 0{,}039 \div 0{,}044 \\ 0{,}0048 \div 0{,}0140 & 0{,}037 \div 0{,}043 & 0{,}9990 \div 0{,}9992 \end{pmatrix}. \tag{110}$$

Для величин λ и A современные данные

$$\lambda = 0{,}2265^{+0{,}0025}_{-0{,}0023}; \quad A = 0{,}801^{+0{,}029}_{-0{,}020}. \tag{111}$$

Иногда из элементов СКМ-матрицы строят следующие величины

$$R_b = \left| \frac{V_{ud} V_{ub}}{V_{cd} V_{cb}} \right|, \tag{112}$$

$$R_t = \left| \frac{V_{td} V_{tb}}{V_{cd} V_{cb}} \right|, \tag{113}$$

а также большие CP-нарушающие фазы

$$\alpha = \phi_2 = \arg\left(-\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{ud} V_{ub}^*} \right), \tag{114}$$

$$\beta = \phi_1 = \arg\left(-\frac{V_{cd} V_{cb}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right), \tag{115}$$

$$\gamma = \phi_3 = \arg\left(-\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \right). \tag{116}$$

И малые CP-нарушающие фазы

$$\chi = \arg\left(-\frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{tb}V_{ts}^*}\right); \qquad \chi' = \arg\left(-\frac{V_{us}V_{ud}^*}{V_{cs}V_{cd}^*}\right). \tag{117}$$

Заметим, что по определению

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi. \tag{118}$$

Интересная особенность параметризаций (112)–(117) состоит в том, что величины матричных элементов связаны с CP-нарушающими фазами:

$$R_b = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}; \qquad R_t = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}. \tag{119}$$

Поэтому СКМ-матрицу можно параметризовать с помощью $|V_{us}|$, $|V_{ub}|$, $|V_{cb}|$ и $|V_{td}|$ или четырьмя CP-нарушающими фазами β, γ, χ и χ'.

В стандартной модели эти CP-нарушающие фазы связаны с единственным нарушающим CP параметром η:

$$\begin{aligned} R_t e^{-i\beta} &\simeq 1 - \rho - i\eta; \\ R_b e^{-i\gamma} &\simeq \rho - i\eta; \\ \chi &\simeq \lambda^2\eta; \\ \chi' &\simeq A^2\lambda^4\eta. \end{aligned} \tag{120}$$

Четыре введенных фазы оказываются весьма удобными и для расширения стандартной модели. Действительно, даже если существует дополнительное поколение кварков, заряженные токи, включающие три первых поколения кварков, могут параметризоваться некоторой матрицей 3×3. Вообще говоря, эта матрица уже не унитарна, однако, можно переопределить фазы первых трех поколений и исключить пять фаз. Матрица будет зависеть от 9 независимых величин и 4-х фаз. Поэтому любой эксперимент, исследующий CP-нарушение во взаимодействии u-, c-, t-, d-, s- и b-кварков с $W^{\pm}$, должен описываться с помощью четырех фаз.

7.4.4. Унитарный треугольник. Так как матрица СКМ стандартной модели унитарна: $VV^+ = V^+V = 1$, то можно записать шесть соотношений, связывающих между собой матричные элементы. Эти соотношения отражают нормировку на единицу трех столбцов и трех строк СКМ-матрицы:

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0, \tag{121}$$

$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0, \tag{122}$$

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0, \tag{123}$$

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0, \tag{124}$$

$$V_{cd}V_{td}^* + V_{cs}V_{ts}^* + V_{cb}V_{tb}^* = 0, \tag{125}$$

$$V_{ud}V_{td}^* + V_{us}V_{ts}^* + V_{ub}V_{tb}^* = 0. \tag{126}$$

Эти соотношения можно представить треугольниками в комплексной плоскости. Действительно, используя разложение Вольфенштейна, получаем, что стороны и углы

треугольников (123) и (127) пропорциональны λ^3. Треугольники (122) и (125) имеют две стороны $\sim \lambda^2$, а третью сторону $\sim \lambda^4$. Треугольники (121) и (125) имеют две стороны $\sim \lambda$ и одну сторону $\sim \lambda^5$. Замечательно, что все треугольники имеют одинаковую площадь $J_{\text{СКМ}}/2$, и, таким образом, одинаковый знак CP-нарушения.

Отождествляя $V_{cd}V_{cb}^*$ с вещественной осью, и разделив все стороны треугольника на величину $|V_{cd}V_{cb}|$, с помощью определений (112 — 116) получаем

$$R_b e^{i\gamma} + R_t e^{-i\beta} = 1. \tag{127}$$

Получающийся треугольник изображен на рис. 4. В параметризации Вольфенштейна треугольник имеет вершину в точке с координатами (ρ,η) и площадь $|\eta|/2$. В стандартной модели R_t и β определяются в процессах, включающих $B-\overline{B}$ смешивание, а R_b и γ определяются процессами распада. Таким образом, унитарный треугольник очень удобен с точки зрения согласованности данных, полученных при смешивании и при распаде.

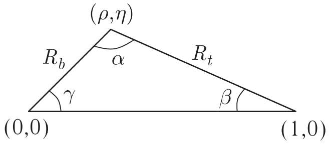


Рис. 4

Отметим еще одну важную особенность унитарного треугольника. Предположим, что измеряются величины двух сторон треугольника (скажем, R_b и R_t), и их сумма оказывается больше третьей стороны ($R_b + R_t > 1$). Тогда треугольник не будет плоским. Однако его площадь пропорциональна $J_{\text{СКМ}}$, поэтому можно идентифицировать CP-нарушение, измеряя только три CP-сохраняющие стороны треугольника.

7.4.5. Плоскость $(\rho - \eta)$. В стандартной модели, если известны величины λ и A, то все эксперименты, исследующие СКМ-матрицу, будут описываться только параметрами ρ и η. Это означает, что любое экспериментальное ограничение отражается в $(\rho - \eta)$ плоскость.

Поэтому поиск новой физики связан с нанесением ограничений на $(\rho - \eta)$ плоскость и исследованием полученной области допустимых параметров. Если любые две области в этой плоскости не перекрываются, то это является указанием существования «новой» физики.

Можно выделить три классических эксперимента, ограничивающих параметры ρ и η в стандартной модели.

1) Определение величины $|V_{ub}/\lambda V_{cb}|$ в $b \to u$ и $b \to c$ распадах ограничивает

$$R_b = \sqrt{\rho^2 + \eta^2}. \tag{128}$$

Эти границы соответствуют окружности с центром $(\rho,\eta) = (0{,}0)$.

2) Разность масс $B_d^0 - \overline{B}_d^0$ определяется t-кварковыми обменами, пропорциональными $|V_{tb}V_{td}|^2$. Эти данные ограничивают величину

$$R_t = \sqrt{(1-\rho)^2 + \eta^2}, \tag{129}$$

представляющую собой окружность с центром $(\rho,\eta) = (1{,}0)$.

3) Параметр δ_K, характеризующий CP-нарушение в $K^0 - \overline{K}^0$ смешивании, определяется диаграммами, включающими обмены всеми «up» кварками. Это дает ограничение

$$\eta(a - \rho) = b, \tag{130}$$

это гипербола в $(\rho - \eta)$ плоскости.

На рис. 5 приведены «классические» экспериментальные ограничения в $(\rho - \eta)$ плоскости.

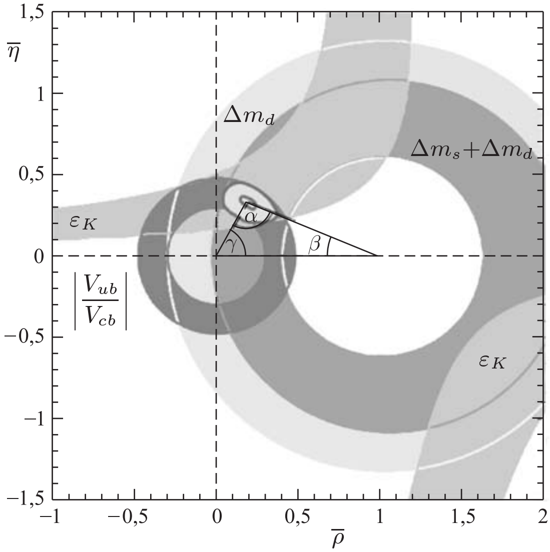


Рис. 5

Как видно из этого рисунка, все эксперименты имеют область перекрытия в $(\rho - \eta)$ плоскости, т. е. этих экспериментов не достаточно для обнаружения «новой» физики.

7.4.6. Определение параметра $\boldsymbol{\lambda_f}$. Как было показано выше, CP-нарушение в распаде нейтральных B-мезонов можно описать с помощью феноменологического параметра λ_f. В этом разделе будет более подробно рассмотрена проблема λ_f. Но сначала попытаемся ответить на вопрос: можно ли вычислить отношение q/p (66–67)?

При изучении больших CP-нарушающих эффектов в распаде B-мезона предположим CP-сохранение в $B - \overline{B}$ смешивании и что $|\Gamma_{12}| \ll |M_{12}|$. Тогда

$$\frac{q_B}{p_B} = -\eta_B e^{i\xi} = -\sqrt{\frac{M_{12}^*}{M_{12}}}, \tag{131}$$

где индекс «B» относится к B-мезонам, а ξ — произвольная фаза CP-преобразования:

$$CP|B_q^0\rangle = e^{i\xi}|\overline{B}_q^0\rangle; \tag{132}$$

$$CP|\overline{B}_q^0\rangle = e^{-i\xi}|B_q^0\rangle. \tag{133}$$

Параметр $\eta_B = \pm 1$, возникающий при $CP|B_H\rangle = \eta_B|B_H\rangle$, согласуется с тем, что если CP сохраняется в смешивании, то собственные состояния гамильтониана должны быть собственными CP-состояниями. В стандартной модели, и в пренебрежении CP-нарушением, $\eta_B = -1$. Это означает, что в этом пределе тяжелое состояние CP-нечетное.

Параметризуем фазу M_{12} с помощью функции $e^{-2i\phi_M}$. Тогда из (131)

$$\frac{q_B}{p_B} = -\eta_B e^{2i\phi_M}, \tag{134}$$

причем считаем ϕ_M измеряемой фазой. Например, в стандартной модели $q_B/p_B = e^{-2i\beta}$. Величина M_{12} вычисляется из эффективного гамильтониана, имеющего

слабую (CP-нечетную) фазу $-2\phi_M$ и $\Delta B = 2$ оператора O:

$$\begin{aligned} M_{12} &= e^{-2i\phi_M}\langle B_q^0|O|\overline{B}_q^0\rangle, \\ M_{12} &= e^{2i\phi_M}\langle \overline{B}_q^0|O^+|B_q^0\rangle. \end{aligned} \qquad (135)$$

Оператор O и ему эрмитово-сопряженный связаны CP-преобразованием

$$(CP)O^+(CP)^+ = e^{2i\xi_M}O. \qquad (136)$$

Вставим $(CP)(CP)^+ = 1$ во второе соотношение (135):

$$\begin{aligned} M_{12}^* &= e^{2i\xi_M}\langle \overline{B}_q^0|(CP)(CP)^+O^+(CP)^+(CP)|B_q^0\rangle = \\ &= e^{2i(\phi_M+\xi+\xi_M)}\langle B_q^0|O|\overline{B}_q^0\rangle = e^{2i(2\phi_M+\xi+\xi_M)}M_{12}. \end{aligned} \qquad (137)$$

Тогда (131) дает

$$\frac{q_B}{p_B} = -\eta_B e^{i(2\phi_M+\xi+\xi_M)}. \qquad (138)$$

Но $q_B/p_B = -\eta e^{i\xi}$, т. е. фаза CP-преобразования должна быть выбрана так, чтобы $2\phi_M + \xi_M = 0$. Как это может быть реализовано? Для этого вычислим величину q_B/p_B в стандартной модели. В этом случае

$$O \simeq \left[\overline{q}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b\right]\left[\overline{q}\gamma_\mu(1-\gamma_5)b\right] \qquad (139)$$

и

$$e^{-2i\phi_M} = \frac{V_{tb}V_{tq}^*}{V_{tb}^*V_{tq}} = \begin{cases} e^{-2i\beta}, & \text{для } B_d; \\ e^{2i\chi}, & \text{для } B_s. \end{cases} \qquad (140)$$

В массовом базисе наиболее общее CP-преобразование кварковых полей b и q:

$$\begin{aligned} (CP)b(CP)^+ &= e^{i\xi_b}\gamma^0 C\overline{b}^T, \\ (CP)\overline{q}(CP)^+ &= -e^{-i\xi_q}q^T C^{-1}\gamma^0. \end{aligned} \qquad (141)$$

Тогда из (139) и (136) имеем $\xi_M = \xi_q - \xi_b$ и

$$\frac{q_B}{p_B} = -\eta_B e^{i(\xi+\xi_q-\xi_b)}\frac{V_{tb}^*V_{tq}}{V_{tb}V_{tq}^*}. \qquad (142)$$

Требование $2\phi_M + \xi_M = 0$ эквивалентно

$$V_{tb}V_{tq}^* + e^{i(\xi_q-\xi_b)}V_{tb}^*V_{tq}. \qquad (143)$$

Очевидно, что всегда можно выбрать ξ_q и ξ так, чтобы (143) выполнялось. Таким образом, соотношение (143) есть следствие сохранения CP в стандартной модели.

Однако возникает новая проблема. Если (131) имеет место в любой модели с CP-сохранением в смешивании и ξ — произвольная фаза, то как вычислить λ_f?

7.4.7. Сокращение фаз CP-преобразований в величине λ_f. Рассмотрим распады B_q^0 и $\overline{B}_q^0$ в собственные CP-состояния f_{CP}:

$$CP|f_{CP}\rangle = \eta_f|f_{CP}\rangle, \qquad (144)$$

причем $\eta_f = \pm 1$. Предположим, что распадные амплитуды имеют только одну слабую фазу ϕ_A, а оператор O' определяет динамику распада

$$\begin{aligned} A_f &= e^{i\phi_A}\langle f_{CP}|O'|B_q^0\rangle; \\ \overline{A}_f &= e^{-i\phi_A}\langle f_{CP}|O'^+|\overline{B}_q^0\rangle. \end{aligned} \qquad (145)$$

При CP-преобразовании оператор O' преобразуется следующим образом:

$$(CP)O'^{+}(CP)^{+} = e^{-i\xi_D}O'. \tag{146}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\overline{A}_f &= e^{-i\phi_A}\langle f_{CP}|(CP)^{+}(CP)O'^{+}(CP)^{+}(CP)|\overline{B}^0_q\rangle = \\ &= \eta_f e^{-i(\phi_A+\xi+\xi_D)}\langle f_{CP}|O'|B^0_q\rangle = \eta_f e^{-i(2\phi_A+\xi+\xi_D)}A_f. \end{aligned} \tag{147}$$

С учетом (138) получаем

$$\lambda_f = \frac{q_B}{p_B}\frac{\overline{A}_f}{A_f} = -\eta_B\eta_f e^{2i(\phi_M-\phi_A)}e^{i(\xi_M-\xi_D)}. \tag{148}$$

Поэтому можно сделать вывод: если вычисления проведены корректно, то фазы ξ_M и ξ_D, возникающие за счет CP-преобразований операторов смешивания и распадов, равны и сокращают друг друга. Причина сокращения состоит в том, что эти операторы включают одинаковые кварковые поля. Таким образом,

$$\lambda_f = -\eta_B\eta_f e^{2i(\phi_M-\phi_A)}. \tag{149}$$

Ниже мы проверим сокращение в распаде $B_d \to J/\psi K_S$. Следует отметить две важных особенности выражения (149):

а) если положить с самого начала $\xi_M = \xi_D = 0$, то для λ_f получится правильный результат. Однако возникнет несогласованность между (131) и (134).

б) $-\eta_B = \mp 1$, и знак в (149) важен. Этот знак возникает и в соотношении q_B/p_B (131).

Рассмотрим теперь общую параметризацию для смешивания и распада. Для этого выберем распад $B^0_d \to f_{CP}$, осуществляемый за счет других диаграмм с величинами вкладов A_1 и A_2, CP-нечетными фазами (слабыми фазами) ϕ_{A_1} и ϕ_{A_2}, CP-четными фазами (сильными фазами) δ_1 и δ_2.

Обозначим через ϕ_M CP-нечетную фазу в $B^0_d - \overline{B}^0_d$ смешивании. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{q_B}{p_B} &= -\eta_B e^{2i\phi_M}; \\ A_f &= A_1 e^{i\phi_{A_1}}e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\phi_{A_2}}e^{i\delta_2}, \\ \overline{A}_f &= \eta_f(A_1 e^{-i\phi_{A_1}}e^{i\delta_1} + A_2 e^{-i\phi_{A_2}}e^{i\delta_2}). \end{aligned} \tag{150}$$

Поэтому величина

$$\lambda_f = -\eta_B\eta_f e^{-2i\phi_1}\frac{1 + re^{i(\phi_1-\phi_2)}e^{i\delta}}{1 + re^{-i(\phi_1-\phi_2)}e^{i\delta}}, \tag{151}$$

где $\eta_B = \pm 1$, $\eta_f = \pm 1$, $\phi_1 = \phi_{A_1} - \phi_M$, $\phi_2 = \phi_{A_2} - \phi_M$, $\delta = \delta_2 - \delta_1$ и $r \equiv A_2/A_1$.

В стандартной модели CP-нечетные фазы определяются слабыми взаимодействиями, а CP-четные — сильными. Вычисление CP-четных фаз представляет значительную трудность, поскольку оно включает адронные матричные элементы, зависящие от взаимодействия в конечном состоянии. Поэтому желательно рассматривать такие распады, в которых «адронные неопределенности» малы.

Обратимся теперь к обсуждению распадов, осуществляемых с единственной слабой фазой. Этот случай реализуется тогда, когда $r = A_2/A_1 = 0$, а также если участвует несколько диаграмм, но для них $\phi_1 - \phi_2 = \phi_{A_1} - \phi_{A_2} = 0$.

Тогда

$$\lambda_f = -\eta_B\eta_f e^{-2i\phi_1}. \tag{152}$$

Отсюда $|\lambda_f| = 1$, а из соотношений (70) и (71):

$$\begin{aligned} C_f &= 0, \\ S_f &= \eta_B \eta_f \sin 2\phi_1. \end{aligned} \tag{153}$$

Это идеальные распады, поскольку соответствующие асимметрии зависят от единственной слабой фазы (вычисляемой в стандартной модели) и не зависят ни от сильных фаз, ни от величин распадных амплитуд. Поэтому поиск CP-нарушающих асимметрий в распадах на состояния, являющиеся собственными CP-состояниями, а также включающих только одну слабую фазу, наиболее интересен при изучении CP-нарушения в B-системах. К сожалению, большинство распадов включает несколько диаграмм с различными слабыми фазами.

Рассмотрим теперь случай, когда имеется две диаграммы с различными слабыми фазами, причем величины соответствующих распадных амплитуд удовлетворяют условию $r \ll 1$. Тогда из (70) и (71) получаем

$$\begin{aligned} C_f &\simeq 2r \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin\delta, \\ S_f &\simeq \eta_B \eta_f (\sin 2\phi_1 - 2r \cos 2\phi_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) \cos\delta). \end{aligned} \tag{154}$$

Из этого соотношения следует, что CP-нарушение присутствует в распадах (прямое CP-нарушение), если: а) распад происходит, по крайней мере, за счет двух диаграмм; б) эти диаграммы имеют различные слабые фазы; в) диаграммы имеют различные сильные фазы.

С другой стороны, поскольку распад зависит от величин r и δ, вычисление параметра C_f прямого CP-нарушения всегда сопряжено с адронными неопределенностями. Если имеется две диаграммы, интерференционное CP-нарушение также зависит от r и δ. В результате вычисление S_f содержит адронные неопределенности. Заметим, что для S_f проблема хуже, чем кажется. Действительно, если даже взаимодействие в конечном состоянии очень мало ($\delta \sim 0$, $C_f \sim 0$), то S_f зависит от r. Присутствие второй амплитуды с другой слабой фазой нарушает измерение $\sin 2\phi_1$ даже в том случае, когда разность сильных фаз стремится к нулю.

7.5. Распады B-мезонов как проверка стандартной модели

7.5.1. Распад $B_d \to J/\psi K_S$. В этом распаде состояние $J/\psi K_S$ не является собственным CP-состоянием, причем даже K_S не есть собственное CP-состояние. K_S нельзя рассматривать как «хорошее» конечное состояние, поскольку оно детектируется по $\pi^+\pi^-$. Ясно, что отбирая такие события, в которых каоны имеют собственные времена, гораздо большие τ_S, мы измеряем K_L. Поэтому корректное вычисление должно учитывать обе моды распада $B_d \to J/\psi K_S \to J/\psi(\pi^+\pi^-)$ и $B_d \to J/\psi K_L \to J/\psi(\pi^+\pi^-)$. Однако этот эффект мал для малых времен, используемых для извлечения данных в распаде $B_d \to J/\psi K_S$. В приближении спектаторных кварков стандартной модели возможны только распады $B_d^0 \to J/\psi K^0$ и $\overline{B}_d^0 \to J/\psi \overline{K}^0$. Распад в $B_d \to J/\psi K_S$ возможен лишь вследствие смешивания $K^0 - \overline{K}^0$, при этом

$$\frac{q_k}{p_k} = -\eta_K e^{i(\xi_K + \xi_d - \xi_s)} \frac{V_{us}^* V_{ud}}{V_{us} V_{ud}^*}. \tag{155}$$

Ниже будем пренебрегать CP-нарушением в $K^0 - \overline{K}^0$ смешивании и использовать эквивалентный базис.

Так как векторный мезон J/ψ и каон возникают при распаде B-мезона, они находятся в состоянии с $l=1$, которое при CP-преобразовании дает знак минус. С учетом этих замечаний приступим к вычислению величины $\lambda_{B_d\to J/\psi K_S}$.

В эквивалентном базисе

$$\langle\tilde{K}_S| = \frac{1}{2p_k}\langle K^0| + \frac{1}{2q_k}\langle\overline{K}^0|;$$

$$\langle J/\psi\tilde{K}_S|T|B_d^0\rangle = \frac{1}{2p_k}\langle J/\psi K^0|T|B_d^0\rangle, \tag{156}$$

$$\langle J/\psi\tilde{K}_S|T|\overline{B}_d^0\rangle = \frac{1}{2q_k}\langle J/\psi\overline{K}^0|T|\overline{B}_d^0\rangle.$$

$$\lambda_{B_d\to J/\psi K_S} = \frac{q_B\overline{A}_{J/\psi K_S}}{p_B A_{J/\psi K_S}} = \frac{q_B\langle J/\psi\overline{K}^0|T|\overline{B}_d^0\rangle p_k}{p_B\langle J/\psi K^0|T|B_d^0\rangle q_k}. \tag{157}$$

Наличие p_k/q_k отражает интерференцию в $K^0-\overline{K}^0$ смешивании. Параметры смешивания известны из (142) и (155).

Обратимся к распадным амплитудам. Предположим, что на древесном уровне распад описывается диаграммой (рис. 6).

Тогда

$$\langle J/\psi K^0|T|B_d^0\rangle \sim V_{cb}^* V_{cs} \times$$
$$\times \big\langle J/\psi K^0\big|\big[\overline{b}\gamma^\mu(1-\gamma_5)c\big]\big[\overline{c}\gamma_\mu(1-\gamma_5)s\big]\big|B_d^0\big\rangle. \tag{158}$$

Если использовать вставку $(CP)^+CP=1$, то

$$\langle J/\psi K^0|(CP)^+ = -e^{i\xi_K}\langle J/\psi\overline{K}^0|, \tag{159}$$

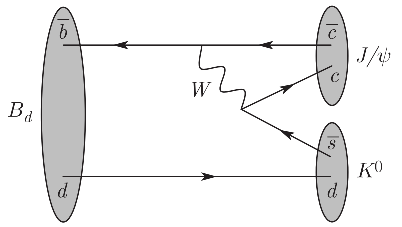


Рис. 6

причем знак минус возникает из-за того, что J/ψ и K имеют $l=1$.

Далее

$$(CP)\big[\overline{b}\gamma^\mu(1-\gamma_5)c\big](CP)^+ = -e^{i(\xi_c-\xi_b)}\big[\overline{c}\gamma_\mu(1-\gamma_5)b\big] \times$$
$$\times (CP)\big[\overline{c}\gamma_\mu(1-\gamma_5)s\big](CP)^+ = -e^{i(\xi_s-\xi_c)}\big[\overline{s}\gamma^\mu(1-\gamma_5)c\big]; \tag{160}$$
$$(CP)|B_d^0\rangle = e^{i\xi_B}|B_d^0\rangle.$$

Поэтому

$$\frac{\langle J/\psi\overline{K}^0|T|\overline{B}_d^0\rangle}{\langle J/\psi K^0|T|B_d^0\rangle} = -e^{i(\xi_K-\xi_B+\xi_b-\xi_s)}\frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{cb}^*V_{cs}}. \tag{161}$$

Подставляя (142), (155) и (161) в (157), получим

$$\lambda_{B_d\to J/SK_S} = -\eta_B e^{i(\xi_B+\xi_d-\xi_b)}\frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{tb}V_{td}^*}(-\eta_K)e^{-i(\xi_K+\xi_d-\xi_s)}\frac{V_{us}V_{ud}^*}{V_{us}^*V_{ud}} \times$$
$$\times (-1)e^{i(\xi_K-\xi_B+\xi_b-\xi_s)}\frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{cb}^*V_{cs}} = -\eta_B\eta_K\frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{tb}V_{td}^*}\frac{V_{us}V_{ud}^*}{V_{us}^*V_{ud}}\frac{V_{cb}V_{cs}^*}{V_{cb}^*V_{cs}} = -e^{-2i(\beta-\chi')}, \tag{162}$$

причем в последнем равенстве в параметризации матрицы СКМ использовано $\eta_B=\eta_K=-1$:

$$V \simeq \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & \lambda e^{i\chi'} & A\lambda^3 R_b e^{-i\gamma} \\ -\lambda & 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3 R_t e^{-i\beta} & -A\lambda^2 e^{i\chi} & 1 \end{pmatrix}. \tag{163}$$

Как видно из (162), в распаде $B_d \to J/\psi K_S$ действительно происходит сокращение фаз $\xi_M - \xi_D = 0$, о котором упоминалось выше. Заметим, что проще было бы игнорировать все CP-фазы (142) и (155) и подставить фазы всех матричных элементов матрицы СКМ (163).

В этом случае

$$\frac{q_B}{p_B} = e^{-2i\tilde{\beta}}; \qquad \frac{q_K}{p_K} = e^{-2i\chi'} \simeq 1. \tag{164}$$

Фаза $\tilde{\beta}$ учитывает возможный вклад «новой» физики в $B_d^0 - \overline{B}_d^0$ смешивание. В стандартной модели $\tilde{\beta}$ совпадает с СКМ-фазой β. Поскольку $\delta_K \sim 10^{-3}$, χ' весьма мала во всех моделях «новой» физики. Аналогично

$$\frac{q_{B_s}}{p_{B_s}} = e^{2i\tilde{\chi}}, \tag{165}$$

где $\tilde{\chi}$ допускает вклады «новой» физики в $B_s^0 - \overline{B}_s^0$ смешивание. В стандартной модели $\tilde{\chi}$ совпадает с СКМ-фазой χ.

Кроме диаграммы, представленной на рис. 6, в распад $B_d \to J/\psi K_S$ вносит вклад и так называемая пингвинная диаграмма с виртуальными t-кварками (рис. 7).

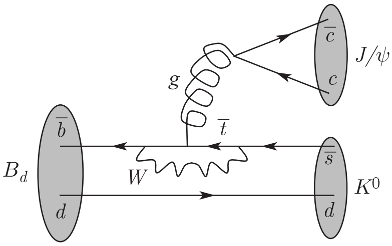


Рис. 7

Глюонная линия соответствует двум или более глюонам. В параметризации (163) вклады диаграмм (рис. 6, 7) пропорциональны

$$V_{cb}^* V_{cs} \sim A\lambda^2, \qquad V_{tb}^* V_{ts} \sim A\lambda^2 e^{i\chi}. \tag{166}$$

Разность между двумя слабыми фазами $\phi_1 - \phi_2 = \chi$ в стандартной модели $\sim \lambda^2$. С другой стороны, так как пингвинная диаграмма более высокого порядка слабого взаимодействия, она должна быть подавлена величиной r. Поэтому $r\sin(\phi_1 - \phi_2) \sim \lambda^2 r$, и распад определяется одной слабой фазой, а соотношение (162) остается справедливым. В результате из (153) заключаем, что в этом распаде нет прямого CP-нарушения, а интерференционный член $S_{J/\psi K_S} = \sin 2\tilde{\beta}$. Измерение этого параметра коллаборациями BaBar и Belle было первым обнаружением CP-нарушения вне каонных систем.

Particle Data Group в 2004 г. приводит следующие значения параметров:

$$|\lambda_{B_d \to (c\overline{c})K}| = 0{,}949 \pm 0{,}045; \quad \sin 2\tilde{\beta} = 0{,}731 \pm 0{,}056. \tag{167}$$

В стандартной модели $\tilde{\beta} = \beta$ связано с параметрами Вольфенштейна ρ и η следующим образом:

$$\frac{1 - \rho + i\eta}{\sqrt{(1-\rho)^2 + \eta^2}} \simeq e^{i\beta}. \tag{168}$$

Поэтому (167) соответствует площади между двумя линиями, проходящими через точку $(\rho,\eta) = (1{,}0)$. Если сравнить эти ограничения с рис. 5, то можно сделать вывод о том, что CP-нарушающие эффекты определяются СКМ-матрицей. Поэтому для обнаружения «новой физики» необходимы другие эксперименты.

Угол β можно исследовать в следующих процессах:

1) $b \to s\bar{s}s$ распадах, например, $B_d \to \phi K_S$, $B_d \to \eta' K_S$ и $B_d \to K^+K^-K_S$.

2) $b \to c\bar{c}d$распадах, таких как $B_d \to \psi\pi^0$ и $B_d \to D^{*+}D^{*-}$. Так как древесные амплитуды этих распадов подавлены величиной λ по сравнению с распадом $b \to c\bar{c}s$, то эти распады более чувствительны к возможным эффектам «новой» физики.

3) Распады $B_d \to AK_S$, где $A = \chi_1, \eta_c, \ldots$ — аксиально-векторные $c\bar{c}$-состояния.

4) $B_d \to J/\psi K_L$ дают возможность исследования CPT-инвариантности.

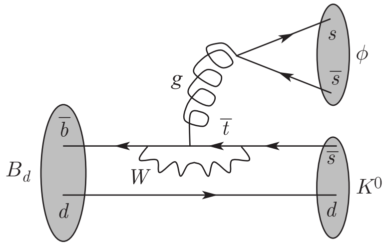


Рис. 8

Распад $B_d \to \phi K_S$ осуществляется за счет пингвинных диаграмм (рис. 8), напоминающих процесс распада $B_d \to J/\psi K_S$.

Распад $B_d \to \phi K_S$ происходит за счет СКМ-структуры, показанной во второй строке выражения (166). В отличие от распада $B_d \to J/\psi K_S$, распад на ϕ-мезон идет только за счет пингвинных диаграмм. Этот распад позволяет измерить величину $\tilde{\beta}$, т. е.

$$\tilde{\beta}(bb \to s \text{ за счет пингвин. диагр.}) = \tilde{\beta}(\text{распад } b \to c\bar{c}s). \tag{169}$$

«Пингвинные» распады $b \to s$ более чувствительны к эффектам «новой» физики, чем «древесные» распады $b \to c\bar{c}s$. «Новая» физика могла бы влиять на интерференционное CP-нарушение, т. е. $S_f \neq \pm\sin 2\tilde{\beta}$, и вызвать CP-нарушение в распаде, $C_f \neq 0$. Кроме того, из-за различия адронных матричных элементов, «новая физика» проявляла бы себя по разному в распадах $B_d \to \phi K_S$ и $B_d \to \eta' K_S$.

Имеющиеся экспериментальные значения на лето 2005 г. для параметров C_{ϕ_K}, S_{ϕ_K}, извлеченные из распада $B_d \to \phi K_S$:

$$\begin{aligned} C_{\phi_K} &= \begin{cases} 0{,}00 \pm 0{,}23 \pm 0{,}05, & \text{BaBar;} \\ -0{,}08 \pm 0{,}22 \pm 0{,}09, & \text{Belle;} \\ -0{,}04 \pm 0{,}17, & \text{HFAG.} \end{cases} \\ S_{\phi_K} &= \begin{cases} +0{,}50 \pm 0{,}25, & \text{BaBar;} \\ +0{,}06 \pm 0{,}33, & \text{Belle;} \\ +0{,}34 \pm 0{,}20, & \text{HFAG.} \end{cases} \end{aligned} \tag{170}$$

Отметим, что заметное отличие между значениями $\sin 2\tilde{\beta}$, извлеченными из распадов $B_d \to J/\psi K_S$ и $B_d \to \phi K_S$, является серьезной проблемой стандартной модели.

Одна возможностей преодоления этой трудности — введение нового взаимодействия sZb, не описываемого стандартной моделью:

$$L_Z^{new} = \frac{g^2}{4\pi}\frac{g}{2\cos\theta_W}\left[Z_{sb}\bar{b}_L\gamma_\mu s_L + Z'_{sb}\bar{b}_R\gamma_\mu s_R\right]Z^\mu + \text{э.с.} \tag{171}$$

Однако вклад новых Z-пингвинных диаграмм должен в 2–3 раза превышать вклад диаграмм стандартной модели в распаде $b \to s$.

7.5.2. Распад $B_d \to \pi^+\pi^-$. Древесные и пингвинные диаграммы этого распада изображены на рис. 9, 10.

Вклад этих диаграмм пропорционален соответственно

$$V_{ub}^* V_{ud} \simeq AR_b\lambda^3 e^{i\gamma}; \quad V_{tb}^* V_{td} \simeq AR_t\lambda^3 e^{-i\beta}. \tag{172}$$

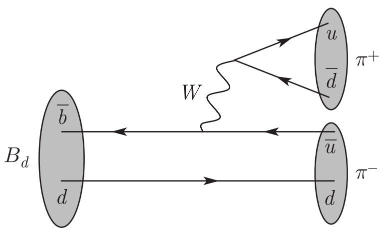


Рис. 9

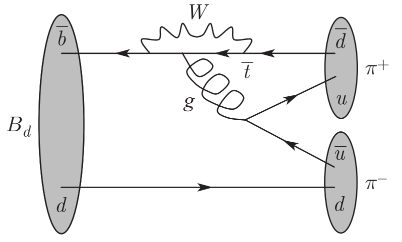


Рис. 10

Чтобы понять, почему интересен распад $B_d \to \pi^+\pi^-$, рассмотрим сначала лишь древесную диаграмму, пренебрегая пингвинной. Тогда

$$\lambda_{B_d\to\pi^+\pi^-} = \frac{q_B\langle\pi^+\pi^-|T|\overline{B}_d^0\rangle}{p_B\langle\pi^+\pi^-|T|B_d^0\rangle} = e^{-2i(\tilde{\beta}+\gamma)}. \tag{173}$$

Итак, если рассматривать только древесную диаграмму, то CP-нарушающая асимметрия в этом распаде дает возможность определить величину $\tilde{\beta}+\gamma$. В стандартной модели $\tilde{\beta}+\gamma = \beta+\gamma$, и это ограничивает область в $(\rho-\eta)$ плоскости для проявлений «новой» физики. Поскольку $\alpha = \pi-\beta-\gamma$, то тем самым измеряется и величина α. В моделях с «новой» физикой в $B^0-\overline{B}^0$ смешивании $\tilde{\beta}$ известна из распада $B_d \to J/\psi K_S$, поэтому в распаде $B_d \to \pi^+\pi^-$ измеряется γ.

Учтем теперь вклад обеих диаграмм, тогда

$$\lambda_{B_d\to\pi^+\pi^-} = e^{-2i\tilde{\beta}}\frac{e^{-i\gamma}\langle t\rangle + e^{i\beta}\langle p\rangle}{e^{i\gamma}\langle t\rangle + e^{-i\beta}\langle p\rangle} = e^{-2i\tilde{\beta}}\frac{1+re^{i\delta}e^{i(\beta+\gamma)}}{1+re^{i\delta}e^{-i(\beta+\gamma)}}, \tag{174}$$

где $\langle t\rangle$ ($\langle p\rangle$) содержат матричный элемент оператора, включающего СКМ-коэффициент $V_{ub}^*V_{ud}$ ($V_{tb}^*V_{td}$). Очевидно, что

$$re^{i\delta} = \frac{\langle p\rangle}{\langle t\rangle}, \tag{175}$$

r — положительное вещественное число, а δ — «сильная» фаза.

Так как $re^{i\delta}$ содержит адронные матричные элементы, то этот член вносит наибольшие неопределенности в интерпретацию экспериментальных данных.

Действительно, для этого распада различие между двумя фазами $\phi_1-\phi_2=\gamma+\beta$ большое, поэтому независимо от величины r нет гарантии, что $C_{\pi^+\pi^-}\to 0$ или что $S_{\pi^+\pi^-}$ измеряет $\sin(2\tilde{\beta}+2\gamma)$. Для распада $B_d\to\pi^+\pi^-$ на лето 2005 г. получены следующие значения для CP-нарушающих наблюдаемых:

$$C_{\pi^+\pi^-} = -0{,}37\pm 0{,}11; \quad S_{\pi^+\pi^-} = -0{,}61\pm 0{,}14. \tag{176}$$

В ближайшие годы программа развития B-фабрик на адронных коллайдерах (LHC), без сомнения, улучшит понимание СКМ-механизма CP-нарушения, а возможно, обнаружит проявления «новой» физики. Среди тех задач, которые могли бы быть решенными, следует отметить:

а) определение $\beta+\gamma$ в распаде $B_d\to\rho\pi$;

б) определение γ в распадах $B^+\to K^+D^0$, $B^+\to K^+\overline{D}^0$, $B^+\to K^+(f_{CP})_D$;

в) нахождение величины $2\beta+\gamma$ в распадах $B_d\to D\ldots$;

г) в B_s-системах измерение Δm_s уменьшает адронные неопределенности при извлечении $|V_{td}|$;

д) поскольку угол χ входит в $B_s^0-\overline{B}_s^0$ смешивание, было бы интересно определить его в $B_s\to D_s^+D_s^-$ распаде. В этом распаде асимметрия стандартной модели мала, поэтому он может быть индикатором «новой» физики.

7.6. Заключение

Преобразования четности и зарядового сопряжения нарушаются в слабых взаимодействиях «максимальным» образом, однако произведение двух этих дискретных преобразований остается довольно-таки хорошей симметрией. Обнаруженное CP-нарушение в каонных системах составляет $\sim 0{,}2\%$, этот процент гораздо выше в распадах B-мезонов. Во Вселенной, как известно, наблюдается огромная асимметрия между материей и антиматерией, и это означает огромную важность CP-нарушения в процессе бариогенезиса. Эта тема будем рассмотрена в следующей главе. Здесь же следует заметить, что CPT-теорема гарантирует $CPT = 1$ в любой Лоренц-инвариантной квантовой теории поля, сохраняющей микропричинность. Поэтому нарушение CP в такой теории требует соответствующего нарушения преобразования обращения времени. Поскольку T — антиунитарное преобразование, то становится необходимым присутствие комплексных относительных фаз между различными интерферирующими амплитудами.

Лагранжиан стандартной модели содержит только одну комплексную фазу δ_{13}. В стандартной модели это единственный источник CP-нарушения. Для объяснения наблюдаемого CP-нарушения СКМ-механизм должен учитывать определенные ограничения. Так, для двух поколений фермионов механизм кваркового смешивания не приводит к CP-нарушению. CP-нарушение присуще только для трех поколений фермионов. В каонных системах CP-нарушающие эффекты проявляются на однопетлевом уровне, причем в присутствии t-кварка. Кроме того, все элементы СКМ должны быть ненулевыми, а кварки определенного заряда — невырождены по массе.

Достаточно ли учета механизма CP-нарушения стандартной модели для объяснения имеющихся экспериментальных данных? По-видимому, в настоящее время (лето 2006 г.) ответ на этот вопрос положительный. Но прогнозы в этом отношении давать трудно. Есть надежды, что будущие эксперименты по CP-нарушению (LHC, B-фабрики) обнаружат необходимость «новой физики». Ждать осталось недолго.

ГЛАВА 8

CP-НАРУШЕНИЕ И БАРИОГЕНЕЗИС

8.1. Введение

В предыдущей главе обсуждалось CP-нарушение в системе K-мезонов в процессах с $|\Delta S| = 2$ и $|\Delta S| = 1$, а также обнаруженное недавно CP-нарушение в системах нейтральных B-мезонов. Это нарушение вызвано механизмом Кобаяши–Маскава, т. е. комплексной фазой $\delta_{\rm KM}$ в матрице, характеризующей связь заряженных кварковых токов с W-бозонами. Казалось бы, масштаб нарушения CP очень мал. Однако это нарушение связано с таким грандиозным явлением, как барионная асимметрия Вселенной. Действительно ли CP-нарушение в системе $K^0 - \overline{K}^0$, т. е. параметр ε_K, имеет отношение к барионной асимметрии Вселенной: $\eta = (n_b - n_{\overline{b}})/n_\gamma \sim 10^{-10}$? В частности, следует ли из экспериментального значения $\operatorname{Re}\varepsilon_K > 0$, что наша Вселенная заполнена материей, а не антиматерией? Если CP-эффекты в K- и B-мезонах объясняются механизмом Кобаяши–Маскава, то можно поставленный выше вопрос переформулировать следующим образом: объясняет ли стандартная модель элементарных частиц совместно со стандартной космологической моделью, наблюдаемое значение η? Ответ (отрицательный!) на этот вопрос был найден сравнительно недавно. В этом разделе мы рассмотрим, как такое заключение было получено, а также некоторые сценарии бариогенезиса вне рамок стандартной модели. Начнем обсуждение с основных положений современной космологии.

8.2. Основы космологии

8.2.1. Стандартная космологическая модель. Текущее понимание крупномасштабной эволюции Вселенной основано на ряде наблюдательных данных. Они включают расширение Вселенной и приближенно изотропное и однородное распределение материи на больших масштабах. Уравнения Эйнштейна общей теории относительности подразумевают, что метрика пространства-времени учитывает эти симметрийные свойства гравитационных источников на больших масштабах. Обычно используется метрика Робертсона–Уокера

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2\right\}, \tag{1}$$

где (t, r, θ, ϕ) — безразмерные сопутствующие координаты, $k = 0, 1, -1$ для пространства с нулевой, положительной и отрицательной кривизной соответственно. Космологические данные свидетельствуют в пользу $k = 0$. Динамическая переменная $R(t)$ — масштабный фактор, имеющий размерность длины. Распределение материи/энергии на больших масштабах обычно моделируется тензором идеальной жидкости $T^\mu_\nu = \operatorname{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, где $\rho(t)$ — полная плотность энергии и излучения во Вселенной, а $p(t)$ — изотропное давление.

Динамические уравнения, определяющие временную эволюцию масштабного фактора, следуют из уравнений Эйнштейна. Подставляя метрический тензор, определяемый из (1) и тензор T_ν^μ в уравнения Эйнштейна, получаем уравнение Фридмана

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \frac{k}{R} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2)$$

Здесь $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$ — параметр Хаббла, определяющий скорость расширения Вселенной в момент t; Λ — космологическая «постоянная» в момент t.

Согласно сценарию раздувающейся Вселенной, Λ-член играет важную роль на очень ранних стадиях эволюции Вселенной, когда вакуумная энергия была доминирующей формой материи во Вселенной, приводя к экспоненциальному росту масштабного фактора. Последние наблюдения свидетельствуют о том, что в настоящее время наибольший вклад в плотность энергии Вселенной вносит «темная» энергия (см. главу 8 части II), которую также можно описать с помощью ненулевой космологической постоянной. Для сценариев бариогенезиса, которые будут обсуждаться ниже, Λ-членом в уравнениях эволюции (2) можно пренебречь.

Ковариантное сохранение тензора T_ν^μ дает еще одно важное соотношение

$$d(\rho R^3) = -p d(R^3). \quad (3)$$

Его можно рассматривать как первое начало термодинамики: полное изменение энергии равно работе, произведенной Вселенной $dU = dA = -pdV$. Как мы увидим ниже, различные формы материи (энергии), которые определяют состояние Вселенной в определенный период ее эволюции, описываются уравнением состояния

$$p = \omega\rho, \quad (4)$$

где $\omega = 1/3, 0, -1$ для случаев Вселенной, состоящей из релятивистских частиц (излучения), нерелятивистских частиц и вакуумной энергии.

При интегрировании выражений (3) и (4) получаем, что плотность энергии $\rho \sim R^{-3(1+\omega)}$. В радиационно-доминирующую эпоху $\rho \sim R^{-4}$. Подставляя эту зависимость в уравнение Фридмана, находим, что в эту эпоху скорость расширения

$$H(t) \sim t^{-1}. \quad (5)$$

На рис. 1 показана эволюция Вселенной и фазовые переходы в ней с точки зрения стандартной модели элементарных частиц и стандартной космологической модели. Сценарии бариогенезиса относятся к промежутку времени между окончанием раздувания и электрослабым фазовым переходом. В эту эпоху, когда частицы стандартной модели были безмассовыми, Вселенная состояла из ультрарелятивистских частиц.

8.2.2. Равновесная термодинамика. Как уже говорилось, сценарии бариогенезиса относятся к эпохе между окончанием раздувания и электрослабым фазовым переходом. В течение этого времени Вселенная расширялась и охлаждалась до температур $T \simeq T_{\text{EW}} \simeq 100$ ГэВ. При этом скорость протекания реакций между частицами была гораздо больше скорости расширения. Раннюю Вселенную можно рассматривать как плотную плазму частиц, находящуюся в термодинамическом равновесии. В некоторых случаях разумно считать эту плазму газом слабовзаимодействующих частиц. Такое приближение, очевидно, не всегда справедливо. В частности, ранняя Вселенная должна содержать неэкранированные неабелевы калибровочные заряды, и их свойства весьма далеки от свойств идеального газа. Напомним равновесные распределения для идеального газа.

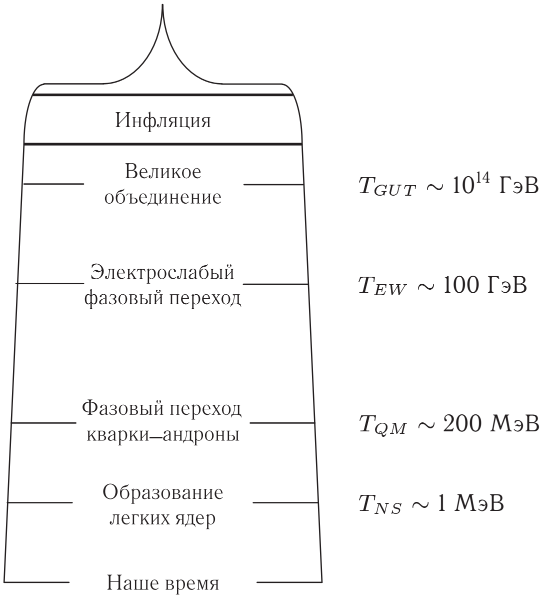


Рис. 1

Поскольку частицы в ранней Вселенной как рождаются, так и «погибают», то естественно описывать их в подходе большого канонического ансамбля. Для частиц сорта A функция распределения

$$f_A(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(E_A-\mu_A)/T} \mp 1}, \tag{6}$$

где T_A — температура, μ_A — химический потенциал для частиц сорта A, связанный с сохранением заряда в ансамбле, знак минус (плюс) относится к бозонам (фермионам). Если различные сорта частиц находятся в химическом равновесии, то их химические потенциалы связаны между собой. Например, пусть имеет место реакция $A + B \rightleftarrows C$. Тогда $\mu_A + \mu_B = \mu_C$. Стандартный пример $e^+ + e^- \to n\gamma$. Поскольку $\mu_\gamma = 0$, то $\mu_{e^+} = -\mu_{e^-}$.

С помощью выражения (6) получаем плотность числа частиц n_A, плотность энергии ρ_A, давление p_A и плотность энтропии s_A:

$$n_A = g_A \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f_A(\vec{p}), \tag{7}$$

$$\rho_A = g_A \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_A(\vec{p}) f_A(\vec{p}), \tag{8}$$

$$p_A = g_A \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}^2}{3E_A} f_A(\vec{p}), \tag{9}$$

$$s_A = \frac{\rho_A + p_A}{T}. \tag{10}$$

В этих выражениях $E_A = \sqrt{\vec{p}^2 + m_A^2}$, m_A — масса частиц A, g_A — число внутренних степеней свободы. Например, $g_e = 2$ для электрона и $g_\nu = 1$ для безмассового нейтрино. В дальнейшем понадобятся выражения (7)–(10) в ультрарелятивистском

($T_A \gg m_A$) и нерелятивистском ($T_A \ll m_A$) случаях. Для релятивистских частиц

$$n_A = a_A g_A T_A^3, \tag{11}$$

$$\rho_A = b_A g_A T_A^4, \tag{12}$$

$$p_A \simeq \rho_A/3. \tag{13}$$

Для нерелятивистских частиц

$$n_A = g_A \left(\frac{m_A T_A}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m_A-\mu_A)/T_A}, \tag{14}$$

$$\rho_A = n_A m_A, \tag{15}$$

$$p_A \simeq n_A T_A \ll \rho_A. \tag{16}$$

В (11) и (12) a_A и b_A — числа, зависящие от того, бозон или фермион частица A. При рассмотрении полной плотности энергии и давления частиц всех сортов удобно выразить эти величины через фотонную температуру T. Если Вселенная была в термодинамическом равновесии, то ее энтропия постоянна. Плотность энтропии

$$s = \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \tag{17}$$

причем последнее равенство возникает в предположении о том, что плотность энтропии определяется вкладом релятивистских частиц. В течение интересующей нас эпохи фактор g_{*s} равен полному числу релятивистских степеней свободы g_* (для $T \gg m_{\text{top}}$ $g_* \simeq 106$ в стандартной модели). Если энтропия постоянна, то $s \sim R^{-3}$, т. е. $g_{*s} T^3 R^3 = \text{const}$. Отсюда получаем, что температура на радиационно-доминирующей стадии

$$T \sim R^{-1}. \tag{18}$$

Из этого рассмотрения можно извлечь и другое важное следствие. Пусть N_A — число частиц сорта A. Поскольку $N_A = R^3 n_A \sim n_A/s$, то это отношение остается постоянным в процессе расширения Вселенной, если нет нарушения «A-числа» или рождения дополнительной энтропии. В контексте бариогенезиса соответствующая величина — отношение $n_B/s = (n_B - n_{\overline{B}})/s$, где n_B и $n_{\overline{B}}$ — плотности барионов и антибарионов. Тогда барионная асимметрия Вселенной $\eta = n_B/s = n_B/n_\gamma$ запишется в виде $\eta = 1{,}8 g_{*s}(n_B/s)$. Число релятивистских степеней свободы g_{*s} уменьшается при расширении ранней Вселенной. Это число, как и величина η, остается постоянным только после e^+e^--аннигиляции. В этом случае

$$\eta \simeq 7\frac{n_B}{s}. \tag{19}$$

8.2.3. Отклонения от термодинамического равновесия. Отклонения от термодинамического равновесия весьма существенны с точки зрения того состояния, в котором находится Вселенная в настоящее время. Примерами отклонений от термодинамического равновесия являются «отщепление» нейтрино и фонового электромагнитного излучения и нуклеосинтез. Грубым критерием нахождения частицы сорта A в термодинамическом равновесии является сравнение скорости реакции Γ_A со скоростью расширения H. Пусть $\sigma(A + \text{мишень} \to X)$ — полное сечение реакции с участием частицы A, необходимой для поддержания термодинамического равновесия. Тогда

$$\Gamma_A = \sigma(A + \text{мишень} \to X) n_{\text{мишень}} |\vec{v}|, \tag{20}$$

где $n_{\text{мишень}}$ — плотность мишени, $|\vec{v}|$ — относительная скорость частицы A и мишени.

Если

$$\Gamma_A \geq H, \tag{21}$$

то реакции, включающие частицу A, не выводят ее из состояния термодинамического равновесия. Если же

$$\Gamma_A < H, \tag{22}$$

то ансамбль частиц A выходит из состояния равновесия.

Параметр Хаббла $H(t)$, существенный для сценариев бариогенезиса, есть не что иное, как скорость расширения в течение радиационно-доминирующей эпохи. Как следует из (2) и (12), в течение этой эпохи

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G_N}{3}\rho} = 1{,}66\sqrt{g_*}\frac{T^2}{m_{\mathrm{Pl}}}, \tag{23}$$

где $m_{\mathrm{Pl}} = 1{,}22 \cdot 10^{19}$ ГэВ — планковская масса. Введем отношение

$$Y_A = \frac{n_A}{s} \tag{24}$$

и рассмотрим это отношение как функцию температуры для ансамбля массивных частиц A, «отщепляющихся» от теплового «резервуара» (рис. 2). В термодинамическом равновесии $Y_A \simeq \mathrm{const}$ для $T \gg m_A$. При более поздних временах, когда $T \leq m_A$, $Y_A \sim (m_A/T)^{3/2} \times \exp(-m_A/T)$, если скорость реакции удовлетворяет условию (21). Таким образом, если бы частицы A оставались в термодинамическом равновесии до сегодняшних дней, то их избыток был бы ничтожным. Однако, если Γ_A становится меньше H, то взаимодействие частиц A «вымораживается», и действительный избыток частиц A отличается от равновесных значений при температуре T. Чем больше сечение $A\overline{A}$-аннигиляции, тем меньше температура «закалки» и меньше избыток Y_A. Дальнейшая судьба «отщепленных» сортов A частиц зависит от того, стабильны или нет эти частицы. Если (квази)стабильные сорта A являются слабовзаимодействующими массивными частицами, температура «закалки» которых T не меньше m_A, то их избыток в настоящее время может быть значительным.

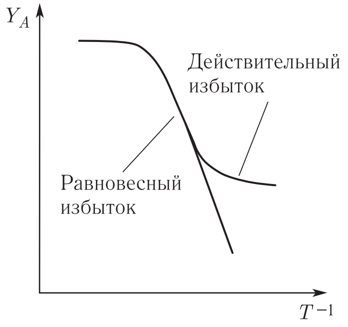


Рис. 2

8.3. Барионная асимметрия Вселенной

Обратимся теперь к асимметрии «материя-антиматерия» в наблюдаемой Вселенной. До сих пор «реликтовая» антиматерия не наблюдалась. Космические лучи содержат антипротоны на уровне $n_{\overline{p}}/n_p \simeq 10^{-4}$, но это число согласуется с сечением реакции $p + p \to 3p + \overline{p}$ в межзвездной среде. Кроме того, вблизи Земли не обнаружено антиядер типа $\overline{\mathrm{D}}$, $\overline{\mathrm{He}}$.

Если предположить, что большие разделенные домены материи и антиматерии существуют (например, галактики и антигалактики), то на границе должны происходить процессы аннигиляции, дающие вклад в γ-излучение. Но никаких аномалий в γ-спектрах до сих пор не обнаружено. Можно сказать, что на масштабах между 100 Мпс и 1 Гпс Вселенная состоит только из материи. Какой механизм мог бы

разделить материю и антиматерию на таких больших масштабах? Попытки ответить на этот вопрос будут рассмотрены ниже.

Что касается видимой Вселенной, то для нее

$$n_b - n_{\bar{b}} \simeq n_b \Rightarrow \eta = \frac{n_b}{n_\gamma}. \tag{25}$$

Как определяется величина η? Нужно оценить число барионов во Вселенной и сравнить n_b с плотностью реликтового излучения $n_\gamma = 23(3)(T^3/\pi^2) \simeq 420/\text{см}^3$ при температуре $T = 2{,}7$ К.

Если использовать наблюдательные данные по концентрации легких ядер p, D, ^{3}He, ^{4}He и т. д., то получим оценку

$$\eta \simeq (1{,}2 \div 5{,}7) \cdot 10^{-10}. \tag{26}$$

Можно ли порядок величины барионной асимметрии Вселенной понять на основе стандартной космологической модели без привлечения дополнительных предположений? Ответ отрицательный! Оказывается, чтобы понять ограничение (26), нужно предположить, что барионная асимметрия присутствовала уже на ранних стадиях эволюции Вселенной. Действительно, согласно представлениям стандартной космологической модели, при Большом Взрыве рождается одинаковое число кварков и антикварков. Если нет взаимодействий, нарушающих барионное число, то на определенной стадии эволюции Вселенной будет одинаковое число нуклонов и антинуклонов. Вычислим плотности нуклонов и антинуклонов. При температурах ниже массы нуклона m_N плотности нуклонов и антинуклонов в состоянии термодинамического равновесия

$$\frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \simeq \left(\frac{m_N}{T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_N}{T}\right). \tag{27}$$

«Закалка» антинуклонов происходит тогда, когда $\Gamma_{\text{анн.}} = n_b \langle \sigma_{\text{анн.}} |\vec{v}| \rangle$ становится меньше скорости расширения. Если выбрать $\sigma_{\text{анн.}} \sim 1/m_\pi^2$ и использовать соотношение (23), то получим температуру $T \simeq 20$ МэВ. Тогда из (27) видно, что в момент закалки $n_b/n_\gamma = n_{\bar{b}}/n_\gamma \simeq 10^{-18}$, что на 8 порядков меньше наблюдаемой величины! Чтобы предотвратить $N\overline{N}$-аннигиляцию посредством некоторого механизма, следует допустить $T > 40$ МэВ, при этом $n_b/n_\gamma = n_{\bar{b}}/n_\gamma \simeq 10^{-10}$, и нуклоны отделены от антинуклонов. Однако причинно связанная область в этот момент времени содержит только 10^{-7} солнечных масс. Следовательно, этот механизм разделения будет совершенно бесполезным для генерации нашей Вселенной, состоящей из барионов.

Таким образом, следует допустить, что Вселенная уже в ранние времена ($T > 40$ МэВ) обладает асимметрией между числом барионов и антибарионов. Как эта асимметрия возникает? Можно предположить небольшой избыток барионов уже в момент Большого Взрыва, но это не слишком привлекательная идея. Необходимы более «естественные» модели барионной асимметрии Вселенной.

8.3.1. Условия Сахарова. В 1967 г., через три года после обнаружения CP-нарушения в распаде $K_L \to 2\pi$, А. Д. Сахаров заметил, что барионная асимметрия может динамически возникать при эволюции Вселенной из начального состоянии с барионным числом, равным нулю, если выполняются следующие три условия:

1) нарушается барионное число B;

2) нарушаются C- и CP-симметрии;

3) нарушается термодинамическое равновесие.

Первое условие достаточно очевидно. Второе условие означает, что оператор барионного числа $\widehat{B}$ — нечетен при C- и CP-преобразованиях (см. приложение 1). Поэтому ненулевое барионное число, т. е. ненулевое среднее $\langle\widehat{B}\rangle$ означает, что в гамильтониане H нарушаются C- и CP-симметрии.

Что касается третьего условия, необходимо заметить, что система в термодинамическом равновесии стационарна и описывается оператором плотности $\rho = \exp(-H/T)$. Используя $\widehat{B}(t) = e^{iHt}\widehat{B}(0)e^{-iHt}$, получаем

$$\langle\widehat{B}(t)\rangle_T = \mathrm{tr}\big(e^{-H/T}e^{iHt}\widehat{B}(0)e^{-iHt}\big) = \mathrm{tr}\big(e^{-iHt}e^{-H/T}e^{iHt}\widehat{B}(0)\big) = \langle\widehat{B}(0)\rangle_T.$$

Если гамильтониан H инвариантен относительно $CPT = \theta$, т. е. $\theta^{-1}H\theta = H$, то для квантовомеханического среднего оператора $\widehat{B} = \widehat{B}(0)$ следует

$$\langle\widehat{B}\rangle_T = \mathrm{tr}(e^{-H/T}\widehat{B}) = \mathrm{tr}(\theta^{-1}\theta e^{-H/T}\widehat{B}) = \mathrm{tr}(e^{-H/T}\theta\widehat{B}\theta^{-1}) = -\langle\widehat{B}\rangle_T, \tag{28}$$

где использована нечетность оператора $\widehat{B}$ при CPT-преобразованиях.

Итак, в состоянии термодинамического равновесия $\langle\widehat{B}\rangle_T = 0$.

Как обеспечить в термодинамическом равновесии равенство нулю среднего значения барионного числа?

Рассмотрим ансамбль тяжелых частиц сорта X, имеющих две нарушающих барионное число моды распада $X \to qq$ и $X \to l\overline{q}$ в кварки и лептоны. Предположим также нарушение C и CP в этих распадах, т. е. асимметрию в парциальных ширинах частиц X и их античастиц $\overline{X}$:

$$\Gamma(X \to qq) = (1+\varepsilon)\Gamma_0, \quad \overline{\Gamma}(\overline{X} \to \overline{qq}) = (1-\varepsilon)\Gamma_0. \tag{29}$$

Будем предполагать CPT-инвариантность, тогда полные ширины распадов X и $\overline{X}$ будут одинаковыми. В распадах X и $\overline{X}$ возникает ненулевое барионное число ΔB. Допустим, что ансамбль находится в термодинамическом равновесии. Если привлечь принцип детального равновесия, то окажется, что обратный процесс $qq \to X$ будет более вероятным, чем $\overline{qq} \to \overline{X}$. При этом избыток $\Delta B \neq 0$ мог бы возникать за счет этого механизма. Но принцип детального равновесия основан на T-инвариантности, а T-симметрия нарушена, если CP нарушена и $CPT = 1$.

Если применить CPT-преобразование к рассматриваемым распадам, то для обратных распадов

$$\Gamma(qq \to X) = (1-\varepsilon)\Gamma_0, \quad \Gamma(\overline{qq} \to \overline{X}) = (1+\varepsilon)\Gamma_0. \tag{30}$$

Исключение избытка барионного числа ΔB достигается за счет B-нарушающих реакций $qq \to l\overline{q}$, $\overline{qq} \to \overline{l}q$ и CPT-преобразованных реакций с участием X и $\overline{X}$.

Для иллюстрации условий А. Д. Сахарова представим себе, что Большой Взрыв создан в некотором объеме, который «нагревается» до температур, скажем, превышающих массу нуклона. В этом объеме возникают пары частиц и античастиц, взаимодействующие друг с другом. Нестабильные частицы распадаются и т. д. Мезоны K^0 и $\overline{K}^0$ распространяются как когерентные суперпозиции K_L и K_S. Эти состояния имеют CP-нарушающие распады (например, $K_L \to \pi\pi$), а также имеется наблюдаемая CP-нарушающая зарядовая асимметрия в полулептонных распадах $K_L \to \pi^{\mp}l^{\pm}\nu$. Оказывается, что в распадах K^0 и $\overline{K}^0$ рождается несколько больше $\pi^-l^+\nu_e$, чем $\pi^+l^-\nu_e$. Следовательно, если изначально было одинаковое число K^0 и $\overline{K}^0$, то их распады порождают больше π^-, чем π^+. Если система находится в термодинамическом равновесии, CP-нарушение в реакциях $\pi^+l^- \to \pi^+\pi^-\nu_e$ и $\pi^-l^+ \to \pi^+\pi^-\overline{\nu}_e$

будет «вымывать» временной избыток π^-. Если же возникает температурная нестабильность (объем открыт), то избыток l^+ от распада нейтрального каона уходит из системы. В этом случае обратная реакция с участием l^+ оказывается подавленной, возникает мезонная асимметрия $(N_{\pi^-} - N_{\pi^+}) > 0$. Хотя этот пример и показывает, как может возникать асимметрия, он далек от нашей цели, поскольку мы «не включили» B-нарушающие реакции.

В общем случае условия Сахарова являются достаточными, но не необходимыми для генерации ненулевого барионного числа.

8.4. CP- и B-нарушение в стандартной модели

В стандартной модели C- и CP-симметрии нарушаются в заряженных кварковых взаимодействиях лагранжиана

$$L_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{U}_L\gamma^\mu V_{\text{KM}} D_L W_\mu^+ + \text{э.с.}, \tag{31}$$

где $U_L = (u_L, c_L, t_L)^T$, $D_L = (d_L, s_L, b_L)^T$ обозначают левые кварковые поля, V_{KM} — матрица Кабиббо–"Кобаяши–Маскава. CP нарушается, если фаза $\delta_{\text{KM}} \neq 0, \pm\pi$. Этим «механизмом» объясняются CP-нарушения в системах K- и B-мезонов.

Таблица 1

	q	$\overline{q}$	l	$\overline{l}$
B	1/3	−1/3	0	0
L	0	0	1	−1

Можно обнаружить в стандартной модели и нарушение барионного числа, но это чисто непертурбативный эффект, который практически не проявляется при имеющихся энергиях, но весьма важен для физики ранней Вселенной. Рассмотрим, как возникает нарушение барионного числа. Как хорошо известно, барионное и лептонные числа, приписываемые кваркам и лептонам (табл. 1), являются сохраняющимися квантовыми числами.

В стандартной модели это сохранение связано с инвариантностью лагранжиана $L_{SM}(x)$ относительно глобальных $U(1)_B$- и $U(1)_L$-преобразований кварковых и лептонных полей $q = u, \ldots, t$; $l = e, \ldots, \nu_\tau$.

$$q(x) \to e^{i\omega/3}q(x); \qquad l(x) \to l(x). \tag{32}$$

$$l(x) \to e^{i\lambda}l(x); \qquad q(x) \to q(x). \tag{33}$$

Применяя теорему Нетер, получаем соответствующие токи J_μ^B и J_μ^L, которые сохраняются на борновском уровне:

$$\partial^\mu J_\mu^B = \partial^\mu \sum_q \frac{1}{3}\overline{q}\gamma_\mu q = 0, \tag{34}$$

$$\partial^\mu J_\mu^L = \partial^\mu \sum_l \overline{l}\gamma_\mu l = 0. \tag{35}$$

Тогда ассоциированные с этими токами заряды

$$\widehat{B} = \int d^3x J_0^B(x), \tag{36}$$

$$\widehat{L} = \int d^3x J_0^L(x) \tag{37}$$

не зависят от времени.

С учетом квантовых флуктуаций (вне борновского приближения), эти симметрии, очевидно, нарушены, т. е. соотношения (34) и (35) уже не справедливы. Это можно обнаружить следующим образом. Разложим векторный ток

$$\overline{f}\gamma_\mu f = \overline{f}_L\gamma_\mu f_L + \overline{f}_R\gamma_\mu f_R, \tag{38}$$

где $f = q, l$.

На квантовом уровне калибровочно-инвариантные токи не сохраняются, это связано с аномалией Адлера–Белла–Джекива. Для калибровочной теории, основанной на группе G, являющейся простой группой Ли размерности d_G, уравнение для аномалий L и R токов: $\overline{f}_L\gamma_\mu f_L$ и $\overline{f}_R\gamma_\mu f_R$ записывается в виде:

$$\partial^\mu\overline{f}_L\gamma_\mu f_L = -C_L\frac{g^2}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu}, \tag{39}$$

$$\partial^\mu\overline{f}_R\gamma_\mu f_R = +C_R\frac{g^2}{32\pi^2}F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\mu\nu}, \tag{40}$$

где $F^{a\mu\nu}$ — неабелев полевой тензор ($a = 1, \ldots, d_G$) и $\tilde{F}^{a\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\alpha\beta}/2$ — дуальный тензор, g — калибровочная константа; C_L и C_R зависят от представлений полей f_L и f_R. Применим соотношения (38 — 40) к барионным и лептонным токам стандартной модели с калибровочной группой $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Поскольку глюоны связаны с правыми и левыми кварковыми токами одинаково, то $C_L^{\text{КХД}} = C_R^{\text{КХД}}$. Поэтому J^B_μ не имеет КХД-аномалии.

Но слабые калибровочные бозоны W^a_μ ($a = 1, 2, 3$) связаны только с левыми кварками и лептонами, а слабый гиперзарядный бозон связан с f_L и f_R по-разному. Следовательно, $C_R^W = 0$ и $C_L^Y \neq C_R^Y$. Собирая все вместе, получаем

$$\partial^\mu J^B_\mu = \partial^\mu J^L_\mu = \frac{n_F}{32\pi^2}\left(-g_W^2 W^a_{\mu\nu}\tilde{W}^{a\mu\nu} + g'^2 B_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu\nu}\right), \tag{41}$$

где $W^a_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ обозначают $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$ полевые тензоры, g' — $U(1)_Y$ калибровочная константа, $n_F = 3$ — число поколений.

Выражение (41) подразумевает, что $\partial^\mu(J^B_\mu - J^L_\mu) = 0$. Таким образом, разность барионных и лептонных операторов $\widehat{B} - \widehat{L}$ не зависит от времени, т. е. на квантовом уровне разность квантовых чисел $B - L$ в стандартной модели сохраняется.

Правую часть выражения (41) можно записать как дивергенцию тока K^μ:

$$(\text{правая часть (41)}) = n_F\partial_\mu K^\mu, \tag{42}$$

где

$$K^\mu = -\frac{g_W^2}{32\pi^2}2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}W^a_\nu\left(\partial_\alpha W^a_\beta + \frac{g_W}{3}\varepsilon^{abc}W^\beta_\alpha W^c_\beta\right) + \frac{g'^2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}B_\nu B_{\alpha\beta}. \tag{43}$$

Используя (42), проинтегрируем (41) по пространству-времени. С помощью теоремы Гаусса преобразуем эти интегралы в интегралы по поверхности. Найдем сначала первый интеграл по поверхности в выражении (41). Для гиперзарядных калибровочных полей B_μ с соответствующим поведением на бесконечности ($B_{\alpha\beta}(\infty) \to 0$) абелева часть K^μ не дает вклада в интеграл. Для неабелевых калибровочных полей W^a_ν обращение в ноль напряженности полей подразумевает условие на бесконечности $2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\alpha W^{\alpha\beta} = -g_W\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{abc}W^{b\alpha}W^{c\beta}$. Тогда

$$\int d^4x\partial_\mu K^\mu = \frac{g_W^3}{96\pi^2}\int\limits_{\partial V_4} dn^\mu\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{abc}W^{a\nu}W^{b\alpha}W^{c\beta}. \tag{44}$$

Выберем в качестве поверхности ∂V_4 цилиндр с поверхностями оснований t_f и t_i. Пусть объем цилиндра стремится к бесконечности. Поскольку $\partial_\mu K^\mu$ — калибровочно-инвариантная величина, можно выбрать специальную калибровку $W_0^a = 0$. Тогда боковая поверхность цилиндра не вносит вклада в интеграл, т. е.

$$\int d^3x\, dt\, \partial_\mu K^\mu = N_{\rm CS}(t_f) - N_{\rm CS}(t_i) \equiv \Delta N_{\rm CS}, \tag{45}$$

где величина

$$N_{\rm CS}(t) = \frac{g_W^2}{96\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} W^{ai} W^{bj} W^{ck} - \tag{46}$$

так называемый член Черна–Саймона. Этот интеграл приписывает топологический заряд классическому калибровочному полю. На самом деле, калибровочно-инвариантной величиной является не $N_{\rm CS}$, а $\Delta N_{\rm CS}$. Неабелева калибровочная теория, подобная $SU(2)_L$, топологически нетривиальна, т. е. имеет бесконечно много вакуумных состояний с различными топологическими зарядами $\Delta N_{\rm CS} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Выберем набор калибровочных и хиггсовских полей и рассмотрим функционал E[поля], образующий гиперповерхность в бесконечномерном пространстве. Основные состояния с различными топологическими зарядами будут разделяться потенциальными барьерами. На рис. 3 показано одномерное сечение этой гиперповерхности.

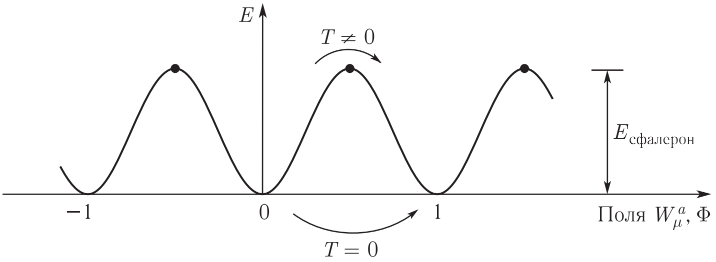


Рис. 3

Как видно из этого рисунка, вакуумная структура электрослабой теории имеет периодический характер. Числа $0, \pm 1$ обозначают числа Черна–Саймона $N_{\rm CS}$ полевых конфигураций с нулевой энергией.

Если вернуться снова к (41) и вычислить интеграл в левой части, то

$$\Delta \widehat{B} = \Delta \widehat{L} = n_F \Delta N_{\rm CS}. \tag{47}$$

При этом $\Delta \widehat{Q} = \widehat{Q}(t_f) - \widehat{Q}(t_i)$, $Q = B, L$. Выражение (47) можно интерпретировать следующим образом. Если рассматриваются малые квантовые флуктуации калибровочных полей относительно пертурбативной вакуумной конфигурации $W_\mu^a = 0$, то правая часть (47) равна нулю, т. е. B и L сохраняются. Это означает, что в теории возмущений (в любом порядке) B- и L-нарушающие процессы имеют нулевые амплитуды. Однако существуют калибровочные поля $W_\mu^a \sim 1/(g_W)$ с ненулевым топологическим зарядом $\Delta N_{\rm CS} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Как показал т'Хоофт, на квантовом уровне эти поля способны индуцировать переходы между фермионными состояниями $|i, t_i\rangle$ и $|f, t_f\rangle$, причем в этих переходах

$$\Delta B = \Delta L = n_F \Delta N_{\rm CS}. \tag{48}$$

Отсюда видно, что B и L могут изменяться, по крайней мере, на три единицы.

При температуре $T = 0$ переходы с $|\Delta B| = |\Delta L| = 3$ осуществляются инстантонами — полевыми конфигурациями, связывающими вакуумы с топологическими числами, отличающимися на ± 1. В калибровке $W_0^a = 0$ инстантонное поле $W_i^a(\vec{x}, t) \to \to W_i^a = 0$ при $t_i \to -\infty$. При $t_f \to +\infty$ инстантонное поле переходит в топологически нетривиальную вакуумную конфигурацию с $N_{\text{CS}} = 1$. Соответствующие амплитуды перехода $\langle f, t_f || i, t_i \rangle$ содержат 9 левых кварков (правых антикварков), причем каждое поколение входит с 3-мя левыми лептонами (правыми антилептонами). Одна из возможных амплитуд $B + L$ $(B + L)$-нарушающих процессов показана на рис. 4.

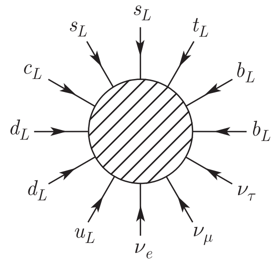


Рис. 4

Стрелками показаны «потоки» фермионных квантовых чисел. Существуют, например, индуцированные антиинстантонами реакции с $\Delta B = \Delta L = -3$:

$$u + d \to \overline{d} + 2\overline{s} + \overline{c} + 2\overline{b} + \overline{t} + \overline{\nu}_e + \overline{\nu}_\mu + \overline{\nu}_\tau. \tag{49}$$

Какова вероятность подобного перехода? Как видно из рис. 3, такой переход осуществляется путем туннелирования. Следовательно, он должен быть экспоненциально подавленным. Следуя классическим расчетам т'Хоофта, для энергий $E_{cm}(ud) \simeq$ ТэВ-а сечение

$$\sigma_{\not{B}+\not{L}} \sim e^{-\frac{4\pi}{\alpha_W}} \sim 10^{-164}, \tag{50}$$

где $\alpha_W = g_W^2/(4\pi) \simeq 1/30$.

Если же стандартная модель рассматривается при ненулевых температурах, то ситуация изменяется. Оказывается, при температурах $T > T_{\text{EW}} \sim 100$ ГэВ B- и L-нарушающие процессы способны играть заметную роль в бариогенезисе. Чтобы это понять, снова обратимся к рис. 3. Основные состояния с различными N_{CS} разделены потенциальным барьером минимальной величины

$$E_{\text{sph}}(T) = \frac{4\pi}{g_W} v_T f\left(\frac{\lambda}{g_W}\right), \tag{51}$$

где $v_T = \langle 0|\Phi|0\rangle_T$ — вакуумное среднее хиггсовского дублета $\Phi(x)$ при температуре T. При $T = 0$, как обычно, $v_{T=0} \simeq 246$ ГэВ. Параметр f изменяется в интервале $1{,}6 < f < 2{,}7$ в зависимости от константы связи хиггсовского бозона, т. е. от массы Хиггс-бозона. Это дает $E_{\text{sph}}(T = 0) \simeq 8 \div 13$ТэВ. Индекс «sph» относится к сфалерону — конфигурации калибровочных и хиггсовских полей с числом Черна–Саймона 1/2 (плюс целое число), которая является нестабильным решением классических уравнений движения в калибровочно-хиггсовском секторе стандартной модели. Как следует из рис. 3, если энергия температурных возбуждений ниже высоты барьера, то скорость переходов с нарушением фермионного числа пропорциональна больцмановскому фактору $\exp(-E_{\text{sph}}(T)/T)$. При этом неподавленные переходы происходят тогда, когда энергия температурных возбуждений превышает высоту барьера. Заметим, что электрослабая $SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочная симметрия при высоких температурах не нарушена, т. е. в ранней Вселенной. Как известно, переход от $v_T \neq 0$ к $v_T = 0$ в стандартной модели происходит при температурах ~ 100 ГэВ. Следовательно, при таких температурах B- и L-нарушающие переходы уже не являются экспоненциально подавленными. В фазе с нарушенной электрослабой симметрией ($T < T_{\text{EW}} \simeq 100$ ГэВ) скорость сфалерон-индуцированных $\not{B} + \not{L}$-переходов

в объеме V:

$$\frac{\Gamma^{\rm sph}_{B+L}}{V} = K_1\left(\frac{m_W}{\alpha_W T}\right)^3 m_W^4 \exp\bigl(-E_{\rm sph}(T)/T\bigr), \tag{52}$$

где $m_W(T) = g_W v_T/2$ — зависящая от температуры масса W-бозона, K_1 — безразмерная константа.

Вычисление скорости перехода в ненарушенной фазе достаточно сложно. Из размерных соображений, эта скорость $\sim T^4$. Более точные оценки дают:

$$\frac{\Gamma^{\rm sph}_{\not B+\not L}}{V} = K_2 \alpha_W^5 T^4, \tag{53}$$

причем $K_2 \sim 21$.

Сравним $\Gamma^{\rm sph}_{\not B+\not L}$ при $T > T_{\rm EW}$ со скоростью расширения Вселенной (23). Если потребовать $\Gamma^{\rm sph}_{\not B+\not L} \gg H$, то процессы с нарушением $B+L$ будут находиться в термодинамическом равновесии в интервале температур

$$T_{\rm EW} \sim 100\ \text{ГэВ} < T \leq 10^{12}\ \text{ГэВ}. \tag{54}$$

Этот результат очень важен для процесса бариогенезиса, происходящего при температурах $T > T_{\rm EW}$. Если B- и L-нарушающие взаимодействия сохраняют разность $B-L$, то любой избыток барионного и лептонного числа, образованный при $T > T_{\rm EW}$, будет «вымываться» за счет B- и L-несохраняющих переходов. Таким образом, сценарии бариогенезиса при $T > T_{\rm EW}$ должны быть основаны на моделях частиц, в которых имеет место нарушение $B-L$.

8.5. Электрослабый бариогенезис

Пока для объяснения барионной асимметрии в рамках стандартной модели мы не обсуждали третье условие Сахарова. Это условие отклонения от термодинамического равновесия. Очевидно, что скорость расширения Вселенной при температурах $T \leq 10^{12}$ ГэВ слишком мала, чтобы вызвать отклонения от термодинамического равновесия: скорости реакций большинства частиц стандартной модели с $\Gamma \sim \alpha_W^2 T$ гораздо больше скорости расширения (23). Заряженные кварковые токи в этот период являются единственным источником CP-нарушения, поскольку помимо нетривиальной фазы Кобаяши–Маскава, кварки u- и d-типа имеют невырожденные массы. Эти массы генерируются в процессе EW-перехода. Если $\Delta B \neq 0$ возникает при EW-переходе, то это значение $\Delta B \neq 0$ сохраняется в течение последующей эволюции Вселенной, поскольку B- и L-нарушающие реакции при $T < T_{\rm EW}$ сильно подавлены (52). Однако EW-переход в стандартной модели оказывается недостаточным для формирования требуемой температурной нестабильности.

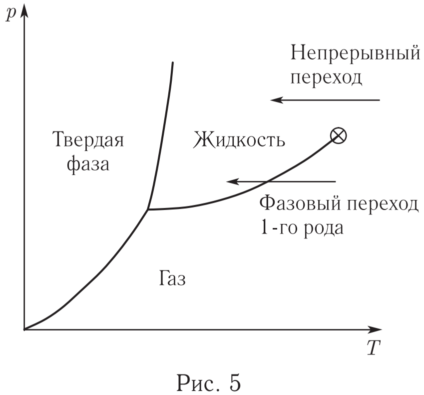


Рис. 5

Прежде чем обсуждать природу EW-перехода в стандартной модели, напомним основные концепции фазовых переходов. Рассмотрим рис. 5, на котором в осях «давление–температура» изображена фазовая диаграмма воды.

Нас будет интересовать фазовый переход «пар–жидкость». Кривая справа от тройной точки называется кривой «пар–давление». Для величин p, T вдоль этой линии сосуществуют жидкая и газовая фазы. Изменение параметров, приводящее к пересечению этой кривой, вызывает фазовый переход 1-го рода, становящийся все более слабым при движении к точке, обозначенной крестиком. Эта точка соответствует фазовому переходу 2-го рода. За этой точкой переход от газовой к жидкой фазе происходит плавно.

Как обычно, природу фазового перехода можно охарактеризовать с помощью параметра порядка. Для перехода «пар–жидкость» это разность плотностей воды в жидкой и газообразной фазах: $\tilde{\rho} = \rho_{\text{ж.}} - \rho_{\text{пар.}}$. В случае фазового перехода 1-го рода параметр порядка при критической температуре T_C испытывает скачок. В нашем примере $\tilde{\rho}$ очень мал в газовой фазе и испытывает скачок при T_C из-за сосуществования двух фаз. Это как раз и нужно для осуществления EW-сценария бариогенезиса! В случае фазового перехода 2-го рода параметр порядка вблизи T_C тоже быстро изменяется, но скачок при этом отсутствует (рис. 6).

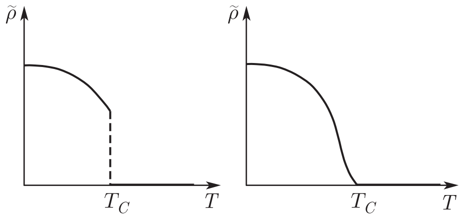


Рис. 6

В области кроссовера фазовой диаграммы непрерывное изменение $\tilde{\rho}$ как функции T менее выражено.

До сих пор рассматривались статические фазовые переходы. Что касается динамики, мы знаем из опыта, как фазовый переход 1-го рода «жидкость–пар» эволюционирует во времени. При нагревании воды в ней возникают пузырьки пара. Затем они расширяются, и при температурах $T \geq T_C$ начинают пересекаться между собой.

В ранней Вселенной нужно рассматривать обратный процесс — остывание пара и образование капель жидкости.

Обратимся к стандартному теоретическому методу определения природы фазового перехода в классической системе типа «пар–жидкость» или «парамагнетик–ферромагнетик». Пусть $H = H(S)$ — классический гамильтониан системы, где $\vec{S}(x)$ — многокомпонентное классическое поле. Для воды $\vec{S}(x)$ — локальная плотность, для магнитных материалов $\vec{S}(x)$ — трехкомпонентная локальная намагниченность. Далее нужно вычислить термодинамическую функцию Z и свободную энергию $F = -T \ln Z$ и другие интересующие термодинамические функции. Например, можно найти параметр порядка $S_{\text{ср.}} = \langle \sum\limits_{x} S(\vec{x}) \rangle_T$ и изучить его поведение как функцию температуры.

Исследование статических термодинамических свойств калибровочный полей происходит по аналогичному сценарию. В электрослабой теории роль параметра порядка играет вакуумное среднее хиггсовского дублетного поля. Действительно, эксперимент свидетельствует о том, что $SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочная симметрия нарушена при $T = 0$. Это означает, что массовый параметр в хиггсовском потенциале должен быть подобран так, чтобы существовало это ненулевое вакуумное среднее. С другой стороны, известно, что при температурах, превышающих массу W- и Z-бозонов, вакуумное среднее хиггсовского поля обращается в ноль, а симметрия $SU(2)_L \times U(1)_Y$ восстанавливается. Следовательно, при эволюции ранней Вселенной хиггсовское поле должно сконденсироваться при некоторой температуре $T = T_C$. При этом порядок фазового перехода можно определить из анализа поведения вакуумного среднего хиггсовского поля (и других термодинамических величин) вблизи T_C.

Рассмотрим электрослабую теорию при температуре TT. Свободную энергию $F = -T \ln Z$ можно получить из евклидова функционального интеграла

$$F(J,T) = -T \ln\Big[\int\limits_{\beta} D[\text{поля}] e^{-\int\limits_{\beta} dx(L_{\text{EW}}+J\phi)}\Big], \tag{55}$$

где $L_{\text{EW}} = L_{\text{EW}}(\phi, W_\mu^a, B_\mu, q, l)$ — евклидова версия электрослабого лагранжиана; J — аксиальное внешнее поле, $\beta = 1/T$, а интеграл в показателе exp равен

$$\int\limits_{\beta} dx = \int\limits_0^{\beta} d\tau \int\limits_V d^3x. \tag{56}$$

Индекс β в функциональном интеграле указывает, что бозонные (фермионные) поля удовлетворяют при $\tau = 0$ и $\tau = \beta$ (анти)периодическим граничным условиям $\tau = 0$ $\tau = \beta$.

Из плотности свободной энергии $F(J,T)/V$ эффективный потенциал $V_{\text{eff}}(\phi,T)$ получается с помощью преобразования Лежандра, причем $\phi = \partial F/\partial J|_{J=0}$ — среднее хиггсовского дублета $\phi = \langle\Phi\rangle_T$. Заметим, что эффективный потенциал $V_{\text{eff}}(\phi,T)$ — это плотность энергии системы в состоянии $|a\rangle_T$, в котором $\langle a|\Phi|a\rangle_T = \phi$. Поэтому, вычисляя стационарные точки $\partial V_{\text{eff}}/\partial\phi = 0$, получаем значения $\phi = \langle 0|\Phi|0\rangle_T$ поля Φ при заданной температуре. Если при некоторой температуре $T = T_C$ существуют два минимума, то это свидетельствует в пользу сосуществования фаз и фазового перехода первого рода.

8.5.1. Эффективный потенциал стандартной модели. При $T = 0$ «древесный» эффективный потенциал — классический хиггсовский потенциал $V_{\text{tree}} = -\mu^2(\Phi^+\Phi) + \lambda(\Phi^+\Phi)^2$. В унитарной калибровке $\Phi^{\text{unit}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, и эффективный потенциал

$$V_{\text{tree}} = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4, \tag{57}$$

где $\lambda > 0$ и $\mu^2 > 0$, чтобы хиггсовское поле имело состояние с минимальной энергией: $\phi_0 = \langle 0|\Phi|0\rangle_{T=0} = v_{T=0}/\sqrt{2} = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ и $v_{T=0} = 246$ ГэВ. Масса хиггсовского бозона

$$\text{т}_H = v_{T=0}\sqrt{2\lambda} + \text{квант. поправки}. \tag{58}$$

По данным LEP $m_H > 114$ ГэВ, поэтому хиггсовская константа связи $\lambda > 0{,}33$. При $T \neq 0$ построение V_{eff} обсуждалось выше. Поскольку калибровочная константа g' и юкавские константы связи кварков и лептонов $f \neq t$ (t обозначает t-кварк) с хиггсовским дублетом Φ малы, вкладами гиперзарядного калибровочного бозона можно пренебречь. В качестве иллюстрации обсудим однопетлевой эффективный потенциал для случая очень легкого хиггсовского бозона. При высоких температурах

$$V_{\text{eff}}(\phi,T) = \frac{1}{2}a(T^2 - T_1^2)\phi^2 - \frac{1}{3}bT\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4, \tag{59}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{16}g_W^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{m_t^2}{m_H^2}\right)\lambda, \\ b &= 9\frac{g_W^3}{32\pi}, \\ T_1 &= \frac{m_H}{2\sqrt{a}}, \end{aligned} \tag{60}$$

m_t — масса t-кварка. Кубический член в (59) возникает за счет флуктуаций при $T \neq 0$. Если бы Хиггс-бозон был легким, то слагаемое $(\lambda/4\phi^4)$ было бы малым. Из (59) следует, что при высоких температурах в основном состоянии хиггсовское поле обращается в ноль. Если температура понижается, то при $T_C = T_1/\sqrt{1 - 2b^2/(9a\lambda)} > T_1$ происходит фазовый переход 1-го рода: один минимум возникает при $\phi = 0$, а другой

$$v_{T_C} = \phi_{\text{crit}} = \frac{2b}{3\lambda} T_C \tag{61}$$

отделен энергетическим барьером (рис. 7).

При T_C свободные энергии симметричной и нарушенной фазы одинаковы. Вселенная из-за наличия барьера остается в симметричной фазе. При расширении и охлаждении Вселенной возникают пузырьки с хиггсовским конденсатом. Затем пузырьки становятся больше и, наконец, при $T = T_1$ заполняют весь объем $T = T_1$.

На рис. 8 показано поведение эффективного потенциала в случае фазового перехода 2-го рода.

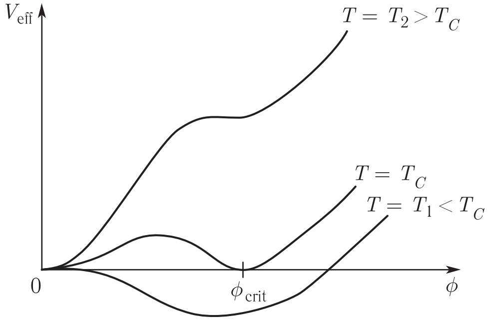


Рис. 7

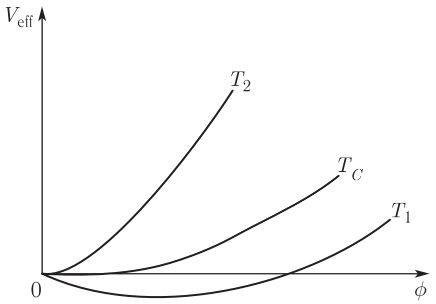


Рис. 8

При фазовом переходе 2-го рода нет энергетически вырожденных минимумов, разделенных барьером при $T = T_C$, как нет и расширения капель. Хиггсовское поле постепенно конденсируется при $T \leq T_C$ и при охлаждении растет до значения $\simeq 246$ ГэВ. Величина критической температуры зависит от конкретной модели. Для $m_H \simeq 100$ ГэВ с помощью (61) получаем оценку $T_C \sim 70$ ГэВ. Из соотношений (5) и (23) следует оценка времени EW слабого перехода: $t_{\text{EW}} \sim 5 \cdot 10^{-11}$ с после Большого Взрыва. Это означает, что причинная область, диаметр которой для радиационно-доминирующей эпохи $d_H(t) = 2t$, составляет несколько сантиметров.

Вернемся к бариогенезису. Довольно-таки очевидно, почему необходим EW-переход 1-го рода. В этом случае временная шкала, ассоциированная с нуклеацией и расширением хиггсовских пузырьков, сравнима с временной шкалой реакций, в которых участвуют частицы. Это обстоятельство вызывает отклонение от термодинамического равновесия. Как можно попытаться описать этот процесс? Рассмотрим один из пузырьков с $v_T \neq 0$, который после расширения становится «нашим миром». Пузырек должен быть наполнен преимущественно кварками, а не антикварками. Действительно, отношение $n_B/s \sim 10^{-10}$ и оно сохраняется при расширении. Это означает, что бариогенезис происходит вне пузырька, а сфалерон-индуцированные $B + L$-нарушающие реакции в пузырьке сильно подавлены.

Чтобы исключить в нарушенной фазе сфалеронный процесс $\Gamma^{\text{sph}}_{\not{B}+\not{L}} \sim \exp\left(-\frac{4\pi f v_T}{g_W T}\right)$, нужно иметь скачок параметра порядка при T_C от значения $\phi = 0$ в симметричной

фазе до v_{T_C} в нарушенной фазе. При этом

$$\frac{v_{T_C}}{T_C} \geq 1. \tag{62}$$

Это условие соответствует фазовому переходу 1-го рода.

С точки зрения экспериментальной границы на массу $m_H^{SM} \geq 114$ ГэВ, формулы (59) и (60) становятся неприменимыми. Тем не менее, соотношение (61) показывает, что скачок с увеличением массы Хиггс-бозона становится меньше.

Ограничение LEP2 на массу $m_H^{SM} \geq 114$ ГэВ приводит к следующему заключению: если механизм Хиггса правильно описывает нарушение электрослабой симметрии, то EW фазовый переход в ранней Вселенной не обеспечивает температурной нестабильности, требующейся для бариогенезиса. B-нарушающие сфалеронные процессы адиабатически «выключены» при переходе от $T > T_C$ к $T < T_C$. Поэтому стандартная модель элементарных частиц не способна объяснить барионную асимметрию Вселенной.

8.6. Электрослабый фазовый переход в расширениях стандартной модели

Конечно, вопрос о том, какой именно механизм — хиггсовский или другой — обеспечивает нарушение EW-симметрии, еще предстоит выяснить. Будущие эксперименты на LHC способны прояснить ситуацию. Существует несколько расширений и альтернатив механизму Хиггса стандартной модели. Среди этих моделей стоит выделить модели, основанные на элементарных хиггсовских полях (частицах со спином ноль, способных рождаться при энергиях $E \gg 100$ ГэВ) и модели, постулирующие Бозе-конденсаты новых тяжелых фермион-антифермионных пар. Динамика нарушения симметрии в этих моделях может изменять порядок фазового перехода по сравнению со стандартной моделью.

Рассмотрим наиболее популярные модели расширения стандартной модели. Среди них отметим минимальную суперсимметричную стандартную модель MSSM, обсуждаемую в главе 1 части II.

В MSSM хиггсовский сектор содержит два хиггсовских дублета. Хотя требование «мягкого» нарушения SUSY не допускает независимые четверные связи в хиггсовском потенциале $V(\phi_1, \phi_2)$, число параметров в скалярном секторе этой модели больше, чем в стандартной модели, т. е. можно ожидать фазового перехода 1-го рода. Исследование V_{eff} при $T \neq 0$ показывает, что существует область в пространстве параметров MSSM, допускающая EW фазовый переход 1-го порядка. Условие для этого — масса скалярного партнера $\tilde{t}_R$ правого топ-кварка t_R должна быть сравнительно малой, а масса $\tilde{t}_L$ — достаточно большой. Верхняя граница на массу легчайшего Хиггс-бозона H_1 в этой модели получается в предположении о том, чтобы масса $\tilde{t}_L$ не была неестественно большой.

Таким образом, MSSM предсказывает существование EW фазового перехода первого рода, если

$$\begin{aligned} m_{H_1} &\leq 105 \div 115 \text{ ГэВ}, \\ m_{\tilde{t}_R} &\leq 170 \text{ ГэВ}. \end{aligned} \tag{63}$$

В минимальных SUSY моделях с дополнительным калибровочным синглетом хиггсовского поля получить фазовый переход гораздо проще.

Несуперсимметричные расширения стандартной модели менее мотивированы, чем модели SUSY, но и они предсказывают некоторые интересные явления. Следует упомянуть о классе 2-дублетных хиггсовских моделей (2HDM), в котором имеется дополнительный хиггсовский дублет, а физический спектр частиц включает 3 нейтральных и один заряженный Хиггс-бозон. $SU(2)_L \times U(1)_Y$-инвариантный хиггсовский потенциал $V(\phi_1, \phi_2)$ содержит большое число неизвестных параметров. Поэтому не удивительно, что в этой модели можно получить EW фазовый переход 1-го порядка, однако не удается определить верхнюю границу для массы легкого хиггса.

Нестандартное CP-нарушение в расширениях стандартной модели весьма существенно для сценариев бариогенезиса. Расширения стандартной модели, как уже упоминалось, содержатся в некалибровочном секторе. Иначе говоря, в этих расширениях гораздо богаче набор юкавских и хиггсовских взаимодействий, чем в стандартной модели. Именно эти взаимодействия, как правило, нарушают CP-инвариантность. Таким образом, помимо стандартного КМ-механизма нарушения CP, могут быть и другие механизмы. Остановимся на двух примерах.

8.6.1. Хиггсовский сектор CP-нарушения. Интересная возможность CP-нарушения в расширенном хиггсовском секторе содержится в уже упоминавшемся 2HDM-расширении стандартной модели. Рассмотрим класс 2HDM-моделей, которые построены так, чтобы на древесном уровне отсутствовали нейтральные токи с изменением аромата. $SU(2)_L \times U(1)_Y$-инвариантный древесный хиггсовский потенциал в этой модели имеет вид

$$\begin{aligned}V_{\text{tree}}(\Phi_1, \Phi_2) = \lambda_1(2\Phi_1^+\Phi_1 - v_1^2)^2 + \lambda_2(2\Phi_2^+\Phi_2 - v_2^2)^2 + \\ +\lambda_3\left[(2\Phi_1^+\Phi_1 - v_1^2) + (2\Phi_2^+\Phi_2 - v_2^2)\right] + \lambda_4\left[(\Phi_1^+\Phi_1)(\Phi_2^+\Phi_2) - (\Phi_1^+\Phi_2)(\Phi_2^+\Phi_1)\right] + \\ +\lambda_5\left[2\,\mathrm{Re}(\Phi_1^+\Phi_2) - v_1v_2\cos\xi\right]^2 + \lambda_6\left[2\,\mathrm{Im}(\Phi_1^+\Phi_2) - v_1v_2\sin\xi\right]^2,\end{aligned} \quad (64)$$

где λ_i, v_1, v_2 и ξ — вещественные параметры, причем параметризация V_{tree} выбрана так, чтобы хиггсовские поля имели ненулевые вакуумные средние в состоянии с минимальной энергией.

При CP-преобразовании

$$\Phi_{1,2}(\vec{x}, t) \xrightarrow{CP} e^{i\alpha_{1,2}}\Phi_{1,2}^+(-\vec{x}, t). \quad (65)$$

Видно, что $H_V = \int d^3x V_{\text{tree}}(\Phi_1, \Phi_2)$ CP-неинвариантен, если $\xi \neq 0$. Заметим, что неестественным было бы предполагать $\xi = 0$. Если бы это было справедливо на древесном уровне, ненулевые фазы Кобаяши–Маскава δ_{KM}, необходимые для объяснения CP-нарушения в распадах K- и B-мезонов, индуцировали бы посредством радиационных поправок ненулевые значения ξ.

Как следует из (64), при нулевых температурах нейтральные компоненты хиггсовских дублетных полей принимают следующие значения

$$\langle 0|\phi_1^0|0\rangle = \frac{v_1 e^{\xi_1}}{\sqrt{2}}, \quad \langle 0|\phi_2^0|0\rangle = \frac{v_2 e^{i\xi_2}}{\sqrt{2}}, \quad (66)$$

где $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 246$ ГэВ, а $\xi_2 - \xi_1 = \xi$ — физическая CP-нарушающая фаза.

Спектр теории в хиггсовском секторе состоит из заряженного бозона, его античастицы $H^\pm$ и трех нейтральных состояний. С точки зрения нарушения CP, фазу КМ несут $H^\pm$.

Обсудим некоторые приложения хиггсовского сектора CP-нарушения в современной физике. Если бы фаза ξ была равной нулю, то набор нейтральных хиггсовских

состояний включал бы два скалярных ($CP = 1$) и одно псевдоскалярное ($CP = -1$) состояние. При $\xi \neq 0$ они смешиваются, и как следствие, 3 массовых собственных состояния $|\phi_{1,2,3}\rangle$ не имели бы определенной CP-четности. Иначе говоря, они были бы связаны как со скалярными, так и псевдоскалярными кварковыми и лептонными токами. В терминах вейлевских полей соответствующий лагранжиан записывается в виде

$$L_\phi = -\sum_\psi c_\psi \frac{m_\psi}{v} \overline{\psi}_L \psi_R \phi + \text{э.с.}, \tag{67}$$

где подразумевается суммирование по хиггсовским полям ($i = 1, 2, 3$); ψ обозначает кварковое или лептонное поле; m_ψ — масса соответствующей частицы. Безразмерные юкавские константы $c_\psi = a_\psi + ib_\psi$ (a_ψ и b_ψ — вещественные числа) зависят от параметров хиггсовского потенциала и типа модели.

Юкавское взаимодействие (67) приводит к нарушению CP в диагональных по ароматам переходах кварков и лептонов ψ При этом величина CP-нарушающих эффектов пропорциональна некоторой степени масс m_ψ. Например, в реакции $\psi\overline{\psi} \to \psi\overline{\psi}$ обмен ϕ-бозоном на древесном уровне индуцирует CP-нарушающие взаимодействия типа $\overline{\psi}\psi(\overline{\psi}i\gamma_5\psi)$ с константой связи, пропорциональной m_ψ^2/m_ϕ^2.

Как известно, эффекты CP-нарушения вне стандартной модели могут проявляться в электрических дипольных моментах электрона и нейтрона. Если легкий ($m_\phi \sim 100$ ГэВ) бозон существует и CP-нарушающая фаза $\xi \sim 1$, то юкавское взаимодействие (67) индуцирует электрические дипольные моменты электрона и нейтрона на уровне современных ограничений на эти величины.

Что происходит при EW фазовом переходе в ранней Вселенной? Предположим, что параметры 2HDM-модели соответствуют фазовому переходу 1-го рода. Будем считать, что переход от симметричной к нарушенной фазе происходит при температуре T_C. При $T < T_C$ пузырьки, заполненные хиггсовскими полями, начинают образовываться и расширяться. Вакуумные средние хиггсовских полей зависят от пространственной координаты и времени. Выберем один из пузырьков и предположим, что он расширяется сферически-симметрично. Когда пузырек вырастет до некоторого конечного размера, можно воспользоваться следующим одномерным описанием. Выберем систему отсчета, связанную со стенкой пузырька. Стенку уже можно считать плоской, расширяющейся вдоль оси z. Стенка, т. е. граница двух фаз, имеет конечную толщину l_{wall}, содержащуюся в интервале от $z = 0$ до $z = z_0$. Симметричная фаза находится справа от этой границы, $z > z_0$, а нарушенная — слева, $z < 0$. Таким образом, нейтральные хиггсовские поля имеют вакуумные средние, величины которых и фазы зависят от z:

$$\langle 0|\phi_1^0|0\rangle_T = \frac{\rho_1(z)e^{i\theta(z)}}{\sqrt{2}}, \quad \langle 0|\phi_2^0|0\rangle_T = \frac{\rho_2(z)e^{i\omega(z)}}{\sqrt{2}}. \tag{68}$$

В симметричной фазе $z \gg z_0$ оба вакуумных средних обращаются в ноль, а в нарушенной фазе вакуумные средние близки к своим значениям при нулевой температуре:

$$\rho_i(z) \simeq v_i, \quad \theta(z) = \xi_1, \quad \omega(z) = \xi_2, \tag{69}$$

если $z \ll 0$. Изменения модулей и фаз в зависимости от z можно найти путем решения уравнений движения.

Что касается связей хиггсовский полей с фермионами, то для простоты предположим, что все кварки и лептоны связаны только с Φ_1. Тогда юкавская связь

кваркового или лептонного поля $\psi = q, l$ с нейтральным хиггсовским полем задается лагранжианом

$$L_1 = -h_\psi \overline{\psi}_L \psi_R \phi_1^0 + \text{э.с.} = -m_\psi(z)\overline{\psi}_L\psi_R - m_\psi^* \overline{\psi}_R \psi_L + \ldots, \tag{70}$$

где

$$m_\psi(z) = h_\psi \frac{\rho_1(z) e^{i\theta(z)}}{\sqrt{2}} \tag{71}$$

комплексная масса, а многоточие в (70) означает связь квантового поля (нейтрального хиггсовского поля с полем ψ).

Таким образом, взаимодействие фермионного поля $\psi(x)$ с CP-нарушающим хиггсовским пузырьком, трактуемым как внешнее классическое фоновое поле, описывается лагранжианом

$$L_\psi = \overline{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \overline{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m_\psi(x)\overline{\psi}_L\psi_R - m_\psi^*(x)\overline{\psi}_R\psi_L. \tag{72}$$

Это взаимодействие нарушает CP, поскольку от x зависят фазы $\theta(x)$ и $m_\psi(x)$. Очевидно, что поле $\theta(x)$ нельзя исключить из L_ψ переопределением полей $\psi_{L,R}(x)$.

8.6.2. CP-нарушение в MSSM. В минимальной суперсимметричной стандартной модели (см. главу 1 части II) CP-нарушающие фазы могут возникать, помимо комплексных юкавских взаимодействий кварков с ненулевой КМ-фазой δ_{KM}, за счет μ-члена в суперпотенциале, а также за счет «мягко-нарушающих» суперсимметрию членов. Требование калибровочной инвариантности к эрмитовости лагранжиана допускает новые источники CP-нарушения за счет появления:

а) комплексного массового параметра $\mu_C \equiv \mu \exp(i\phi_\mu)$ (μ — вещественное число), описывающего смешивание двух хиггсовских киральных суперполей в суперпотенциале;

б) комплексного массового параметра m_{12}^2, описывающего смешивание двух хиггсовских дублетов и дающего вклад в хиггсовский потенциал

$$V(\Phi_1, \Phi_2) \supset \mu_C \Phi_1^+ \Phi_2 + \text{э.с.} \tag{73}$$

в) комплексных майорановских масс M_i в массовых членах калибрино ($\varepsilon = i\sigma_2$):

$$-\frac{1}{2}\sum_i M_i(\lambda_i^T \varepsilon \lambda_i) + \text{э.с.}, \tag{74}$$

где $i = 1, 2, 3$ относятся к $U(1)_Y$-, $SU(2)_L$-калибрино и глюино.

г) комплексной тройной скалярной связи скалярных кварков и скалярных лептонов с хиггсовскими дублетами Φ_1 и Φ_2. Эти связи образуют 3×3 комплексные матрицы A_ψ. Модели, основанные на супергравитации, предполагают, что матрицы A_ψ пропорциональны юкавским матрицам связи h_ψ:

$$A_\psi = A h_\psi, \quad \psi = u, d, l, \tag{75}$$

где A — комплексный массовый параметр. Таким образом, набор параметров μ_C, m_{12}^2, M_i и A включает 4 комплексных фазы. Имея в виду две (мягко нарушенные) глобальные $U(1)$-симметрии лагранжиана MSSM, две фазы можно исключить переопределением полей. При этом фазы подбираются таким образом, чтобы массы калибрино M_i и массовый параметр m_{12}^2 были вещественными. Тогда наблюдаемыми CP-фазами в MSSM (кроме КМ-фаз) будут $\phi_\mu = \arg(\mu_C)$ и $\phi_A = \arg(A)$. Экспериментальные ограничения на электрические дипольные моменты электрона и нейтрона

определяют возможные пределы изменения CP-фаз, в частности, $|\phi_\mu| \leq 0{,}03$. Какая ситуация с хиггсовским сектором нарушения CP? В MSSM древесный хиггсовский потенциал V_{tree} CP-инвариантен. Суперсимметрия не допускает независимых четверных связей в V_{tree}. Они пропорциональны линейным комбинациям квадратов $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$ калибровочных констант. В однопетлевом приближении взаимодействия хиггсовских полей $\Phi_{1,2}$ с чарджино, нейтралино и т. д. генерируются четверными самовзаимодействиями хиггсов

$$V_{\text{eff}} \sim \lambda_1(\Phi_1^+\Phi_2)^2 + \lambda_2(\Phi_1^+\Phi_2)(\Phi_1^+\Phi_1) + \lambda_3(\Phi_1^+\Phi_2)(\Phi_2^+\Phi_2) + \text{э.с.} \tag{76}$$

в эффективном потенциале. CP-фазы ϕ_μ и ϕ_A индуцируют комплексные $\lambda_{1,2,3}$. Итак, точное CP-нарушение в хиггсовском секторе происходит на квантовом уровне и приводит к юкавским взаимодействиям нейтральных хиггсовских бозонов (67).

В контексте бариогенезиса потенциально более интересно спонтанное CP-нарушение при высоких температурах $T < T_{\text{EW}}$. В MSSM эффективный потенциал при $T < T_{\text{EW}}$ получает однопетлевые поправки типа (76). Как следствие этого, нейтральные хиггсовские поля формируют комплексные вакуумные средние (68) с большим CP-нечетным классическим полем. Это обстоятельство усиливает значимость спонтанного нарушения CP при конечных температурах, даже если ϕ_μ и ϕ_A малы или вовсе обращаются в ноль.

Обратимся теперь к тем CP-нарушающим взаимодействиям в MSSM, которые имеют отношение к EW фазовому переходу и включают ϕ_μ и ϕ_A на древесном уровне. Как уже отмечалось выше, существует интервал масс легких хиггсов и стоп-кварков, допускающий существование фазового перехода 1-го рода. Вакуумные средние хиггсовского поля имеют вид:

$$\langle 0|\phi_1^0|0\rangle_T = \rho_1(z), \quad \langle 0|\phi_2^0|0\rangle_T = \rho_2(z), \tag{77}$$

где ρ_i — вещественны.

Эти вакуумные средние определяют взаимодействие стенки пузырька с теми частицами MSSM, которые связаны с хиггсовскими полями уже на классическом уровне. CP-нарушающие фазы ϕ_μ и ϕ_A относятся к взаимодействиям классических фоновых хиггсовских полей с чарджино, сфермионами, и особенно, скварками. В отличие от 2HDM-модели, если имеют место соотношения (77), то взаимодействие кварков и лептонов со стенками пузырька на классическом уровне не нарушает CP.

Подставляя (77) в лагранжиан MSSM, получим лагранжиан, описывающий распространение частицы в присутствии хиггсовского пузырька. Для заряженных калибрино и хиггсино в базисе собственных калибровочных состояний

$$L_C = \chi_R^+\sigma_\mu\partial^\mu\chi_R + \chi_L^+\overline{\sigma}_\mu\partial^\mu\chi_L + \chi_R^+M_C\chi_L + \chi_L^+M_C^+\chi_R, \tag{78}$$

где

$$\sigma^\mu = (I, \sigma_i), \quad \overline{\sigma}^\mu = (I, -\sigma_i), \quad \chi_R^+ = (\tilde{W}^+, \tilde{H}_2^+), \quad \chi_L = (\tilde{W}^-, \tilde{H}_1^-)^T, \tag{79}$$

и $\tilde{W}(x)$, $\tilde{H}_{1,2}(x)$ — 2-компонентные вейлевские поля заряженных калибрино и хиггсино.

Массовая матрица чарджино

$$M_C = \begin{pmatrix} M_2 & g_W\rho_2(x) \\ g_W\rho_1(x) & \mu_C \end{pmatrix}, \tag{80}$$

где μ_C — комплексный массовый параметр хиггсино.

Для скалярных полей $\tilde{t}_R(x)$ и $\tilde{t}_L(x)$ получаем в базисе калибровочных собственных состояний

$$L_{\tilde{t}} = (\partial_\mu \tilde{t}_L^+)\partial^\mu \tilde{t}_L + (\partial_\mu \tilde{t}_R^+)\partial^\mu \tilde{t}_R - (\tilde{t}_L, \tilde{t}_R) M_{\tilde{t}} \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix}, \tag{81}$$

матрица

$$M_{\tilde{t}}(x) = \begin{pmatrix} m_L^2 + h_t^2 H_2^2(z) & h_t(A_t\rho_2(x) - \mu_C^*\rho_1(x)) \\ h_t(A_t^*\rho_2(x) - \mu_C\rho_1(x)) & m_R^2 + h_t^2\rho_2^2(x) \end{pmatrix}, \tag{82}$$

и $m_{L,R}^2$ — SUSY-нарушающие квадраты массовых параметров, h_t — юкавская константа связи t-кварка, A_t — параметр смешивания левых и правых состояний стоп-кварка.

В массовых матрицах (80) и (82) CP-нарушающие фазы объединяются с x-зависящими вакуумными средними. Эти CP-нарушающие токи будут обсуждаться ниже.

8.7. Сценарий электрослабого бариогенезиса

Этот сценарий «работает» только в расширениях стандартной модели.

Требуемое отклонение от температурного равновесия обеспечивается расширением пузырьков хиггса истинного вакуума.

Среди различных механизмов бариогенезиса следует отметить:

а) *нелокальный бариогенезис*. В этом случае частицы и античастицы имеют CP-несохраняющие взаимодействия со стенкой пузыря. Это приводит к асимметрии квантового числа (отличного от B), переносимого токами (анти)частиц в нарушенной фазе. В этой фазе асимметрия посредством $B+L$-нарушающих сфалеронных процессов трансформируется в асимметрию барионного числа. При этом B-нарушающие обратные реакции заблокированы, и асимметрия барионного числа проявляется в явном виде. Схема нелокального бариогенезиса изображена на рис. 9.

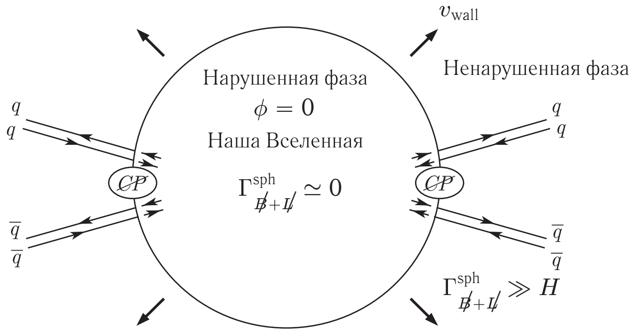


Рис. 9

б) *локальный бариогенезис* относится к случаю, когда как CP-нарушающие, так и B-нарушающие процессы происходят либо на, либо вблизи стенок пузыря.

Вообще говоря, можно ожидать, что оба механизма «работают» над созданием $B \neq 0$. Эффективности механизмов зависят от скоростей пузырей. В дальнейшем будем обсуждать только нелокальный бариогенезис.

Сначала рассмотрим более детально хиггсовский сектор нарушения CP. Для определенности выберем 2-хиггсовское дублетное расширение стандартной модели,

уже обсуждавшееся выше (72). Поскольку при $T = 0$ $|m_\psi(z)|$ становится массой фермиона, то t-кварки и τ-лептоны будут иметь наиболее сильные взаимодействия со стенкой. Для простоты считаем, что стенка тонкая, т. е. средняя длина пробега фермиона l_ψ больше толщины l_{wall}. Тогда кварки и лептоны можно трактовать как свободные частицы, взаимодействующие в малой области с нетривиальным хиггсовским фоновым полем. Многократным рассеянием в стенке можно пренебречь. Расширение стенки будет сферически-симметричным, его 1-мерное описание дано в разд. 8.6.1. Рисунок 10 показывает, как левые и правые кварки q_L и q_R, двигающиеся в нарушенной фазе, сталкиваются с движущейся стенкой, отражаются от хиггсовского пузырька и изменяют свои спиральности.

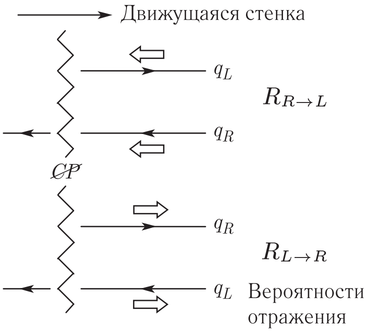


Рис. 10

В системе отсчета, связанной с покоящейся стенкой, взаимодействие фермиона со стенкой пузыря описывается уравнением Дирака, следующим из соотношения (72)

$$\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m(z)P_R - m^*(z)P_L\big)\psi(z,t) = 0, \tag{83}$$

где $P_{R,L} = (1 \pm \gamma_5)/2$ и ψ — дираковский спинор. Решение этого уравнения с соответствующими граничными условиями дает (анти)кварковые волновые функции произвольной киральности. Вместо этих вычислений сделаем несколько общих замечаний. Рассмотрим процесс рассеяния, изображенный на рис. 11. В симметричной фазе $z > z_0$ левый кварк q_L, движущийся с импульсом $k_z < 0$, отражается от стенки и превращается в правый кварк q_R. Заметим, что сохранение электрического заряда гарантирует, что кварк при отражении переходит в кварк, а не антикварк. Из-за сохранения углового момента q_L при отражении переходит в q_R и т. д.

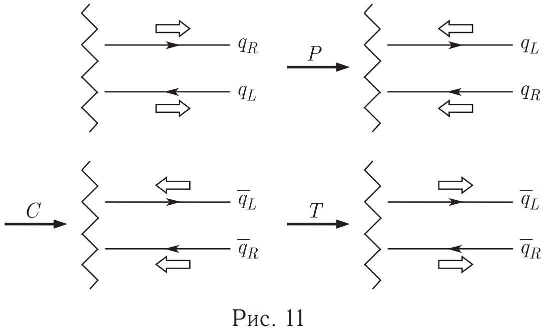


Рис. 11

На рис. 11 показаны также ситуации после преобразований P, C, T. Аналогичный рисунок можно изобразить для отражения от стенки антикварка. Из этих рисунков очевидно, что при сохранении CP

$$R_{L\to R} = R_{\overline{R}\to\overline{L}}, \quad R_{R\to L} = R_{\overline{L}\to\overline{R}}. \tag{84}$$

Индексы $\overline{R}$, $\overline{L}$, относятся к правым и левым антикваркам. Если же речь идет о CPT-инвариантности, то должны выполняться следующие соотношения

$$R_{L\to R} = R_{\overline{L}\to\overline{R}}, \quad R_{R\to L} = R_{\overline{R}\to\overline{L}}. \tag{85}$$

Механизм переноса заряда действует следующим образом. В начальный момент времени в ненарушенной фазе имеется одинаковое число кварков и антикварков.

В частности, одинаковое число q_L и $\overline{q}_R$, а также q_R и $\overline{q}_L$. Кварки и антикварки сталкиваются с расширяющимися стенками пузырька. Отражение превращает $q_L \to q_R$, $\overline{q}_R \to \overline{q}_L$, $q_R \to q_L$ и $\overline{q}_L \to \overline{q}_R$, при этом частицы движутся назад, в область, где хиггсовские поля равны нулю. Поскольку взаимодействие со стенкой предполагается нарушающим CP, соотношения (84) для вероятностей отражения уже не справедливы. Действительно, чтобы CP-симметрия

$$\Delta R_{CP} = R_{\overline{L}\to\overline{R}} - R_{R\to L} = R_{L\to R} - R_{\overline{R}\to\overline{L}}, \tag{86}$$

была отлична от нуля, необходимо, чтобы $m_q(z)$ имела z-зависящую фазу.

Коэффициенты отражения строятся как когерентная суперпозиция амплитуд отражения (анти)кварков в некоторой точке z пузыря. Когда фазы изменяются с величиной z, вероятности отражения $R_{\overline{L}\to\overline{R}}$ и $R_{R\to L}$ отличаются друг от друга. Если бы фазы $m_q(z)$ были постоянными, эти вероятности были бы одинаковыми. Точное вычисление дает

$$\Delta R_{CP}(k_z) \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(2k_z z)\, \mathrm{Im}[m_q(z) M_q^*], \tag{87}$$

где $M_q = m_q(z = -\infty)$ — масса кварка в нарушенной фазе, $\arg(M_q) = \xi_1$, параметр ξ_1 задается соотношением (69). Как видно из (87), если $m_q(z)$ имеет постоянную фазу, асимметрия обращается в ноль.

Заметим, что на этой стадии избыток барионного числа равен нулю. Действительно, разность J_q^L потоков $\overline{q}_R$ и q_L, инжектируемых из стенки обратно в симметричную фазу равна величине J_q^R, которая определяется как разность потоков q_R и $\overline{q}_L$. Однако $(B+L)$-нарушающие сфалеронные взаимодействия, неподавленные в симметричной фазе, включают только безмассовые левые кварки и правые антикварки. Например, реакция (49) уменьшает барионное число на три единицы, но соответствующая реакция с правыми антикварками в начальном состоянии увеличивает B на ту же самую величину. Таким образом, если функциональная форма CP-нарушающей части $\mathrm{Im}[m_q(z)M_q^*]$ фонового хиггсовского поля такова, что $J_q^L > 0$, то после аномальных слабых взаимодействий возникает больше левых кварков, чем правых антикварков. Потоки отраженных $\overline{q}_L$ и q_R не чувствительны к аномальным слабым сфалеронным взаимодействиям. Если их добавить, то вне стенки возникнет избыток барионного числа $\Delta B > 0$. Следует учесть, что (анти)частицы из нарушенной фазы могут передаваться в симметричную фазу и давать вклад в потоки (анти)частиц, обсуждавшиеся выше. Используя CPT-инвариантность и унитарность, получаем для вероятностей переходов и отражений

$$T_{L\to L} = 1 - R_{R\to L} = 1 - R_{\overline{R}\to\overline{L}} = T_{\overline{L}\to\overline{L}}, \tag{88}$$

$$T_{R\to R} = 1 - R_{L\to R} = 1 - R_{\overline{L}\to\overline{R}} = T_{\overline{R}\to\overline{R}}. \tag{89}$$

Теперь можно записать формулу для тока J_q^L, который определим как разность потоков $\overline{q}_R$ и q_L инжектируемых из стенки в симметричную фазу. Вклад от отраженных частиц содержится в члене $\Delta R_{CP} f_s$, где f_s — свободная пространственно-временная ферми-дираковская функция распределения (анти)кварков в области $z > z_0$, движущихся слева навстречу стенке. Вклад (анти)кварков, возвращающихся из нарушенной фазы, включает $(T_{\overline{R}\to\overline{R}} - T_{L\to L}) f_b = -\Delta R_{CP} f_b$, где f_b — функция распределения переданных (анти)кварков, движущихся направо. Системой отсчета при этом является система, связанная со стенкой. Заметим, что f_s и f_b отличаются друг от друга, поскольку стенка движется слева направо со скоростью $v_{\mathrm{wall}} \neq 0$.

Тогда ток

$$J_q^L = \int\limits_{k_z<0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{|k_z|}{E}(f_s - f_b)\Delta R_{CP}, \tag{90}$$

где $|k_z|/E$ — групповая скорость. Этот ток отличен от нуля, поскольку два из трех условий А. Д. Сахарова (CP-нарушение и отклонение от термодинамического равновесия) присутствуют. Ток обращался бы в ноль, если бы стенка в системе отсчета плазмы была в покое. Это условие приводит к термодинамическому равновесию, т. е. $(f_s - f_b) = 0$.

Как уже отмечалось, ток $J^L = \sum\limits_{\psi} J_\psi^L$ является источником бариогенезиса на некотором расстоянии от стенки. Можно определить плотности левых кварков и правых антикварков и связанные с ними химические потенциалы. Скорость рождения барионов в единице объема определяется уравнением

$$\frac{dn_B}{dt} = -n_F\frac{\widehat{\Gamma}_{\text{sph}}}{2T}\sum_{\text{поколения}}(3\widehat{\mu}_{U_L} + 3\widehat{\mu}_{D_L} + \widehat{\mu}_{l_L} + \widehat{\mu}_{\nu_L}), \tag{91}$$

где $n_F = 3$; $U = u, c, t$; $D = d, s, b$; $\widehat{\Gamma}_{\text{sph}}$ — сфалеронная «скорость» в единице объема, которая в ненарушенной фазе задается выражением (53). В (91) величины $\widehat{\mu}_i = \mu_i - \overline{\mu}_i = 2\mu_i$ — разность между соответствующими химическими потенциалами частиц и античастиц. Для невзаимодействующего газа безмассовых фермионов i соотношение между $\widehat{\mu}_i$ и асимметрией в плотностях частиц и античастиц: $n_i - \overline{n}_i \simeq g\widehat{\mu}_i T^2/12$, где $g = 1$ для левого лептона и $g = 3$ для левого кварка (вследствие цвета).

В симметричной фазе выражение (91) принимает вид:

$$\frac{dn_B}{dt} = -6n_F\frac{\widehat{\Gamma}_{\text{sph}}}{T^3}(3B_L + L_L), \tag{92}$$

где B_L и L_L обозначают полные плотности левых барионов и лептонов. Фактор 3 возникает из определения барионного числа (1/3 приписывается кварку). Из уравнения (92) следует, что преимущественное рождение барионов над антибарионами требует отрицательной плотности левых фермионов, т. е. положительности потока J_q^L. Полный поток $\sum\limits_{\psi} J_\psi^L$ определяется плотностью левых фермионов. Таким образом, из (92) можно получить n_B, а используя для плотности энтропии $s = 2\pi^2 g_{*s}T^3/45$ с $g_{*s} \simeq 110$, — и отношение n_B/s.

Конечно, мы рассмотрели лишь простейший пример. Следует учесть, например, эффекты декогерентности при отражении или профиль скорости стенки.

Как уже упоминалось выше, хиггсовский сектор CP-нарушения имеет наибольшие проявления для t-кварков. Поэтому следует ожидать, что t-кварк вносит наибольший вклад в правую часть (92). Однако ряд эффектов стремится изменить вклад t-кварка по отношению к τ-лептону. Поскольку t-кварки взаимодействуют сильнее, чем τ-лептоны, они имеют меньшую длину свободного пробега. Это означает, что приближение тонкой стенки может для t-кварка быть неприменимым. Кроме того, ток инжектированных левых t-кварков J_t^L в присутствии КХД сфалеронных полей изменяется. Это приводит к неподавленным при высоких T процессам с изменениям киральности кварков. Такой процесс подавляет вклад t-кварка в B_L. Оказывается, с учетом этих подавлений t-кварка, вклад τ-лептона в плотность левых фермионов

доминирует. В этом случае отношение

$$\frac{n_B}{s} \simeq 10^{-12}\frac{\Delta\theta}{v_{\text{wall}}}, \tag{93}$$

где v_{wall} — скорость стенки и $\Delta\theta = \theta(z = -\infty) - \theta(z = +\infty)$. Имея в виду возможность спонтанного CP-нарушения при ненулевых температурах в двухдублетной хиггсовской модели, можно считать $\Delta\theta = \xi$ (64). Используя значения $n_B/s \simeq \eta/7 \simeq (2 \div 8)\cdot 10^{-11}$, получаем ограничение $\Delta\theta/v_{\text{wall}} \simeq 40$.

Даже большое CP-нарушение ($\Delta\theta \simeq 1$) требовало бы малых скоростей стенки, несовместимых с динамикой фазового перехода. Тем не менее, двухдублетная хиггсовская модель предсказывает правильный порядок величины.

8.7.1. Роль КМ-фазы. Мы пока не обсуждали, какую роль в сценарии бариогенезиса играет фаза КМ δ_{KM} — источник CP-нарушения в стандартной модели. Как уже говорилось, стандартная модель не может объяснить барионную асимметрию Вселенной. Таким образом, необходимы расширения стандартной модели, которые вносят дополнительные источники CP-нарушения. Напомним (см. главу 7 части I) хорошо известные особенности CP-нарушения в стандартной модели.

Все CP-нарушающие эффекты, генерируемые КМ-фазой в заряженных слабых кварковых токах, связанных с W-бозонами, пропорциональны инварианту

$$J_{CP} = \prod_{\substack{i>j\\ u,c,t}} (m_i^2 - m_j^2) \prod_{\substack{i>j\\ d,s,b}} (m_i^2 - m_j^2)\,\mathrm{Im}\,Q, \tag{94}$$

где $i, j = 1, 2, 3$ — индексы поколений, $m_u, \ldots$ — соответствующие кварковые массы; $\mathrm{Im}\,Q$ — мнимая часть произведения 4-х матричных элементов матрицы СКМ, инвариантная при изменении фаз кварковых полей. Существует ряд эквивалентных способов выбора $\mathrm{Im}\,Q$. Как правило, выбирают

$$\mathrm{Im}\,Q = \mathrm{Im}(V_{ud}V_{cb}V_{ub}^*V_{cd}^*). \tag{95}$$

Если учесть модули измеряемых матричных элементов V_{CKM}, то $|\mathrm{Im}\,Q| < 2\cdot 10^{-5}$, даже если CP-нарушение максимально, т. е. $\delta_{\text{KM}} = \pi/2$. Можно записать $\mathrm{Im}\,Q \simeq 2\times 10^{-5}\sin\delta_{\text{KM}}$.

Если рассматривается стандартная модель при температурах $T \neq 0$, CP-симметрия может быть нарушена в тех областях пространства, где нарушена и калибровочная симметрия (или на границах областей). Действительно, $J_{CP} \neq 0$ требует невырожденности кварковых масс.

Предположим, что EW фазовый переход в 2-дублетном хиггсовском расширении стандартной модели был бы первого рода, но без CP-нарушения в хиггсовском секторе. Возникает вопрос: достаточен ли КМ-источник CP-нарушения для создания достаточно большой асимметрии ΔR_{CP} в вероятностях отражения (анти)кварков от расширяющейся стенки, обсуждавшихся выше? Очевидно, что ΔR_{CP} должна быть пропорциональна безразмерной величине типа J_{CP}/D, где D имеет размерность $(\text{масса})^{12}$. Отражение кварков и антикварков от стенок пузыря не является СКМ-подавленным процессом, т. е. D не должен содержать малых СКМ матричных элементов. Напомним, что в симметричной фазе массы кварков и J_{CP} обращаются в ноль. Поэтому кажется разумным трактовать кварковые массы (за исключением t-кварка) пертурбативно. В безмассовом пределе кварков масштабный параметр EW-перехода задается критической температурой $T_C \sim 100$ ГэВ. Таким образом, для безразмерной

характеристики CP-нарушения получаем

$$d_{CP} = \frac{J_{CP}}{T_C^{12}} \simeq 10^{-19}. \tag{96}$$

Очевидно, что это число слишком мало, чтобы учитывать его в наблюдаемом отношении n_B/s. CP-нарушение посредством механизма Кобаяши–Маскава представляется несущественным для бариогенезиса.

8.7.2. Неравновесные распады сверхтяжелых частиц. Исторически первым сценарием бариогенезиса был сценарий неравновесного распада сверхтяжелых частиц. Основная идея этого сценария: на очень ранних этапах расширения Вселенной существовали сверхтяжелые частицы сорта X, в какой-то момент скорость реакций с участием X стала при температурах $T \gg T_{\rm EW}$ меньше скорости расширения H Вселенной $T \gg T_{\rm EW}$. По этой причине частицы X вышли из термодинамического равновесия. Распады X и их античастиц $\overline{X}$ предполагались идущими с нарушением CP и B. Этот сценарий представляется естественным для теорий Большого объединения. Он рассматривается ниже.

8.8. Бариогенезис в теориях большого объединения (GUT)

GUT объединяют сильные и электрослабые взаимодействия на некотором масштабе (см. главу 8 части II). Так, для моделей, основанных на суперсимметрии, масштаб $M_{\rm GUT} \simeq 10^{16}$ ГэВ. Представление калибровочной группы G большого объединения содержит как кварки, так и лептоны. Калибровочные бозоны, осуществляющие переходы между членами мультиплета (или лишь некоторые из них), индуцируют B-нарушающие процессы. При этом C-нарушение и нестандартное CP-нарушение возникает естественным образом. В самом деле, калибровочная группа G на масштабе $M_{\rm GUT} \simeq 10^{16}$ГэВ нарушается до группы симметрии $G' \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Этот процесс сопровождается скалярными хиггсовскими мультиплетами. Как следствие, GUT содержат сверхтяжелые хиггсовские бозоны с B- и CP-нарушающими юкавскими связями с кварками и лептонами.

Простейший пример GUT основан на калибровочной группе $SU(5)$. Эта модель, как известно, имеет трудности в объяснении времени жизни протона. Однако помимо этой проблемы, минимальная версия этой модели не может быть использована для описанного выше сценария, поскольку она сохраняет разность $B - L$. Популярна модель GUT, основанная на калибровочной группе $SO(10)$, она свободна от проблем $SU(5)$.

Таблица 2

Конечное состояние	**Бренчинг**	***B***
$X \to qq$	r	2/3
$X \to l\overline{q}$	$1 - r$	−1/3
$\overline{X} \to \overline{q}\overline{q}$	$\overline{r}$	−2/3
$\overline{X} \to \overline{l}q$	$1 - \overline{r}$	1/3

Не рассматривая деталей GUT, проиллюстрируем механизм бариогенезиса на следующей простой модели. Рассмотрим сверхтяжелый лептокварковый калибровочный бозон X, имеющий кварк-кварковые и кварк-лептонные моды распада $X \to qq$, $l\overline{q}$. В табл. 2 содержатся бренчинги распадов для X и $\overline{X}$ и барионные числа конечных состояний.

Барионное число, рождаемое в распадах X и $\overline{X}$:

$$B_X = \frac{2}{3}r - \frac{1}{3}(1 - r), \quad B_{\overline{X}} = -\frac{2}{3}\overline{r} + \frac{1}{3}(1 - \overline{r}). \tag{97}$$

Избыток барионного числа

$$\Delta B_X = B_X + B_{\overline{X}} = r - \overline{r} = \frac{\Gamma(X \to f_1)}{\Gamma_{\text{tot}}(X)} - \frac{\Gamma(\overline{X} \to \overline{f}_1)}{\Gamma_{\text{tot}}(\overline{X})} = \frac{\Gamma(X \to f_1) - \Gamma(\overline{X} \to \overline{f}_1)}{\Gamma_{\text{tot}}}, \quad (98)$$

где $f_1 = qq$ и $\Gamma_{\text{tot}}(X) = \Gamma_{\text{tot}}(\overline{X})$, как это следует из CPT-инвариантности. Очевидно, если C или CP сохраняются, то $\Delta B_X = 0$.

Предположим, что кварки и лептоны q, l связаны с бозоном со спином ноль юкавской константой, содержащей CP-нарушающую фазу. Естественно считать, что CP-четность нарушена на древесном уровне взаимодействием X с фермионами. CP-нарушающие взаимодействия вне древесного приближения влияют на амплитуды распада X и $\overline{X}$ (рис. 12).

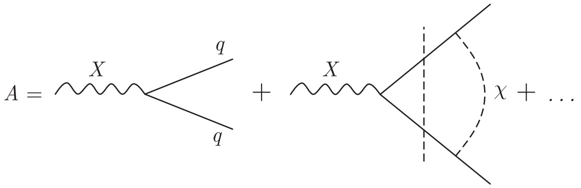


Рис. 12

Амплитуда распада $X \to qq$ с точностью до спиноров и векторов поляризации внешних частиц определяется формулой

$$A(X \to qq) = A_0 + A_1 = A_0 + Be^{i\delta_{CP}}, \quad (99)$$

где древесная амплитуда A_0 — вещественна. $\Delta B_X \neq 0$ требует, чтобы в дополнение к CP-нарушению, была ненулевая фаза взаимодействия в конечном состоянии. Поэтому массы X-бозона и фермионов должны быть такими, чтобы промежуточные фермионы в петлях были на массовой поверхности. Следовательно, величина $B = |B|\exp(i\omega)$ — комплексная. Амплитуда распада $\overline{X} \to \overline{qq}$

$$A(\overline{X} \to \overline{qq}) = A_0 + |B|e^{i\omega}e^{-i\delta_{CP}}. \quad (100)$$

Из выражений (99) и (100) получаем

$$\Delta B_X \sim \frac{|AB|\sin\omega\sin\delta_{CP}}{\Gamma_{\text{tot}}} \quad (101)$$

причем коэффициент пропорциональности включает интегрирование по фазовому пространству. Нужно вычислить также барионное число ΔB_χ за счет распадов χ и $\overline{\chi}$ (рис. 12).

Предположим, что $\Delta B_X + \Delta B_\chi \neq 0$. Поскольку взаимодействия бозонов, включающие распады, обратные распады, аннигиляцию и B-нарушающие реакции $qq \to l\overline{q}$, $\overline{qq} \to \overline{l}q$ и т. д. — достаточно быстрые по сравнению со скоростью расширения H, то X, $\overline{X}$, χ и $\overline{\chi}$ имеют температурные распределения, и среднее барионное число плазмы остается равным нулю. Поэтому взаимодействия этих бозонов должны быть достаточно слабыми, чтобы они могли выйти из термодинамического равновесия. Это весьма тонкий момент, поскольку эти частицы несут калибровочные заряды, и в ранней Вселенной могут быть сильно связанными с плазмой.

Обсудим, что происходит с частицами X, $\overline{X}$ (это рассуждение подходит и для скалярных частиц). При температурах $T \gg m_X$ (m_X — масса X-бозона) X и $\overline{X}$ имеют релятивистские скорости и находятся в термодинамическом равновесии. Тогда плотности $n_X = n_{\overline{X}} \sim n_\gamma$. При низких температурах X- и $\overline{X}$-бозоны становятся нере-

лятивистскими, но остаются в термодинамическом равновесии, их плотности имеют больцмановский фактор подавления $n_X = n_{\overline{X}} \sim (m_X T)^{3/2}\exp(-m_X/T)$. Поскольку $\Gamma_{\text{анн.}} \sim n_X$, полная $\Gamma_X \sim \alpha m_X$ — величина существенная по сравнению с H. Если $\Gamma_X < H$, то возникает некоторый избыток частиц X и $\overline{X}$ по сравнению с равновесными значениями. Заметим, что обратные распады $f \to X$ и $\overline{f} \to \overline{X}$ блокированы, так как доля этих фермионов с энергией, достаточной для рождения сверхтяжелого бозона, подавлена при $T < m_X$ больцмановским фактором. В момент их распада $t \sim \Gamma_X^{-1}$ имеется избыток $n_X = n_{\overline{X}} \sim n_\gamma(T_{\text{расп.}})$. Для плотности энтропии $s \sim g_* n_\gamma$ получаем барионную асимметрию

$$\frac{n_B}{s} \sim \frac{\Delta B n_\gamma}{g_* n_\gamma} \sim \frac{\Delta B}{g_*}, \tag{102}$$

где $\Delta B \simeq \Delta B_X$ — барионный заряд, рождаемый в одном бозонном распаде. Для GUT-расширений стандартной модели величина $g_* \simeq 10^2 \div 10^3$. Таким образом, для получения требуемого значения $n_B/s \sim 10^{-10}$ нужна CP-асимметрия $\Delta B \sim \sim 10^{-8} \div 10^{-7}$. Условия для ухода частицы X из термодинамического равновесия $\Gamma_X \sim \alpha m_X < H$ трансформируется в условие на массу калибровочного бозона со спином единица: $m_X \geq \alpha g_*^{-1/2} M_{\text{Pl}} \sim 10^{16}$ ГэВ ($\alpha = g^2/(4\pi) \sim 10^{-2}$).

Следует упомянуть несколько особенностей этого механизма бариогенезиса. Во-первых, механизм, действующий при температурах выше $T_{\text{EW}} \sim 10^2$ ГэВ, должен включать взаимодействия, нарушающие $B - L$. В контексте GUT-моделей, основанных на калибровочной группе $SO(10)$, имеются $B - L$-несохраняющие взаимодействия. Во-вторых, GUT-бариогенезис может не согласоваться с инфляцией. Существенное предположение обсуждавшегося выше сценария — при $T > m_X$ частицы находились в термодинамическом равновесии. Если эти частицы являются сверхтяжелыми калибровочными или Хиггс-бозонами GUT, то это предположение может быть неправильным. Вполне допустимо, что температура квазиадиабатического расширения плазмы частиц в ранней Вселенной всегда оставалась меньше M_{GUT}. Есть ряд причин тому, что энергия ранней Вселенной определялась энергией вакуума, а это приводит к экспоненциальному расширению. Это основное предположение инфляционной модели. Эта модель решает ряд космологических проблем, включая проблему монополей. Действительно, модели GUT предсказывают сверхтяжелые стабильные магнитные монополи. Инфляция же «убирает» монополи. В конце инфляции вакуумная энергия превращается посредством вакуумных флуктуаций в пары релятивистских частиц, которые затем термализуются. Этот процесс называется перегревом и характеризуется температурой перегрева T_r. Если процесс перегрева достаточно быстрый, т. е. $T_r > M_{\text{GUT}}$, то возникают монополи. С другой стороны, если $T_r < M_{\text{GUT}}$, то процесс рождения сверхтяжелых калибровочных бозонов $X\overline{X}$ и Хиггс-бозонов, необходимых для рассмотренного выше сценария бариогенезиса, оказывается подавленным.

8.9. Бариогенезис через лептогенезис

Этот механизм — частный случай сценария неравновесного распада. Предполагается, что при температурах выше T_{EW} в ранней Вселенной существует несколько типов майорановских нейтрино с массами порядка $M \sim 10^{12}$ ГэВ. Или, в более реалистичном случае, допускается существование трех типов майорановских нейтрино с невырожденными массами. Эти частицы слабо взаимодействуют с другими сортами частиц в ранней Вселенной и выходят из равновесия при некоторой температуре

$T \sim M \gg T_{\rm EW}$. Весьма существенно при этом, что некоторые взаимодействия модели не сохраняют $B - L$. Например, распады майорановских нейтрино в обычные лептоны и хиггсовские бозоны способны создавать ненулевое лептонное число. Процессы же рассеяния не должны уменьшать этой асимметрии. Тогда $B - L$-сохраняющие сфалеронные реакции, происходящие при $T > T_{\rm EW}$ достаточно быстро $T > T_{\rm EW}$, трансформируют лептонную асимметрию в барионную асимметрию. Притягательность этого сценария основана на дефиците атмосферных и солнечных нейтрино, трактуемом как осцилляции легких нейтрино. Известно, что эти данные можно объяснить малыми разностями масс электронного, мюонного и τ-нейтрино. Величина $\Delta m^2_{23} = m^2_3 - m^2_2$, извлеченная из данных по солнечным и атмосферным нейтрино, указывает на то, что масса самого тяжелого из трех нейтрино составляет $\sim 10^{-2}$ эВ. Такая величина массы нейтрино находит свое объяснение в «see-saw»-механизме (см. главу 6 части I).

В рамках моделей большого объединения, основанных на калибровочной группе $SO(10)$, обычно рассматриваются правые майорановские нейтрино с распадами, нарушающими лептонное число. Обсудим минимальную модель, не содержащую большого объединения. К стандартной электрослабой модели добавим три правых $SU(2)_L \times U(1)_Y$ синглетных поля $\nu_{\alpha R}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) с майорановским массовым членом. Общее юкавское взаимодействие заряженных лептонов и нейтрино задается выражением (139) приложения 2 с $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, где $\Phi = (\phi^+, \phi^0)^T - SU(2)_L$ дублетное поле. Как описано в приложении 2, мы имеем в массовом базисе три очень легких, практически безмассовых левых майорановских нейтрино и три очень тяжелых правых майорановских нейтрино N_i.

Взаимодействие (139) подразумевает, что N_i имеют на древесном уровне нарушающие лептонное число распады $N_i \to l\phi$ и $N_i \to \bar{l}\phi^*$. $l\phi$ обозначают либо отрицательно заряженный лептон и ϕ^+ (которое позже станет продольной компонентой W^+), либо легкое нейтрино и ϕ^0. Как будет видно ниже, C- и CP-нарушение вызывает различие в скоростях распада по этим двум каналам. Так как N_i находятся в термодинамическом равновесии, CPT-инвариантность и унитарность S-матрицы гарантируют равенство нулю среднего значения лептонного числа. Когда N_i выходят из равновесия, остается опасность «вымывания» процессов нарушения лептонного числа за счет реакций с $|\Delta L| = 2$, осуществляемых обменом N_i.

Будем предполагать, что N_i не вырождены по массе и $M_3 > M_2 > M_1$. На древесном уровне распадная ширина N_i (рис. 13) находится с помощью выражения (19) приложения 2:

$$\Gamma_i = \Gamma(N_i \to l\phi) + \Gamma(N_i \to \bar{l}\phi^*) = \frac{(M_D^+ M_D)_{ii}}{4\pi v^2} M_i, \tag{103}$$

где M_D — дираковская массовая матрица (20) приложения 2.

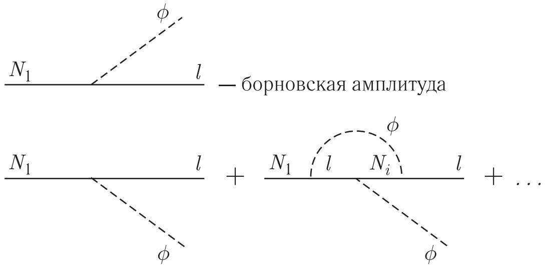


Рис. 13

Сценарий лептогенезиса будет «работать», если $\Gamma_i < H(T = M_i)$. Но это условие выполняется, если масса легких нейтрино $m_{\nu_i} \leq 10^{-3}$ эВ. Эта оценка соответствует наблюдаемым данным. Очевидно, что в распаде N_i, вследствие интерференции борновской (древесной) и однопетлевой амплитуды, возникает CP-асимметрия (рис. 13). Если $M_1 \ll M_2, M_3$, для распада N_1 получаем:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Gamma(N_1 \to l\phi) - \Gamma(N_1 \to \bar{l}\phi^*)}{\Gamma(N_1 \to l\phi) + \Gamma(N_1 \to \bar{l}\phi^*)} \simeq -\frac{3}{4\pi v^2}\frac{1}{(M_D^+ M_D)_{11}}\sum_{j=2,3}\mathrm{Im}\left[(M_D^+ M_D)_{1j}^2\right]\frac{M_1}{M_j}. \quad (104)$$

Асимметрии ε_i определяются модулями и CP-нарушающими фазами элементов матрицы $M_D^+ M_D$.

Асимметрия (104) соответствует асимметрии в плотности лептонов $n_L = n_l - n_{\bar{l}} \neq 0$. Грубая оценка отношения «лептонное число/энтропия» $Y_L = n_L/s$ дает

$$Y_L \simeq \varepsilon_1 \frac{n_N}{s} \sim \frac{\varepsilon_1}{g_*}, \quad (105)$$

где $g_* \sim 100$ в стандартной модели.

Вследствие процессов «вымывания», обсуждавшихся выше, отношение (105) будет несколько меньше. Для нахождения фактора подавления «k» нужно решать уравнения Больцмана, описывающее эволюцию плотностей частиц. Асимметрия в лептонном числе вызывает $B-L$-сохраняющие слабые сфалеронные реакции, которые идут при $T > T_{\mathrm{EW}}$ и создают асимметрию в барионном числе $Y_B = n_B/s$. Можно найти связь между Y_B и соответствующими асимметриями Y_{B-L} и Y_L. Например,

$$Y_B = C Y_{B-L} = \frac{C}{C-1} Y_L. \quad (106)$$

Константа C определяется различными химическими потенциалами частиц. Для минимальной модели, рассмотренной выше, $C = 28/79$. Из (105) и (106) получаем

$$Y_B \sim -Y_L = -k\frac{\varepsilon_1}{g_*}. \quad (107)$$

Для $g_* \sim 100$ и фактора $k \sim 10^{-2}$ необходима очень малая лептонная асимметрия $\varepsilon_1 \sim 10^{-6}$.

8.10. Заключение

В этой главе рассмотрены две наиболее популярные теории бариогенезиса: электрослабого бариогенезиса и сценарий неравновесных распадов. В частности, бариогенезис посредством лептогенезиса — распада сверхтяжелых майорановских нейтрино. Сценарий электрослабого бариогенезиса (EWBG) может быть проверен в недалеком будущем. Важнейший результат уже получен: экспериментальное ограничение на массу Хиггс-бозона $m_H > 114$ ГэВ приводит к заключению о невозможности объяснения барионной асимметрии Вселенной в рамках стандартной модели. EWBG имеет место и в расширениях стандартной модели, наиболее популярное из которых — минимальное суперсимметричное расширение. Однако требование существования фазового перехода 1-го рода дает ограничение на массу легчайшего хиггс-бозона $m_H < 115$ ГэВ. Другой важный элемент EWBG — нестандартное CP-нарушение. С ним связан поиск эффектов T-нарушения в атомных и молекулярных процессах. Эффекты нестандартного CP-нарушения могут проявляться в распадах B-мезонов

или в высокоэнергетических реакциях, включающих рождение и распад t-кварков и Хиггс-бозонов.

Сценарий GUT-бариогенезиса в лабораторных условиях проверить сложно. Но GUT-сценарии получили бы эмпирическую поддержку, если бы был обнаружен распад протона. Это обстоятельство свидетельствует в пользу лептогенезиса посредством распадов сверхтяжелых майорановских нейтрино. Будущие эксперименты в физике высоких энергий и астрофизические данные способны значительно прояснить проблему барионной асимметрии Вселенной.

Приложение 1. C-, P-, T-преобразования оператора барионного числа

Пусть $q(\vec{x},t)$ — дираковский оператор, описывающий кварк сорта $q = u, \ldots, t$; $q^+(\vec{x},t)$ — эрмитово-сопряженный оператор, $\overline{q} = q^+\gamma^0$. Оператор барионного числа (36):

$$\widehat{B} = \frac{1}{3}\sum_q \int d^3x : q^+(\vec{x},t)q(\vec{x},t) :, \tag{1}$$

где точки означают нормальное упорядочение. Пусть C, P — унитарные операторы зарядового сопряжения и четности; T — антиунитарный оператор временной инверсии. На кварковые поля эти операторы действуют следующим образом:

$$Pq(\vec{x},t)P^{-1} = \gamma^0 q(-\vec{x},t), \tag{2}$$

$$Pq^+(\vec{x},t)P^{-1} = q^+(-\vec{x},t)\gamma^0, \tag{3}$$

$$Cq(\vec{x},t)C^{-1} = i\gamma^2 q^+(\vec{x},t), \tag{4}$$

$$Cq^+(\vec{x},t)C^{-1} = iq(\vec{x},t)\gamma^2, \tag{5}$$

$$Tq(\vec{x},t)T^{-1} = -iq(\vec{x},-t)\gamma_5\gamma^0\gamma^2, \tag{6}$$

$$Tq^+(\vec{x},t)T^{-1} = -i\gamma^2\gamma^0\gamma_5 q^+(\vec{x},-t), \tag{7}$$

где γ^0, γ^2 и $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ — матрицы Дирака.

Тогда

$$P : q^+(\vec{x},t)q(\vec{x},t) : P^{-1} =: q^+(-\vec{x},t)q(-\vec{x},t) :, \tag{8}$$

$$C : q^+(\vec{x},t)q(\vec{x},t) : C^{-1} =: q(\vec{x},t)q^+(\vec{x},t) :=: q^+(\vec{x},t)q(\vec{x},t) :, \tag{9}$$

$$T : q^+(\vec{x},t)q(\vec{x},t) : T^{-1} =: q^+(\vec{x},t)q(\vec{x},-t) : . \tag{10}$$

Из этих соотношений получаем

$$P\widehat{B}P^{-1} = \widehat{B}, \tag{11}$$

$$C\widehat{B}C^{-1} = -\widehat{B}. \tag{12}$$

Как мы уже отмечали выше, оператор барионного числа, вследствие непертурбативных эффектов, зависит от времени. Используя трансляционную инвариантность, получаем $\widehat{B}(t) = e^{iHt}\widehat{B}(0)e^{-iHt}$, где H — гамильтониан системы. Оператор $\widehat{B}(0)$ — четный по отношению к преобразованию T и нечетен по отношению к $\theta = CPT$:

$$\theta\widehat{B}(0)\theta^{-1} = -\widehat{B}(0). \tag{13}$$

Приложение 2. Юкавские связи лептонного сектора

В этом приложении обсудим общую структуру $SU(2)_L \times U(1)_Y$-инвариантных юкавских взаимодействий в лептонном секторе, предполагая, что нейтрино — майорановские частицы. Напомним основные формулы для майорановских полей. Сначала возьмем дираковское поле

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где ξ и η — двухкомпонентные спинорные поля. В киральном представлении γ-матриц, в котором $\gamma_5 = \mathrm{diag}(I_2, -I_2)$, $\xi = \psi_R$, $\eta = \psi_L$, ψ_R и ψ_L — правые и левые вейлевские поля. В киральном представлении зарядово-сопряженный спинор ψ^C:

$$\psi^C \equiv i\gamma^2\psi^+ = \begin{pmatrix} i\sigma_2\eta^+ \\ -i\sigma_2\xi^+ \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где σ_2 — матрица Паули. Если выбрать вейлевские поля в 4-компонентной форме $\psi_R = (\xi, 0)^T$, $\psi_L = (0, \eta)^T$, то можно определить, согласно (2), их зарядово-сопряженные поля

$$\psi_L^C \equiv (\psi_L)^C = \begin{pmatrix} i\sigma_2\eta^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\psi_R^C \equiv (\psi_R)^C = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sigma_2\xi^+ \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из этих выражений можно вывести соотношения между 2-компонетными вейлевскими полями и зарядово-сопряженными полями. Из (4) следует, что ψ_L^C (ψ_R^C) являются правыми (левыми) вейлевскими полями. Таким образом, вейлевский полевой оператор ψ_L (ψ_R) аннигилирует дираковское фермионное состояние, имеющее $L(R)$-киральность и создает антифермионное состояние $|\overline{\psi}\rangle$ с $R(L)$-киральностью. Наоборот, ψ_L^C (ψ_R^C) аннигилирует $|\overline{\psi}\rangle$, имеющую $R(L)$-киральность и создает состояние $|\psi\rangle$ с $L(R)$-киральностью. Кроме того,

$$\overline{\psi_L^C} \equiv (\psi_L^C)^+\gamma^0 = (0, i\eta^T\sigma_2), \tag{5}$$

$$\overline{\psi_R^C} \equiv (\psi_R^C)^+\gamma^0 = (-i\xi^T\sigma_2, 0). \tag{6}$$

Что касается нейтрино, то существует две возможности: майорановское и дираковское нейтрино (см. главу 6 части I). В случае майорановской природы, нейтрино совпадает со своей античастицей. Действительно, для майорановского фермиона нет квантового числа, которое бы различало частицу и античастицу. Майорановское поле определяется условием

$$\psi^C = r\psi, \tag{7}$$

где $|r| = 1$, а фаза произвольна. Для $r = +1$ решением (7) будет 4-компонентное поле $\psi_1 = (i\sigma_2\eta^+, \eta)^T$. В терминах вейлевских полей это решение запишется в виде

$$\psi_1 = \psi_L + \psi_L^C. \tag{8}$$

Другое решение (7) с $r = -1$:

$$\psi_2 = \psi_R + \psi_R^C. \tag{9}$$

Далее обсудим майорановские массовые члены. Для майорановских частиц, описываемых полями ψ_1 и ψ_2 с массами m_1 и m_2, можно записать следующие массовые члены

$$L_M^{(1)} = -\frac{m_1}{2}\overline{\psi}_1\psi_1 = -\frac{m_1}{2}\overline{\psi_L^C}\psi_L^C + \text{э.с.}, \tag{10}$$

$$L_M^{(2)} = -\frac{m_2}{2}\overline{\psi}_2\psi_2 = -\frac{m_2}{2}\overline{\psi_R^C}\psi_R^C + \text{э.с.}, \tag{11}$$

где мы использовали условие $\overline{\psi}_A\psi_A = \overline{\psi}_A^C\psi_A^C$ для $A = L, R$. Эти массовые члены нарушают «ψ-число» на 2 единицы, $|\Delta L_\psi| = 2$. Например, $\langle\overline{\psi}_R|\overline{\psi_L^C}\psi_L|\psi_L\rangle \neq 0$, т. е. первый член в $L_M^{(1)}$ превращает $|\psi_L\rangle$ в $|\overline{\psi}_R\rangle$. Напомним, что несохранение «ψ-числа» связано с неинвариантностью $L_M^{(1,2)}$ относительно глобальных $U(1)$-преобразований $\psi_{L,R} \to e^{i\omega}\psi_{L,R}$, $\overline{\psi}_{L,R} \to e^{-i\omega}\overline{\psi}_{L,R}$. Общий массовый член для нейтринных полей ν_L и ν_R содержит и майорановский, и дираковский члены с комплексными массовыми параметрами. Для случая одного аромата

$$-L_{D+M} = \frac{m_L}{2}\overline{\nu_L^C}\nu_L + \frac{m_R}{2}\overline{\nu_R^C}\nu_R + m_D\overline{\nu}_R\nu_L + \text{э.с.} = \frac{1}{2}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2)\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\psi_1 = \nu_L + \nu_L^C, \tag{13}$$

$$\psi_2 = \nu_R + \nu_R^C \tag{14}$$

— майорановские поля. Массовые параметры в (12) выбраны вещественными. Диагонализуем массовую матрицу в предположении $m_R \gg m_D \gg m_L$. Пусть $m_L = 0$, тогда в массовом базисе

$$-L_{D+M} = -\frac{m_\nu}{2}\overline{\nu}\nu + \frac{m_N}{2}\overline{N}N, \tag{15}$$

где

$$\nu \simeq \psi_1, \quad N \simeq \psi_2 \tag{16}$$

и

$$-m_\nu \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D, \tag{17}$$

$$m_N \simeq m_R. \tag{18}$$

Собственное значение m_ν за счет выбора фазы поля ν можно считать положительным. Для $m_R \gg m_D$ нейтринные массовые состояния включают очень легкое левое $|\nu\rangle$ и очень тяжелое правое $|N\rangle$. Соотношение (17) есть не что иное, как следствие «see-saw»-механизма, уже рассмотренного нами в главе 6 части I.

Наконец, рассмотрим случай 3-х поколений лептонов. Обозначим $SU(2)_L$-дублеты $l \equiv (\nu_{\alpha L}, l_{\alpha L})^T$ и $SU(2)_L$-синглеты $l_R = l_{\alpha R}$; $SU(2)_L \times U(1)_Y$-синглеты $\nu_R = \nu_{\alpha R}$, где $\alpha = e, \mu, \tau$ обозначает лептонные поколения в слабом базисе; $\tilde{\Phi}_r = i\sigma_2\Phi_r^+$, $r = 1, 2$, где Φ_r — дублетные хиггсовские поля. Тогда $SU(2)_L \times U(1)_Y$-инвариантные юкавские взаимодействия в лептонном секторе

$$-L_Y = \overline{l}_L\Phi_1 h_l l_R + \overline{l}_L\tilde{\Phi}_2 h_\nu \nu_R + \frac{1}{2}\overline{\nu_R^C}M_R\nu_R + \text{э.с.} \tag{19}$$

В этом лагранжиане h_l, h_ν — комплексные 3×3 матрицы юкавских связей; M_R — 3×3 массовая матрица правых нейтринных полей, которую можно считать диагональной.

Спонтанное нарушение симметрии при электрослабом фазовом переходе приводит к $\langle 0|\Phi|0\rangle_T = v_{rT}/\sqrt{2}$ и дираковским массовым матрицам заряженных лептонов и нейтрино

$$M_l = h_l \frac{\nu_{1T}}{\sqrt{2}}, \quad M_D = h_\nu \frac{\nu_{2T}}{\sqrt{2}}. \tag{20}$$

Перейдем от слабого базиса к массовому базису путем унитарного преобразования в пространстве ароматов. Считая, что матричные элементы M_R гораздо больше M_D, получим

$$\nu_i \simeq (K^+)_{i\alpha}\nu_{\alpha L} + \nu^C_{\alpha L}K_{\alpha i}, \tag{21}$$

$$N_i \simeq \nu_{\alpha R} + \nu^C_{\alpha R} \tag{22}$$

с диагональными массовыми матрицами:

$$M_\nu = -K^+ M_D M_R^{-1} M_D^T K^* + O(M_R^{-3}), \tag{23}$$

$$M_N = M_R + O(M_R^{-1}), \tag{24}$$

где $i = 1, 2, 3$ обозначают поля в массовом базисе; K — унитарная 3×3 матрица, описывающая смешивание лептонных ароматов во взаимодействиях заряженных токов

$$L_{CC}^{\text{lept.}} = -\frac{g_W}{\sqrt{2}} \bar{l}_{iL}\gamma^\mu K_{ij}\nu_j W_\mu^- + \text{э.с.} \tag{25}$$

Дираковскую массовую матрицу можно представить в виде

$$M_D = VRU^+, \tag{26}$$

где U, V — унитарные матрицы, а $R = \text{diag}(r_1, r_2, r_3)$.

Из (23) следует, что модули и фазы матричных элементов K, которые весьма важны для современной физики нейтрино (например, для нейтринных осцилляций и двойного безнейтринного β-распада), зависят от отношений масс m_j/m_i легких левых нейтрино и углов и фаз матриц U и V. С другой стороны, матрица $M_D^+ M_D$, от матричных элементов которой зависит лептогенезис (в частности, CP-асимметрия) задается выражением

$$M_D^+ M_D = UR^2U^+. \tag{27}$$

Отсюда следует, что для лептогенезиса существенны только CP-нарушающие фазы матрицы U.

ЧАСТЬ II

РАСШИРЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

Введение. Трудности стандартной модели и необходимость ее расширения

Зачем нужно рассматривать расширения стандартной модели (SM)? Ответ дает сама SM. $V-A$-вариант теории слабых взаимодействий в первом порядке теории возмущений хорошо «работает» много десятков лет. Еще в 1939 году Гейзенберг заметил, что проблемы возникают при учете высших порядков: теория возмущений нарушается на масштабе энергий ~ 300 ГэВ (масштабе $G_F^{-1/2}$). Позже это было связано с неперенормируемостью 4-х фермионной теории. Неперенормируемость была осознана, но проигнорирована Глэшоу, в 1961 г. предложившего $SU(2)\times U(1)$-структуру теории. Вайнберг и Салам в калибровочных моделях воспользовались идеей спонтанного нарушения симметрии для генерации масс калибровочных бозонов и фермионов, осознавая при этом, что этот механизм не нарушает перенормируемости теории, свойственной безмассовой (ненарушенной) теории. Когда в 1971 г. Г. Хоофт показал это, теория Глэшоу–Вайнберга–Салама получила статус, сравнимый со статусом квантовой электродинамики. Однако для окончательного утверждения электрослабой теории необходимо экспериментально обнаружить нарушающий симметрию (хиггсовский) сектор. Однако за такой, хотя и не окончательный, успех теории нужно «чем-то» заплатить. Возникла проблема иерархий, которая будет обсуждаться ниже. Суперсимметрия (SUSY) способна разрешить эту проблему, если массы SUSY партнеров известных частиц не превышают $(1\div 10)$ ТэВ.

Одна из основных проблем в физике частиц — происхождение фермионных масс и смешивания. Несмотря на несомненные успехи стандартной модели, она не проясняет происхождение этих параметров. В отличие от электрослабого нарушения симметрии, неизвестно, на каком энергетическом масштабе возникают эти параметры. В принципе, этот масштаб может быть любым от 1 ТэВ'а до планковской массы. Другим важным вопросом в стандартной модели, относящимся к фермионом, является подавление нейтральных токов с изменением аромата (FCNC) и CP-нарушающие фазы в фермионных связях. В минимальной стандартной модели только один комплексный дублет «ответственен» за спонтанное нарушение симметрии $SU(2)_L\times U(1)_\gamma\to U(1)_{EM}$. До нарушения симметрии фермионы безмассовые, а после нарушения они приобретают массы за счет юкавских связей. Квадрат массового параметра μ^2 в потенциале определяет характер нарушения симметрии: если $\mu^2<0$, то нарушение симметрии происходит, если же $\mu^2>0$, то все частицы остаются безмассовыми. Но каков источник нарушения симметрии и почему величина $\mu^2<0$? На этот вопрос стандартная модель не дает ответа.

Наличие массовых масштабов в физике описывается и понимается в симметрийных терминах. Однако глубокое понимание симметрийного поведения отсутствует. Действительно, фотон безмассовый до тех пор, пока калибровочная инвариантность не нарушена. Но почему она не нарушена?

Почему нет правых нейтрино? Поскольку нейтрино имеют малые массы, почему лептонные числа являются хорошими приближенными симметриями? Почему кварки и заряженные лептоны имеют наблюдаемые массы? Так как массы нарушают электрослабую симметрию, массы частиц пропорциональны $\lambda\nu$, где ν — размерный

параметр нарушения симметрии, λ — безразмерный параметр, различный для каждого кварка и лептона. Общий масштаб масс определяется величиной ν, а отношение масс частиц зависит от отношений констант связи λ. Большинство λ в терминах приближенных симметрии ароматов, малы. Но что за источник этих симметрии и как происходит нарушение симметрии? Почему имеется только три поколения? И почему u-кварк гораздо легче t-кварка?

Какова природа адронного массового масштаба? Этот тот масштаб КХД, на котором константа связи α_S становится большой. Она возникает вследствие размерной трансмутации калибровочной константы и должна, в принципе, описываться группой симметрии КХД.

Что касается самого механизма Хиггса в стандартной модели, то неизвестно, какая симметрия «стоит» за формированием параметра ν.

Хотелось бы думать, что стандартная модель является низкоэнергетическим пределом более общей теории. Это было бы в традициях эволюции концепции строения материи.

Первое указание на существование «новой физики» вне стандартной модели уже получено. Речь идет о нейтринных осцилляциях в солнечных и атмосферных экспериментах, обнаруживших переходы $\nu_e \to \nu_{\mu,\tau}$ и $\nu_\mu \to \nu_\tau$. Рассмотренные в этой части книги подходы позволяют разрешить те или иные вопросы к стандартной модели, сформулированные выше. Многие из этих объяснений имеют альтернативы, и только будущие экспериментальные данные способны прояснить, какое направление(я?) выбрала Природа.

ГЛАВА 1

СУПЕРСИММЕТРИЯ

1.1. Проблема иерархий

Электрослабый сектор SM содержит параметр размерности энергии («слабый масштаб») — вакуумное среднее хиггсовского поля

$$v \simeq 246 \text{ ГэВ}. \tag{1}$$

Этот параметр, в принципе, задает масштаб масс в теории. Например, масса $W^{\pm}$ (пренебрегая радиационными поправками):

$$M_W = \frac{gv}{2} \simeq 80 \text{ ГэВ}, \tag{2}$$

а масса хиггсовского бозона

$$M_H = v\sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \tag{3}$$

где g — $SU(2)$ калибровочная константа, λ — константа хиггсовского самовзаимодействия в хиггсовском потенциале

$$V = -\mu^2\phi^+\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2, \tag{4}$$

причем $\lambda > 0$ и $\mu^2 > 0$.

В выражении (4) поле ϕ — $SU(2)$-дублет:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Напомним, что отрицательный знак перед μ^2 существенен, поскольку только в этом случае «работает» механизм спонтанного нарушения симметрии. При этом минимум потенциала V

$$|\phi| = \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

интерпретируется как ненулевой минимум классического потенциала. В свою очередь, этот классический минимум (равновесное значение) интерпретируется как вакуумное среднее (vev) квантового поля. Если $-\mu^2$ в (4) заменить положительной величиной μ^2, то классическое равновесное значение будет в начале координат, $V = 0$, и все частицы будут безмассовыми.

Все это справедливо на древесном уровне (без учета петлевых поправок). Что произойдет, если учесть петлевые поправки? Стандартная модель — перенормируемая теория, а это означает, что она дает конечный результат с учетом всех поправок (петель) высших порядков, даже если виртуальные импульсы во всех петлях устремить

к бесконечности. Однако это не означает, что в петлевых интегралах вида

$$\int^{\Lambda} d^4 k f(k, \text{внешние импульсы}) \tag{7}$$

мы должны всегда считать параметр обрезания Λ стремящимся к бесконечности. Более обосновано, пожалуй, считать стандартную модель частью более общей теории, которая включает неизвестную пока «новую физику» при больших энергиях. Параметр Λ — это масштаб, на котором появляется «новая физика» и на котором необходимо модифицировать стандартную модель. В конце концов, мы ожидаем «новую физику» на масштабах, когда становятся существенными эффекты квантовой гравитации. Этот масштаб обычно называют планковской массой

$$M_{\mathrm{Pl}} = (G_N)^{-1/2} \simeq 1{,}2 \cdot 10^{19} \text{ГэВ}. \tag{8}$$

Если M_{Pl} — действительно масштаб «новой физики» вне стандартной модели, то при учете петлевых поправок в SM возникают серьезные трудности.

В самом деле, 4-бозонное взаимодействие в (4) в однопетлевом приближении дает вклад в собственную энергию, представленный на рис. 1.

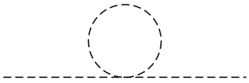


Рис. 1

Этот вклад пропорционален

$$\lambda \int^{\Lambda} d^4 k \frac{1}{k^2 - M_H^2}. \tag{9}$$

Интеграл расходится квадратично и дает поправку

$$\lambda \Lambda^2 \phi^+ \phi \tag{10}$$

к члену $-\mu^2 \phi^+ \phi$ в потенциале V.

Величина v связана с μ соотношением (6) и фиксируется феноменологическим значением (1). Поэтому кажется, что величина μ вряд ли больше нескольких сотен ГэВ. С другой стороны, если $\Lambda \sim M_{\mathrm{Pl}} \sim 10^{19}$ ГэВ, то однопетлевая квантовая поправка к «$-\mu^2$» катастрофически больше $(100 \text{ ГэВ})^2$ и положительна! Поэтому, чтобы получить $-(100 \text{ ГэВ})^2$ после учета всех петлевых поправок, необходимо стартовать с гигантского отрицательного значения параметра $-\mu^2$ в лагранжиане и надеяться на замечательные сокращения с W до $-(100 \text{ ГэВ})^2$.

Это большое сокращение («fine tuning»), включающее параметр μ, влияет не только на массу хиггса (из (3) и (6)):

$$M_H = \sqrt{2}\mu, \tag{11}$$

но и на массу W:

$$M_W = \frac{g\mu}{\sqrt{\lambda}}, \tag{12}$$

а также на массы всех частиц SM, поскольку они зависят от v и, следовательно, от μ. Но почему это так заботит нас, ведь нечто подобное всегда происходит с массовыми членами в перенормируемых теориях? Эта проблема особенно острая в теориях со скалярными частицами (в отличие от теорий только с фермионами и калибровочными

полями, которые способны создавать скалярные частицы как связанные состояния). Примером последнего типа теории может служить квантовая электродинамика (КЭД). Аналогом рис. 1 в КЭД будет однопетлевой процесс, в котором электрон испускает, а затем поглощает фотон. Этому процессу соответствует поправка δm к массе фермиона в лагранжиане

$$\delta m \sim \alpha \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{\not k k^2} \sim \alpha\Lambda. \tag{13}$$

При более точном вычислении интеграла

$$\delta m \simeq \alpha m \ln \Lambda, \tag{14}$$

поэтому даже если $\Lambda \sim 10^{19}$ ГэВ, то $\delta m \sim m$ и в fine tuning нет необходимости.

Почему же получается $\delta m \sim m$? Дело в том, что лагранжиан КЭД при $m \to 0$ кирально инвариантен. При киральных преобразованиях

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{15}$$

для $U(1)$-симметрии и

$$\psi \to e^{i\frac{\vec{\alpha}\vec{\tau}}{2}\gamma_5}\psi \tag{16}$$

в $SU(2)$-случае.

Эта симметрия гарантирует, что все радиационные поправки к массе m, вычисленные в теории возмущений, будут исчезать в пределе $m \to 0$. Поэтому поправки δm должны быть пропорциональны m, а зависимость от Λ (даже из соображений размерности) — только логарифмическая.

Что происходит с поправками к массам калибровочных частиц? В КЭД ненарушенная калибровочная симметрия обеспечивает $m_\gamma = 0$ во всех порядках теории возмущений. Другими словами, калибровочная инвариантность гарантирует, что члены вида

$$m_\gamma^2 A^\mu A_\mu \tag{17}$$

могут генерироваться за счет радиационных поправок в ненарушенной калибровочной теории. С другой стороны, ненулевые массы W- и Z-бозонов в SM возникают на непертурбативном уровне посредством спонтанного нарушения симметрии и вакуумного среднего v. Если $v \equiv 0$, то W и Z, как и фотон, будут безмассовыми. Но $v \sim \mu$, поэтому массы, приобретаемые W и Z при нарушении симметрии, чувствительны к Λ и M_H.

Можно ли найти симметрию, которая бы, подобно киральной или калибровочной симметрии, контролировала бы поправки δm^2 к массе скалярных частиц в лагранжиане? Очевидно, что есть фермионные петлевые поправки к $-\mu^2\phi^+\phi$, в которых частица ϕ переходит в фермион-антифермионную пару, которая затем снова аннигилирует в ϕ частицу. Этот процесс дает вклад

$$-g_f^2 \int \frac{d^4k}{\not k \not k}\phi^+\phi \sim g_f^2\phi^+\phi\Lambda^2. \tag{18}$$

Знак этого выражения существенен, он возникает за счет замкнутой фермионной петли. Объединяя (10) и (18), получаем полную однопетлевую поправку

$$(\lambda - g_f^2)\Lambda^2\phi^+\phi. \tag{19}$$

Сразу возникает соблазн приравнять

$$\lambda = g_f^2. \tag{20}$$

Тогда квадратичная по Λ поправка обратится в ноль. Именно такое сокращение происходит в суперсимметричных теориях. После сокращения члена с Λ^2 две диаграммы для собственной энергии хиггсовского бозона дают

$$\sim \lambda(M_H^2 - m_f^2)\ln\Lambda. \tag{21}$$

Эта поправка может быть порядка M_H^2, если все бозоны и фермионы в теории имеют массы, не превышающие нескольких ТэВ. Частицы, участвующие в механизме сокращения, должны быть приближенно вырожденными (указывая на приближенный характер SUSY) и не слишком превышать по массе v (или M_H). Существенно, что такая бозон-фермионная симметрия «предохраняет» массы скалярных мезонов от квадратичных расходимостей.

Таким образом, SUSY стабилизирует иерархию $M_{H,W} \ll M_{\rm Pl}$ в том смысле, что радиационные поправки не смещают $M_{H,W}$ к большому Λ.

Отметим, что SUSY — это лишь одна из теорий, разрешающих проблему иерархий. Другой, альтернативный подход основан на теории техницвета и будет рассмотрен нами в главе 2 части II.

Перечислим другие аргументы в пользу SUSY:

а) наиболее точная аппроксимация данных, описываемых электрослабой теорией, указывает на то, что масса $M_H \leq 200$ ГэВ. В минимальной суперсимметричной стандартной модели (MSSM), содержащей два хиггсовских дублета, легкий хиггс должен быть не тяжелее 140 ГэВ. В SM нет ограничений на M_H.

б) В однопетлевом приближении обратные калибровочные константы $\alpha_1^{-1}(Q^2)$, $\alpha_2^{-1}(Q^2)$, $\alpha_3^{-1}(Q^2)$ SM изменяются линейно от $\ln Q^2$. Хотя α_1^{-1} уменьшается с Q^2, а α_2^{-1}, α_3^{-1} растут, они не пересекаются, как ожидалось, на масштабе $Q^2 \sim (10^{16}$ ГэВ$)^2$. В MSSM такое объединение происходит.

в) В любой перенормируемой теории массовые параметры лагранжиана зависят от масштаба («бегущие»), как и константы связи. В MSSM эволюция хиггсовского параметра квадрата массы от v^2 до 10^{16} ГэВ приводит к отрицательной поправке, величина которой сравнима с поправкой на масштабе 100 ГэВ, т. е. возникает возможность объяснения источника нарушения электрослабой симметрии. На самом деле это происходит потому, что юкавская константа связи с t-кварком велика (пропорциональна его массе).

1.2. Теоретические основы

Как мы уже не раз подчеркивали, идея симметрий оказалась весьма плодотворной как в физике вообще, так и, в частности, в физике элементарных частиц. Правомерно задать вопрос: используются ли в современных квантовых теориях поля все симметрии, совместимые с Лоренц-инвариантностью?

Обратимся к симметриям зарядов, известным в SM. Например, электрического заряда

$$Q = e\int d^3\vec{x}\psi^+\psi \tag{22}$$

или $SU(2)$-заряда (изоспинового заряда)

$$\vec{T} = g\int d^3\vec{x}\psi^+\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\psi, \tag{23}$$

где в (23) ψ — $SU(2)$-дублет. Как в (22), так и в (23) ψ — фермионное поле.

Все эти операторы симметрии являются лоренцевскими скалярами (они не несут лоренцевских индексов, как вектора или спиноры). Если эти операторы действуют на состояние с определенным спином, то они не могут изменить спин:

$$Q|J\rangle = |\text{тот же } J, \text{ но другой член мультиплета}\rangle. \tag{24}$$

Нам известен один векторный «заряд» — оператор 4-импульса P_μ, генерирующий пространственно-временные смещения, и чьи собственные значения — сохраняющиеся 4-импульсы. Операторы углового момента относятся к антисимметричным тензорам $M_{\mu\nu}$. Есть ли сохраняющиеся симметричные тензорные заряды $Q_{\mu\nu}$?

Таких зарядов нет. Действительно, выберем заряд, действующий на состояние частицы с 4-импульсом p:

$$Q_{\mu\nu}|p\rangle = (\alpha p_\mu p_\nu + \beta g_{\mu\nu})|p\rangle, \tag{25}$$

где правая часть записана из соображений ковариантности (наиболее общее выражение из имеющихся в нашем распоряжении тензоров). Далее рассмотрим двухчастичное состояние $|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle$ и предположим, что $Q_{\mu\nu}$ аддитивны, сохраняются и действуют в каждый момент времени лишь на одну частицу, как обычные заряды. Тогда

$$Q_{\mu\nu}|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle = \big(\alpha(p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)}) + 2\beta g_{\mu\nu}\big)|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle. \tag{26}$$

При упругом рассеянии $1 + 2 \to 3 + 4$ необходимо считать (из-за сохранения собственных значений):

$$p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)} = p_\mu^{(3)} p_\nu^{(3)} + p_\mu^{(4)} p_\nu^{(4)}. \tag{27}$$

В силу сохранения 4-импульса

$$p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(3)} + p_\mu^{(4)}. \tag{28}$$

Общее решение уравнений (27) и (28):

$$p_\mu^{(1)} = p_\mu^{(3)}, \quad p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(4)} \quad \text{или} \quad p_\mu^{(1)} = p_\mu^{(4)}, \quad p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(3)}. \tag{29}$$

Последние условия означают, что рассеяние происходит только вперед или только назад. Очевидно, что такое ограничение слишком обременительно. Можно сделать вывод: не существует других сохраняющихся операторов (кроме P_μ и $M_{\mu\nu}$) с нетривиальными лоренцевскими трансформационными свойствами (т. е. не лоренцевских скаляров). Существование операторов P_μ и $M_{\mu\nu}$ допускает всевозможные процессы рассеяния. Допущение других законов сохранения жестко ограничивает возможные конфигурации.

Эти рассуждения, однако, не исключают заряды, преобразующиеся при Лоренц-преобразованиях как спиноры, т. е. как фермионные поля ψ. Можно обозначить такой заряд Q_a, где индекс «a» указывает на спинорную компоненту. Для такого заряда уравнение (24) уже не справедливо:

$$Q_a|J\rangle = |J \pm 1/2\rangle. \tag{30}$$

Такой оператор не дает вклада в матричный элемент процесса две частицы $\to$ две частицы (упругое рассеяние), поскольку спины частиц не меняются.

Возникает вопрос: можно ли включить такие спинорные операторы, наряду с P_μ и $M_{\mu\nu}$, в согласованную алгебраическую схему? Положительный ответ на этот вопрос был дан в рамках алгебры суперсимметрии Гольфандом и Лихтманом. Под

алгеброй, как обычно, понимается набор коммутационных соотношений между «зарядами», являющимися генераторами соответствующих преобразований симметрии. Пример — $SO(3)$-алгебра операторов углового момента, они же — генераторы вращений. Однако «заряды», имеющие спинорный характер, должны антикоммутировать между собой. Поэтому алгебра суперсимметрии содержит как коммутационные, так и антикоммутационные соотношения.

Как выглядит эта алгебра? Поскольку спинорные заряды Q_a — операторы симметрии, они должны коммутировать с гамильтонианом системы:

$$[Q_a, H] = 0, \tag{31}$$

антикоммутатор двух зарядов тоже коммутирует с гамильтонианом:

$$\big[\{Q_a, Q_b\}, H\big] = 0. \tag{32}$$

Заметим, что спинорные Q_a имеют две компоненты, т. е. симметричный объект $\{Q_a, Q_b\} = Q_a Q_b + Q_b Q_a$ имеет три независимых компоненты, и поэтому должен преобразовываться как объект со спином 1 (точно также, как симметричная комбинация двух волновых функций частиц со спином 1/2). Но в релятивистской теории объект со спином 1 должен описываться 4-вектором, а не 3-вектором. Этот 4-вектор, согласно (32), сохраняется. Существует лишь один такой сохраняющийся 4-векторный оператор P_μ. Поэтому Q_a должен удовлетворять алгебре, в которой

$$\{Q_a, Q_b\} \sim P_\mu. \tag{33}$$

Однако в выражении (33) нет баланса индексов справа и слева. Этот вопрос будет рассмотрен позже, здесь же мы обсудим, в чем заключается радикальная идея суперсимметрии. Из (33) следует, что, если провести два SUSY преобразования, генерируемых операторами Q_a, получим оператор энергии–импульса. Или, другими словами, получим оператор пространственно-временной трансляции или производную. Можно сказать, что спинорные операторы SUSY Q_a ведут себя как квадратные корни из 4-импульсов или как квадратные корни из производных! Четырехмерные производные жестко связывают наши представления с четырехмерным пространством–временем. Обсуждая сейчас возможности существования квадратных корней из этих производных, мы существенно расширяем концепцию пространства–времени. Наверное, здесь правомерна аналогия с введением квадратного корня из (-1) и расширением вещественной оси в комплексную плоскость. Таким образом, мы допускаем, что пространственно-временные координаты значительно расширяются за счет включения других степеней свободы, причем новые степени свободы связаны со стандартными степенями свободы преобразованиями, генерируемыми операторами Q_a. Эти новые степени свободы — фермионные степени свободы. SUSY расширяет пространство–время до суперпространства, вводя «фермионные измерения».

Часто говорят, что SUSY подразумевает (если она точная симметрия) вырожденность мультиплетов бозонов и фермионов. Это правильно и феноменологически важно, однако, фермионное расширение пространства–времени, пожалуй, наиболее замечательное свойство.

1.3. Спиноры

Начнем обсуждение с напоминания роли симметрий (например, $SU(2)$) в квантовой теории поля. Пусть лагранжиан теории содержит набор полей ψ_r — они могут быть бозонами или фермионами. Считаем, что лагранжиан инвариантен относитель-

но инфинитезимальных преобразований полей:

$$\delta_\varepsilon \psi_r = -i\varepsilon \lambda_{rs} \psi_s, \tag{34}$$

где суммирование проводится по повторяющемуся индексу s, λ_{rs} — некоторые постоянные коэффициенты (например, элементы матриц Паули), ε — инфинитезимальный параметр. Преобразование суперсимметрии выглядит похоже, только бозонные поля преобразуются в фермионные

$$\delta_\xi \phi \sim \xi\psi, \tag{35}$$

где ϕ — бозонное (скажем, со спином 0), ψ — фермионное поле (со спином 1/2), ξ — инфинитезимальный параметр (он должен быть спинором). При этом заметим, что число степеней свободы (фермионных и бозонных) в обеих частях (35) должно быть одинаковым, точно так же, как число полей $r = 1, 2, \ldots, N$ в левой части (34) равно числу $s = 1, 2, \ldots, N$ в правой части. Простейший пример бозонного поля — нейтральное скалярное поле, имеющее только одну вещественную компоненту $\phi = \phi^+$. С другой стороны, нет фермионного поля только с одной компонентой. Спинор имеет, по крайней мере, две компоненты. Это означает, что нужно рассматривать бозонное поле с двумя степенями свободы, и это будет комплексное (заряженное) скалярное поле.

Какого типа двухкомпонентное фермионное поле нужно «подобрать в пару» к комплексному скалярному полю? Например, в уравнение Дирака входит не двухкомпонентное, а четырехкомпонентное поле. В простейшем варианте SUSY участвуют, однако, комплексное скалярное поле и двухкомпонентное фермионное поле. Дираковские поля на самом деле содержат два двухкомпонентных поля. Нужно «достроить» дираковское поле и понять природу двух различных двухкомпонентных полей. Дело в том, что две «половинки» 4-компонентного дираковского поля поразному ведут себя при преобразованиях Лоренца. Понимание этого аспекта очень важно с точки зрения записи SUSY преобразований, соответствующих преобразованиям Лоренца. Например, левая часть (35) содержит комплексное скалярное поле (спин 0), причем его как вещественная, так и мнимая компоненты несут спин 0. Следовательно, они инвариантны относительно преобразований Лоренца. В правой же части (35) — двухкомпонентный спинор (спин 1/2) ψ, который неинвариантен относительно преобразований Лоренца. Но параметр ξ — тоже двухкомпонентный спинор, поэтому надо понять, как «совместить» ξ и ψ, чтобы в правой части (35) получить те же трансформационные свойства, что и в левой.

1.3.1. Спиноры и преобразования Лоренца. Начнем с уравнения Дирака в импульсном пространстве

$$E\Psi = (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)\Psi, \tag{36}$$

выбрав представление

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Тогда гамма-матрицы

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Как обычно, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — матрицы Паули. Представив поле (36) в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{39}$$

получим из уравнения Дирака

$$(E - \vec{\sigma}\vec{p})\psi = m\chi, \tag{40}$$

$$(E + \vec{\sigma}\vec{p})\chi = m\psi. \tag{41}$$

Заметим также, что при $m \to 0$ $\vec{\sigma}\vec{p}\psi_0 = E\psi_0$ и $E \to |\vec{p}|$, т. е. в безмассовом пределе

$$\left(\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}\right)\psi_0 = \psi_0. \tag{42}$$

Это уравнение означает, что ψ_0 — собственное состояние оператора спиральности $\vec{\sigma}\vec{p}/|\vec{p}|$ с собственным значением $+1$ (положительная спиральность). Соответственно, в безмассовом пределе (41) характеризует состояние χ_0 с отрицательной спиральностью.

При $m \neq 0$ ψ и χ не являются собственными состояниями спиральности — массовый член их смешивает. Как мы увидим ниже, именно эти двухкомпонентные объекты ψ и χ имеют вполне определенные лоренцевские трансформационные свойства, и именно их мы будем рассматривать.

Поля ψ и χ, не являясь собственными состояниями спиральности, будут собственными состояниями оператора γ_5. Действительно,

$$\gamma_5\begin{pmatrix}\psi\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi\\0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \gamma_5\begin{pmatrix}0\\\chi\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\\chi\end{pmatrix}. \tag{43}$$

Эти два собственных γ_5-состояния можно построить из первоначального поля Ψ, используя проекционные операторы

$$P_R = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$P_L = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}. \tag{45}$$

Тогда

$$P_R\Psi = \begin{pmatrix}\psi\\0\end{pmatrix}, \quad P_L\Psi = \begin{pmatrix}0\\\chi\end{pmatrix}. \tag{46}$$

Легко проверить, что $P_R P_L = 0$, $P_R^2 = P_L^2 = 1$. Собственные состояния γ_5 называются киральностями: ψ имеет киральность $+1$, а χ — киральность (-1). По не совсем удачной терминологии, киральность $(+)$ обозначается R (правая киральность), а киральность $(-)$ — L(левая), несмотря на то, что (как было указано выше) ψ и χ при $m \neq 0$ не являются собственными значениями спиральности. Часто 2-компонентный спинор «ψ-типа» обозначается как ψ_R, а «χ-типа» — как χ_L. Далее будем опускать индексы R и L, имея в виду, что ψ находится в R-состоянии, а χ — в L-состоянии.

Как уже отмечалось, ψ и χ обладают вполне определенными лоренцевскими свойствами. Лоренцевские преобразования включают в себя два типа: вращения и сдвиги. Достаточно рассмотреть инфинитезимальные преобразования, которые можно определить по их действию на 4-вектор, например на 4-вектор энергии–импульса $(E, \vec{p})$. При инфинитезимальном 3-мерном вращении

$$E \to E' = E; \quad \vec{p} \to \vec{p'} = \vec{p} - \vec{\varepsilon} \times \vec{p}, \tag{47}$$

где $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ — три инфинитезимальных параметра, определяющие вращение.

При преобразованиях сдвига

$$E \to E' = E - \vec{\eta}\vec{p}; \quad \vec{p} \to \vec{p'} = \vec{p} - \vec{\eta}E, \tag{48}$$

где $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ — три инфинитезимальных скорости.

Таким образом, ψ и χ при лоренцевских преобразованиях преобразуются следующим образом:

$$\psi \to \psi' = \left(1 + i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\right)\psi, \tag{49}$$

$$\chi \to \chi' = \left(1 + i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\right)\chi. \tag{50}$$

Уравнения (49) и (50) очень важны, поскольку они дают «рецепт» построения спиноров ψ' и χ' в повернутой и сдвинутой системе с помощью исходных спиноров ψ и χ. Иначе говоря, ψ' и χ' из (49), (50) удовлетворяют «штрихованному» аналогу уравнений (40) и (41):

$$(E' - \vec{\sigma}\vec{p})\psi' = m\chi', \tag{51}$$

$$(E' + \vec{\sigma}\vec{p})\chi' = m\psi'. \tag{52}$$

Остановимся на минуту и проверим это утверждение в частном случае — для преобразований сдвига. Определим $V_{\vec{\eta}} = (1 - \vec{\eta}\vec{\sigma}/2)$. Поскольку $\vec{\eta}$ — инфинитезимальный, то $V_{\vec{\eta}}^{-1} = (1 + \vec{\eta}\vec{\sigma}/2)$. Домножим (40) слева на $V_{\vec{\eta}}^{-1}$ и вставим единичную матрицу $V_{\vec{\eta}}^{-1}V_{\vec{\eta}}$:

$$\left[V_{\vec{\eta}}^{-1}(E - \vec{\sigma}\vec{p})V_{\vec{\eta}}^{-1}\right]V_{\vec{\eta}}\psi = mV_{\vec{\eta}}^{-1}\chi. \tag{53}$$

Если выполняется (49), то $\psi' = V_{\vec{\eta}}\psi$. Аналогично, если выполняется (50), то $\chi' = V_{\vec{\eta}}^{-1}\chi$ для чистых сдвигов. Поэтому для установления полной согласованности (49), (50) и (51) нужно показать, что

$$V_{\vec{\eta}}^{-1}(E - \vec{\sigma}\vec{p})V_{\vec{\eta}}^{-1} = (E' - \vec{\sigma}\vec{p'}). \tag{54}$$

Это равенство следует из соотношения

$$\left(1 + \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\right)(E - \vec{\sigma}\vec{p})(1 + \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}) = \left(E - \vec{\eta}\vec{p}\right) - \vec{\sigma}(\vec{p} - E\vec{\eta}), \tag{55}$$

в первом порядке по $\vec{\eta}$ правая часть (55) совпадает с $(E' - \vec{\sigma}\vec{p'})$.

Возвращаясь к уравнениям (49) и (50), заметим, что ψ и χ ведут себя одинаково при вращениях (у них спин 1/2), но по-разному при сдвигах. Интересно, что есть два типа двухкомпонентных спиноров, отличающихся характером преобразований при сдвигах. Оба типа используются при построении 4-компонентного дираковского спинора. В SUSY работают обычно с двухкомпонентными спинорами ψ и χ (с индексами R и L).

Отметим еще одну важную особенность уравнений (49) и (50). Пусть V — матрица преобразования в уравнении (49):

$$V = \left(1 + i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\right). \tag{56}$$

Тогда

$$V^{-1} = \left(1 - i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\right), \tag{57}$$

однако

$$V^+ = \left(1 - i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\right) \tag{58}$$

в силу эрмитовости матриц $\vec{\sigma}$. Поэтому

$$V^{+^{-1}} = V^{-1^+} = \left(1 + i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\right), \tag{59}$$

а это есть матрица, входящая в уравнение (50). Поэтому можно записать компактно

$$\psi' = V\psi, \quad \chi' = V^{+-1}\chi, \quad \chi = V^{-1^+}\chi. \tag{60}$$

1.3.2. Построение инвариантов и 4-векторов из 2-компонентных спиноров. Напомним некоторые известные свойства уравнения Дирака. Из 4-компонентного дираковского спинора можно образовать лоренцевский инвариант

$$\overline{\Psi}\Psi = \Psi^+\beta\Psi \tag{61}$$

и 4-вектор

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \Psi^+\beta(\beta, \beta\vec{\alpha})\Psi = \Psi^+(1, \vec{\alpha})\Psi. \tag{62}$$

В терминах 2-компонентных объектов ψ и χ соотношение (61)

$$(\psi^+\chi^+)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \psi^+\chi + \chi^+\psi. \tag{63}$$

Используя (60), легко проверить, что правая часть (63) — инвариант. В самом деле,

$$\psi^+\chi \to \psi^{+'}\chi' = \psi V^+ V^{+-1}\chi = \psi^+\chi, \tag{64}$$

аналогично и для $\chi^+\psi$. Из (62) для 4-вектора имеем

$$(\psi^+\chi^+)\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \left(\psi^+\psi + \chi^+\chi, \psi^+\vec{\sigma}\psi - \chi^+\vec{\sigma}\chi\right) = \psi^+\sigma^\mu\psi + \chi^+\overline{\sigma}^\mu\chi, \tag{65}$$

где введены важные величины

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \overline{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}). \tag{66}$$

При этом $\psi^+\sigma^\mu\psi$ и $\chi^+\overline{\sigma}^\mu\chi$ при Лоренц-преобразованиях ведут себя как 4-вектора.

В обозначениях σ^μ и $\overline{\sigma}^\mu$ уравнения Дирака (40) и (41) имеют вид

$$\sigma^\mu p_\mu \psi = m\chi, \tag{67}$$

$$\overline{\sigma}^\mu p_\mu \chi = m\psi. \tag{68}$$

Можно сказать, что $\sigma^\mu p_\mu$ переводит объект ψ-типа в объект χ-типа, а $\overline{\sigma}^\mu p_\mu$ превращает χ в ψ. Более точно, при Лоренц-преобразованиях $\sigma^\mu p_\mu \psi$ изменяется как χ, а $\overline{\sigma}^\mu p_\mu \chi$ — как ψ.

Перепишем дираковский лагранжиан в терминах ψ и χ:

$$\overline{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = \psi^+ i\sigma^\mu\partial_\mu\psi + \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - m(\psi^+\chi + \chi^+\psi). \tag{69}$$

До сих пор мы строили 4-вектора, используя либо только ψ, либо только χ. Инварианты же ($\psi^+\chi$ и $\chi^+\psi$) используют оба типа объектов. А можно ли построить инвариант только с помощью, например, спиноров χ-типа? Другими словами,

возможно ли построить спинор из компоненты, скажем, χ, который бы имел трансформационный характер ψ? Ответ на этот вопрос положительный.

Выберем комплексно сопряженное к χ поле χ^*. При Лоренц-преобразованиях

$$\chi' = \Big(1 + i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\Big)\chi, \tag{70}$$

а для сопряженного поля

$$\chi^{*\prime} = \Big(1 - i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}^*}{2} + \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}^*}{2}\Big)\chi. \tag{71}$$

Заметим, что $\sigma_1^* = \sigma_1$, $\sigma_2^* = -\sigma_2$, $\sigma_3^* = \sigma_3$, $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1$ и $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2$. Поэтому

$$\sigma_2\chi^{*\prime} = \sigma_2\left(1 - i\frac{\vec{\varepsilon}(\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3)}{2} + \frac{\vec{\eta}(\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3)}{2}\right)\chi^* = \Big(1 + i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{\eta}\vec{\sigma}}{2}\Big)\sigma_2\chi^* = V\sigma_2\chi^*, \tag{72}$$

где использовано определение (56).

Суммируем полученные результаты:

$$\sigma_2\chi^* \quad \text{преобразуется как} \quad \psi. \tag{73}$$

Введем «ψ-подобный» объект, полученный из χ:

$$\psi_\chi = i\sigma_2\chi^*. \tag{74}$$

Тогда

$$\psi^+_{\chi^{(1)}}\chi^{(2)} = \big(i\sigma_2\chi^{(1)*}\big)^{*T}\chi^{(2)} = \big(i\sigma_2\chi^{(1)}\big)^T\chi^{(2)} = \chi^{(1)T}(-i\sigma_2)\chi^{(2)}, \tag{75}$$

где «T» означает транспонирование, будет Лоренц-инвариантной величиной для любых «χ-подобных» объектов $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$, аналогично $\psi^+\chi$. Уравнение (75) особенно важно, поскольку оно определяет, как построить Лоренц-инвариантное преобразование для определения SUSY преобразований (35). В частности, $\psi^+_\chi\chi$ — Лоренц-инвариант, если χ — одинаковые. Действительно:

$$(i\sigma_2\chi^*)^{*T}\chi = (i\sigma_2\chi)^T\chi = \chi^T(-i\sigma_2)\chi. \tag{76}$$

Но $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$i\sigma_2\chi = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ -\chi_1 \end{pmatrix}, \quad (i\sigma_2\chi)^T\chi = \chi_2\chi_1 - \chi_1\chi_2. \tag{77}$$

Но не равно ли нулю последнее соотношение? Да, если χ_1 и χ_2 — обычные функции, и нет, если они антикоммутирующие величины, как для квантованных фермионных полей!

Естественный вопрос: что происходит с ψ^*? Действуя по аналогии с (71) и (72), получаем:

$$\sigma_2\psi^* \quad \text{преобразуется как} \quad \chi. \tag{78}$$

Это опять позволяет ввести объект χ-типа

$$\chi_\psi = i\sigma_2\psi^*. \tag{79}$$

Тогда для любых двух $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ имеем

$$\big(-i\sigma_2\psi^{(1)*}\big)^{*T}\psi^{(2)} = \big(-i\sigma_2\psi^{(1)}\big)^T\psi^{(2)} = \psi^{(1)T}i\sigma_2\psi^{(2)} \tag{79a}$$

Эта величина будет инвариантна, как и $(-i\sigma_2\psi)^T\psi$.

Здесь необходимо сделать несколько замечаний, относительно обозначений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Предположим, что ξ — второй спинор χ-типа, имеющий вид

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда величина $(i\sigma_2\chi)^T\xi$ будет Лоренц-инвариантна, причем

$$(\chi^1\chi^2)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \chi^1\xi^1 + \chi^2\xi^2 = \chi^a\xi_a,$$

где $a = 1, 2$. Последнее соотношение представляет собой компактную запись скалярного произведения: это так называемое спинорное точечное произведение, аналогичное точечному произведению $A^\mu B_\mu$ в теории относительности. Для точечного произведения будем использовать обозначение $\chi\xi$ или $\xi\chi$. Заметим, если компоненты χ и ξ коммутируют, то не имеет значения, как записать этот инвариант: $\chi\xi = \chi^1\xi_1 + \chi^2\xi_2$ или $\xi^1\chi_1 + \xi^2\chi_2$. Но если они антикоммутируют, эти комбинации полей отличаются знаком. В этом случае нужно условиться, как понимать точечное произведение. Обычно выбирается условие положительности точечного произведения.

1.3.3. Майорановские фермионы. Начнем с того, что, согласно (79), $\chi_\psi = i\sigma_2\psi^*$ преобразуется как объект χ-типа. Этот объект согласуется с теорией Дирака, если объединить ψ и χ_ψ в 4-компонентный объект

$$\Psi_M^\psi = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Этот объект ведет себя при Лоренц-преобразованиях подобно «обычному» дираковскому спинору Ψ, построенному с помощью ψ и χ. Но Ψ_M^ψ в (80) имеет меньше степеней свободы, чем обычный дираковский 4-компонентный спинор Ψ, так как Ψ_M^ψ полностью определяется 2-компонентным объектом ψ. В дираковском спиноре имеется два 2-компонентных спинора, каждый из которых зависит от 4-х вещественных величин (каждый имеет две комплексные компоненты), т. е. всего 8. В Ψ_M^ψ, однако, содержится лишь 4 вещественных величины (входящих в спинор ψ).

Что это означает физически, становится ясно при рассмотрении операции зарядового сопряжения. На дираковском 4-компонентном спиноре операция зарядового сопряжения определяется следующим образом:

$$\Psi_C = C_0\Psi^*, \tag{81}$$

где

$$C_0 = -i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Тогда

$$\Psi_{M,C}^\psi = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^* \\ -i\sigma_2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix} = \Psi_M^\psi. \tag{83}$$

Итак, Ψ_M^ψ описывает частицу со спином 1/2, состояние которой четно при зарядовом сопряжении, т. е. эта частица совпадает со своей античастицей. Такую частицу называют майорановским фермионом. Это свойство зарядового (само)сопряжения и есть физическая причина отличия числа степеней свободы в Ψ_M^ψ по сравнению с Ψ

в (36). В дираковском поле есть 4 физически различных моды, например, e_L^-, e_R^-, e_L^+, e_R^+. Но майорановское поле содержит только два, поскольку частица совпадает со своей античастицей, например, ν_L, ν_R, если нейтрино — майорановские частицы.

Можно определить

$$\Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{84}$$

при этом

$$\Psi_{M,C}^\chi = \Psi_M^\chi. \tag{85}$$

Очевидно, что формализм, использующий только χ, эквивалентен использованию только ψ. Массовый член $\overline{\Psi}\Psi$ в этом случае

$$\overline{\Psi}_M^\chi \Psi_M^\chi = \left((i\sigma_2\chi^*)^+\chi^+\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix} = \chi^T(-i\sigma_2)\chi + \chi^+(i\sigma_2)\chi^*. \tag{86}$$

Первое слагаемое в последнем выражении (86) — в точности (76), а второе слагаемое — Лоренц-инвариант, образованный из χ.

Аналогично массовый член

$$\overline{\Psi}_M^\psi \Psi_M^\psi = \left(\psi^+(-i\sigma_2\psi^*)^+\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix} = \psi^+(-i\sigma_2)\psi^* + \psi^T(i\sigma_2)\psi. \tag{87}$$

Снова в последнем равенстве первое слагаемое — инвариант, построенный из ψ. Отметим, что все слагаемые в (86) и (87) должны обращаться в ноль, если компоненты полей не обладают антикоммутационными свойствами.

Рассмотрим Лоренц-инвариантное произведение двух различных майорановских спиноров

$$\overline{\Psi}_{1M}\Psi_{2M} = \Psi_{1M}^+\beta\Psi_{2M}. \tag{88}$$

Из (81) и (83) имеем

$$\Psi_{1M} = -i\gamma^2\Psi_{1M}^*, \tag{89}$$

следовательно

$$\Psi_{1M}^+ = \Psi_{1M}^T(-i\gamma^2), \tag{90}$$

где использовано $\gamma^{2+} = -\gamma^2$.

Тогда получаем

$$\Psi_{1M}^+\beta\Psi_{2M} = \Psi_{1M}^T(-i\gamma^2\beta)\Psi_{2M}. \tag{91}$$

Матрица

$$-i\gamma^2\beta = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \tag{92}$$

действует как метрика в формировании точечного произведения двух Ψ_M. Очевидно, что (91) сводится к (86) при $\Psi_{1M} = \Psi_{2M} = \Psi_M^\chi$ и к (87), если $\Psi_{1M} = \Psi_{2M} = \Psi_M^\psi$.

1.3.4. Дираковские фермионы, построенные с помощью спиноров $\chi(L)$-типа. В начале этой главы было отмечено, что простейший вариант SUSY включает комплексное скалярное поле и двухкомпонентное спинорное поле. Это прообраз ми-

нимальной суперсимметричной стандартной модели (MSSM). Использование χ-типа спиноров (или L-типа спиноров) не вызывает сомнений, так как $V-A$-структура электрослабого сектора SM выделяет именно L-компоненты. В контексте SUSY очень удобно использовать один тип спиноров, для MSSM это L-тип, но что делать с R-частями полей стандартной модели? Рассмотрим, например, электронное поле, записанное в виде

$$\Psi^{(e^-)} = \begin{pmatrix} \psi_R^{(e^-)} \\ \chi_L^{(e^-)} \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Вместо использования «правого» электронного поля, можно выбрать зарядово-сопряженное левое позитронное поле, т. е. вместо (93) записать

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi_L^{(e^+)*} \\ \chi^{(e^-)} \end{pmatrix}. \tag{94}$$

В обычных обозначениях

$$\chi_L^{(e^+)C} = i\sigma_2\chi_L^{(e^+)*} \tag{95}$$

или, в более компактной форме, e_L^{+C}, сопровождающий L-типа электронное поле e_L^-. Наш предыдущий опыт гарантирует, что (94) имеет «правильные» Лоренц-трансформационные свойства. В терминах (94) массовый член (не майорановского!) дираковского фермиона (опуская индекс «L» для χ):

$$\overline{\Psi}^{(e)}\Psi^{(e)} = \Psi^{(e)+}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Psi^{(e)} =$$
$$= \left((i\sigma_2\chi^{(e^+)})^T\chi^{(e^-)+}\right)\begin{pmatrix} \chi^{(e^-)} \\ i\sigma_2\chi^{(e^+)*} \end{pmatrix} = \chi^{(e^+)}\chi^{(e^-)} + \chi^{(e^-)+}i\sigma_2\chi^{(e^+)*}. \tag{96}$$

Таким образом, дираковская масса записана целиком в терминах двух спиноров L-типа: один ассоциирован с e^- модой, другой — с e^+ модой.

1.4. Простейший суперсимметричный лагранжиан

В этом разделе будет построена простейшая антисимметричная теория, включающая только два свободных поля: комплексное (со спином 0) поле ϕ и L-типа спинорное поле χ, оба безмассовые. Плотность лагранжиана системы:

$$L = \partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi + \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi. \tag{97}$$

Часть лагранжиана, связанная с ϕ, хорошо известна из стандартных курсов квантовой теории поля, часть с χ — из дираковского лагранжиана (69). Уравнение движения, для поля ϕ, конечно, $\Box\phi = 0$, а для χ: $i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi = 0$ (ср. с (68)). Нам хотелось бы найти преобразование, которое изменяло бы ϕ пропорционально χ (как в (35)), а χ пропорционально ϕ, оставляя при этом лагранжиан L инвариантным. Сначала разберемся с размерностями.

Действие — интеграл от плотности лагранжиана L по 4-мерному пространству. Действие в единицах $\hbar = c = 1$ безразмерно. В теории остается лишь один параметр с размерностью массы (энергии) M. Длина имеет размерность времени ($c=1$) и размерность M^{-1}. Плотность лагранжиана имеет размерность M^4. Поскольку

производные имеют размерность M, то размерности ϕ и χ:

$$\begin{aligned}[\phi] &= M,\\ [\chi] &= M^{3/2}.\end{aligned} \tag{98}$$

Какое SUSY преобразование связывает ϕ и χ? Некоторые соображения, которые хоть и не дают прямого ответа, весьма полезны. Рассмотрим изменение ϕ, $\delta_\xi \phi$, где ξ — постоянный (независящий от x) параметр. Это изменение (как в (35)) можно записать в виде:

$$\text{изменение } \phi = \text{параметр } \xi \times \text{поле } \chi. \tag{99}$$

В левой части (99) содержится поле спина 0, инвариантное относительно преобразований Лоренца. Поэтому нужно построить инвариант из χ и параметра ξ. Самый простой способ — считать, что ξ — тоже спинор χ (или L-типа спинор) и воспользоваться инвариантным произведением (75). Тогда

$$\delta_\xi \phi = \xi^T(-i\sigma_2)\chi. \tag{99a}$$

Нужно сделать несколько замечаний относительно параметра ξ. Повторим, что это спинор. Он не зависит от пространственно-временной точки xи неинвариантен относительно преобразований Лоренца: он преобразуется как спинор χ-типа, т. е. с помощью V^{-1+}. Он имеет две компоненты, каждая из которых комплексна, т. е. зависит от 4-х вещественных чисел. Хотя ξ не зависит от x, и в этом смысле не является полевым оператором, будем предполагать, что его компоненты антикоммутируют с компонентами спинорных полей. Из размерных соображений в (99), получаем размерность

$$[\xi] = M^{-1/2}. \tag{100}$$

Что касается $\delta_\xi \chi$, то эта величина должна быть

$$\delta_\xi \chi \sim \text{произведение } \xi \text{ и } \phi. \tag{101}$$

Левая часть этого выражения имеет размерность $M^{3/2}$, в то время как правая часть — размерность $M^{-1/2+1} = M^{1/2}$. Надо ввести в правую часть объект с размерностью M^1. В безмассовой теории есть только один размерный параметр — оператор градиента ∂_μ или, что более удобно, оператор импульса $i\partial_\mu$. Но в этом случае нужно «поглотить» индекс μ в правой части (101). Для этого выберем $\delta_\xi \chi$ в виде

$$\delta_\xi \chi = (i\sigma^\mu \partial_\mu \phi)\xi, \tag{102}$$

где σ^μ задаются выражением (66). Отметим, что матрицы 2×2 σ^μ действуют на двухкомпонентный столбец, т. е. слева в (102) должен быть тоже двухкомпонентный столбец. Хотя и правая, и левая части (102) — двухкомпонентные вектора, правая часть не преобразуется как спинор χ-типа. Если обратиться к (67) и (68), то можно заметить, что комбинация $\sigma^\mu \partial_\mu$, действуя на ψ, создает объект, преобразующийся как χ. Таким образом, следует допустить, что $\sigma^\mu \partial_\mu$ действует не на ξ, а на ψ-подобный объект. В результате получается объект, преобразующийся как χ. Но мы знаем, как создать ψ-подобный объект без использования ξ. Согласно (76), нужно взять $i\sigma_2 \chi^*$. Поэтому окончательно получаем

$$\delta_\xi \chi_a = A\big[i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*)\big]_a \partial_\mu \phi, \tag{103}$$

где A — некоторая константа, которая определяется из условия инвариантности плотности лагранжиана относительно преобразований (99) и (103). Выражение (103) содержит в обеих частях χ-типа спинорный индекс.

Уравнения (99) и (103) задают SUSY преобразования ϕ и χ, но поскольку они комплексные поля, нужно выяснить, как преобразуются эрмитово-сопряженные поля ϕ^+ и χ^+. Напомним, что ϕ и χ — квантованные поля (хотя мы не пишем на ними традиционные шляпки), а ξ — не поле (не зависит от x). При обсуждении выше Лоренц-преобразований спиноров, для обозначения комплексного сопряжения, использовался символ «*», при этом предполагалось, что мы имеем дело с волновыми функциями, а не с полевыми операторами.

Рассмотрим, однако, разложение квантованного поля

$$\phi = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}}\big[a(k)e^{-ikx} + b^+(k)e^{ikx}\big]. \tag{104}$$

Оператор $a(k)$ уничтожает частицу с импульсом k, а $b^+(k)$ рождает античастицу с 4-импульсом k. Для (104) операция комплексного сопряжения не подходит, так как $a^*(k)$ не определен. Вместо этого мы хотели бы иметь $a^+(k)$. Поэтому вместо «ϕ^*» мы имеем дело с ϕ^+, который определяется с помощью (104) и необходим для выполнения двух условий: а) выбора комплексно-сопряженных волновых функций ($e^{\pm ikx}$); б) выбора «крестованных» операторов $a(k)$ и $b(k)$. Таким образом,

$$\phi^+ = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}}\big[a^+(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}\big]. \tag{105}$$

Для спинорных полей, например χ-типа, ситуация несколько сложнее, так как в аналоге уравнения (104) скалярные (спин 0) волновые функции $e^{\pm ikx}$ нужно заменить на 2-компонентные спиноры.

Символически, первая (верхняя) компонента квантованного поля χ будет иметь следующую форму:

$$\chi_1 \sim \text{модовый оператор} \times \text{первая компонента спинора } \chi\text{-типа}. \tag{106}$$

Аналогично для χ_1^+

$$\chi_1^+ \sim (\text{модовый оператор})^+ \times (\text{первая компонента спинора свободной частицы})^*. \tag{107}$$

Имея это в виду, найдем эрмитово сопряжение от (99а), т. е. $\delta_\xi\phi^+$. Для этого перепишем (99а) по компонентам

$$\delta_\xi\phi = (\xi_1\xi_2)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = -\xi_1\chi_2 + \xi_2\chi_1. \tag{108}$$

Мы хотели бы провести операцию эрмитового сопряжения («крестования») соотношения (108), но как провести эту операцию над произведением антикоммутирующих компонент, подобных $\xi_1\chi_2$? В случае двух матриц известно, что $(AB)^+ = B^+A^+$. Аналогично, определим операцию «крестования», обращая порядок спиноров

$$\delta_\xi\phi^+ = -\chi_2^+\xi_1^* + \chi_1^+\xi_2^*. \tag{109}$$

Так как ξ — не квантовое поле, то с операцией «*» все в порядке. Выражение (109) можно записать и в более компактной форме

$$\delta_\xi\phi^+ = \chi_1^+\xi_2^* - \chi_2^+\xi_1^* = (\chi_1^+\chi_2^+)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^*\\ \xi_2^*\end{pmatrix} = \chi^+(i\sigma_2)\xi^*, \tag{110}$$

где символ «+» в последнем равенстве применен к двухкомпонентному спинору, понимаемому в матричном смысле

$$\chi^+ = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}^+ = (\chi_1^+ \chi_2^+). \tag{111}$$

В том же подходе получаем «крестованный» аналог выражения (103):

$$\delta_\xi \chi^+ = A\partial_\mu \phi^+ \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu, \tag{112}$$

где для удобства последующего использования $\partial_\mu \phi^+$ перемещен в начало выражения. Теперь все готово для выбора величины A, обеспечивающей инвариантность L при преобразованиях (99), (103), (110) и (112). Имеем

$$\begin{aligned} \delta_\xi L = \partial_\mu(\delta_\xi \phi^+)\partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu (\delta_\xi \phi) + (\delta_\xi \chi^+) i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi) = \\ = \partial_\mu(\chi^+ i\sigma_2 \xi^*)\partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu (\xi^T(-i\sigma_2)\chi) + \\ + A(\partial_\mu \phi^+ \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu) i\overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi + A\chi^+ i\overline{\sigma}^\nu \partial_\nu (i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^*)\partial_\mu \phi. \end{aligned} \tag{113}$$

В выражении (113) содержится два типа членов: с параметром ξ^* и с параметром ξ^T. Рассмотрим член, включающий $A\xi^*$. Он появляется в комбинации с

$$\overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \partial^\mu \partial_\mu = (\partial_0 + \vec{\sigma}\vec{\nabla})(\partial_0 - \vec{\sigma}\vec{\nabla}) = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \partial^\mu \partial_\mu. \tag{114}$$

Поэтому можно объединить этот и другой член в (113):

$$\delta_\xi L|_{\xi^*} = \partial_\mu \chi^+ i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi - iA\chi^+ \partial_\mu \partial^\mu \sigma_2 \xi^* \phi. \tag{115}$$

Это выражение определяет изменение L при SUSY преобразованиях. Кажется, мы не обнаружили инвариантности (или симметрии), так как нет оснований надеяться, что это изменение сокращается с членом, содержащим ξ^T. Напомним, однако, что действие — это интеграл по пространству–времени от L. Действие будет инвариантным, если изменение в L можно представить в виде полной производной. Так как ξ не зависит от x, (115) можно переписать в виде полной производной

$$\delta_\xi L|_{\xi^*} = \partial_\mu(\chi^+ i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi), \tag{116}$$

если $A = -1$.

Аналогично, если $A = -1$, то член, содержащий ξ^T имеет вид

$$\delta_\xi L|_{\xi^T} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu (\xi^T(-i\sigma_2)\chi) + \partial_\mu \phi^+ \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi. \tag{117}$$

Второе слагаемое в (117) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\phi^+ \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi) + \phi^+ \xi^T(-i\sigma_2)\sigma^\mu \sigma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \chi = \\ = \partial_\mu(\phi^+ \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi) + \phi^+ \xi^T(-i\sigma_2)\partial_\mu \partial^\mu \chi. \end{aligned} \tag{118}$$

Второе слагаемое в (118) и первое слагаемое в (117) объединяются в полную производную

$$\partial_\mu(\phi^+ \xi^T(-i\sigma_2)\partial^\mu \chi), \tag{119}$$

поэтому окончательно имеем

$$\delta_\xi L|_{\xi^T} = \partial_\mu(\phi^+ \xi^T(-i\sigma_2)\partial^\mu \chi) + \partial_\mu(\phi^+ \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi), \tag{120}$$

и это полная производная.

Итак, мы показали, что преобразования (91), (103), (110) и (112) с $A = -1$ изменяют L на полную производную

$$\delta_\xi L = \partial_\mu(\chi^+ i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \phi^+ \xi^T(-i\sigma_2)\partial^\mu \chi + \phi^+ \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi), \tag{121}$$

т. е. действие остается инвариантным. Как мы увидим ниже, пара (ϕ, спин 0) и (χ, L-типа спин 1/2) составляют киральный супермультиплет SUSY.

1.5. Минимальная суперсимметричная стандартная модель (MSSM) (I)

Обсудим, какое отношение может иметь идея SUSY к физике частиц. Что мы имели до сих пор — одно комплексное скалярное поле и одно фермионное поле L-типа, которые между собой не взаимодействуют. Важно отметить, что SUSY преобразования не действуют на $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ или $U(1)_{em}$ степени свободы. Рассмотрим, например, электронное поле e_L. Электрон e_L входит в $SU(2)_L$-дублет, его партнер ν_{eL}:

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \tag{122}$$

Этот дублет требует в SUSY партнеров, бозонов со спином 0, образующих другой $SU(2)_L$-дублет. В стандартной модели это хиггсовский дублет

$$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \tag{123}$$

или его зарядово-сопряженный дублет

$$\begin{pmatrix} \overline{\phi}^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}. \tag{124}$$

Но эти хиггсовские дублеты не несут лептонного числа (которое будем предполагать сохраняющимся). Мы не можем допустить, чтобы некоторые частиц SUSY мультиплета несли сохраняющееся квантовое число, а другие — нет. Поэтому нужны новые частицы — партнеры к дублету (122):

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad \text{партнер} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{eL} \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}, \tag{125}$$

где $\tilde{\nu}$ — скалярные партнер нейтрино (снейтрино) и $\tilde{e}$ — скалярный партнер электрона (сэлектрон). Аналогично, должны быть смюон, стау-лептон и их снейтрино. Все они находятся в киральных супермультиплетах и $SU(2)_L$-дублетах.

Как насчет кварков? Они образуют триплет $SU(3)_C$ цветовой калибровочной группы, в SM нет других цветовых триплетов. Поэтому нужны новые скалярные партнеры кварков (скварки), являющиеся цветовыми триплетами и входящие в киральный супермультиплет. Электрослабые взаимодействия и лептонов и кварков — «киральные», это означает, что L- и R-части полей взаимодействуют по-разному: L-части относятся к $SU(2)_L$-дублетам, а R-части — $SU(2)_L$-синглеты. Поэтому нужны скалярные партнеры для L- и R-частей. Например, $(e_R, \tilde{e}_R)$, $(u_R, \tilde{u}_R)$, $(d_R, \tilde{d}_R)$

и т. д., а также

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}, \ \ldots \tag{126}$$

Мы пока ничего не говорили о SUSY поле со спином 1. Далее мы увидим, что это поле принадлежит к векторному (или калибровочному) супермультиплету, ассоциированному с безмассовым векторным полем (с двумя степенями свободы), которое называется калибрино. У калибрино квантовые числа относительно калибровочной группы такие же, как для калибровочных бозонов, т. е. для получения суперсимметричной КХД нужно ввести октет глюино, плюс $SU(2)_L$-триплет (вино и зино), а также фотино. После нарушения $SU(2)_L$-симметрии (a la Higgs), получаем три фермионных партнера для $W^{\pm}$, Z^0: соответственно $\tilde{W}^{\pm}$, $\tilde{Z}^0$ и фотино $\tilde{\gamma}$.

Наконец, хиггсовский сектор. Мы не можем найти хиггсовском дублету известного фермионного партнера, т. е. нужно ввести хиггсино — фермионный аналог, входящий в киральный супермультиплет. Важный момент в построении суперсимметричной SM — нужно вводить два отдельных хиггсовских дублета.

$$H_u\colon \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}. \tag{127}$$

$$H_d\colon \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_{\overline{d}}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_{\overline{d}}^0 \end{pmatrix}. \tag{128}$$

Киральный и калибровочный супермультиплеты, введенные выше, характеризуют минимальное расширение SM. Полная теория, включающая суперсимметричные взаимодействия, называется минимальной суперсимметричной стандартной моделью (MSSM).

Подчеркнем, что до сих пор ни один из суперпартнеров не найден, т. е. суперпартнеры не имеют той же массы, что их партнеры SM. Таким образом, SUSY MSSM нарушена.

1.6. Суперсимметричная алгебра

Фундаментальный аспект любой симметрии (за исключением $U(1)$) — алгебра, ассоциированная с генераторами симметрии. Так, для группы $SU(2)$ генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k, \tag{129}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование; ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор: $\varepsilon_{123} = +1$, $\varepsilon_{213} = -1$ и т. д. Коммутационные соотношения (129) образуют алгебру $SU(2)$, причем эта алгебра точно такая же, как и для операторов углового момента. Поскольку алгебра определяет в целом группу симметрии (для групп Ли), то нужно знать алгебру SUSY. Выше уже обсуждались генераторы Q_a SUSY преобразований, и их алгебра «грубо» определена соотношением (33). Задача этого раздела — найти действительную SUSY алгебру.

1.6.1. Один из путей получения $SU(2)$-алгебры. Выше были получены «рецепты» SUSY преобразований полей ϕ и ϕ^+ со спином 0 и полей χ и χ^+ со спином 1/2. Из этих преобразований можно извлечь алгебру SUSY генераторов. Для того чтобы понять метод, рассмотрим случай $SU(2)$.

Выберем дублет полей

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \tag{130}$$

где u и d имеют равные массы и одинаковые взаимодействия. При этом лагранжиан инвариантен относительно инфинитезимальных преобразований

$$q \to q' = \left(1 - i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\tau}}{2}\right)q \equiv q + \delta_{\vec{\varepsilon}} q, \tag{131}$$

где $\delta_{\vec{\varepsilon}} q = -i(\vec{\varepsilon}\vec{\tau}/2)q$. Здесь, как обычно, три матрицы $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — матрицы Паули и $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ — три вещественных инфинитезимальных параметра, определяющих преобразование. Преобразованное поле q' удовлетворяет тем же антикоммутационным соотношениям, что и поле q, т. е. q и q'связаны унитарным преобразованием

$$q' = UqU^{+}. \tag{132}$$

Для инфинитезимальных преобразований

$$U_{\text{inf}} = (1 + i\vec{\varepsilon}\vec{T}), \tag{133}$$

где $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ — генераторы инфинитезимальных $SU(2)$-преобразований. Унитарность U подразумевает эрмитовость T. Для инфинитезимальных преобразований из (132) и (133) имеем

$$q' = (1 + i\vec{\varepsilon}\vec{T})q(1 - i\vec{\varepsilon}\vec{T}) = q + i\vec{\varepsilon}\vec{T}q - i\vec{\varepsilon}q\vec{T} = q + i\vec{\varepsilon}[\vec{T}, q]. \tag{134}$$

Тогда из (131) получаем

$$\delta_{\vec{\varepsilon}} q = i\vec{\varepsilon}[\vec{T}, q] = -i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\tau}}{2}q. \tag{135}$$

Очевидно, что $\vec{T}$ — сами по себе квантовые полевые операторы, построенные из полей лагранжиана. Например,

$$\vec{T} = \int q^{+}\frac{\vec{\tau}}{2}q d^3x. \tag{136}$$

Зная, что q антикоммутируют, можно найти коммутационные соотношения для T. Ответ известен — это выражение (129). Есть, однако, и другой способ получения этих коммутационных соотношений, используя малые изменения полей (135). Действительно, выберем два таких преобразования

$$\delta_{\varepsilon_1} q = i\varepsilon_1[T_1, q] = -i\frac{\varepsilon_1\tau_1}{2}q \tag{137}$$

и

$$\delta_{\varepsilon_2} q = i\varepsilon_2[T_2, q] = -i\frac{\varepsilon_2\tau_2}{2}q. \tag{138}$$

Вычислим разность $(\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2} - \delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1})q$ двумя способами: первый — с помощью вторых равенств в (137) и (138), второй — с помощью первых равенств.

Итак, найдем

$$\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2} q = \delta_{\varepsilon_1}\left\{-i\frac{\varepsilon_2\tau_2}{2}\right\}q = -i\frac{\varepsilon_2\tau_2}{2}\delta_{\varepsilon_1} q = -i\frac{\varepsilon_2\tau_2}{2} - i\frac{\varepsilon_1\tau_1}{2}q = -\left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2\tau_2\tau_1 q. \tag{139}$$

Аналогично

$$\delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1}q = \delta_{\varepsilon_2}\Big\{-i\frac{\varepsilon_1\tau_1}{2}\Big\}q = -i\frac{\varepsilon_1\tau_1}{2}\delta_{\varepsilon_2}q = -\Big(\frac{1}{4}\Big)\varepsilon_1\varepsilon_2\tau_1\tau_2 q. \tag{140}$$

Следовательно,

$$(\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2} - \delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1})q = \varepsilon_1\varepsilon_2\Big[\frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}\Big]q = \varepsilon_1\varepsilon_2 i\frac{\tau_3}{2}q = -i\varepsilon_1\varepsilon_2[T_3, q]. \tag{141}$$

Теперь вычислим $(\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2} - \delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1})q$ вторым способом:

$$\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}q = \delta_{\varepsilon_1}\big\{i\varepsilon_2[T_2, q]\big\} = i\varepsilon_2\delta_{\varepsilon_1}\big\{[T_2, q]\big\} = i\varepsilon_1\varepsilon_2\big[T_1, [T_2, q]\big]. \tag{142}$$

Аналогично,

$$\delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1}q = i\varepsilon_1 i\varepsilon_2\big[T_2, [T_1, q]\big].$$

Поэтому

$$(\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2} - \delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1})q = -\varepsilon_1\varepsilon_2\big\{\big[T_1, [T_2, q]\big] - \big[T_2, [T_1, q]\big]\big\}. \tag{143}$$

Правую часть (143) можно переписать иначе, воспользовавшись тождеством

$$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] = 0. \tag{144}$$

Сначала запишем

$$\big[T_2, [T_1, q]\big] = -\big[T_2, [q, T_1]\big], \tag{145}$$

а затем двойной коммутатор в (143):

$$\big[T_1, [T_2, q]\big] - \big[T_2, [T_1, q]\big] = \big[T_1, [T_2, q]\big] + \big[T_2, [q, T_1]\big] = -\big[q, [T_1, T_2]\big]. \tag{146}$$

Окончательно выражение (143) переписывается в виде

$$(\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2} - \delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1})q = -\varepsilon_1\varepsilon_2\big[[T_1, T_2], q\big]. \tag{147}$$

Сравнивая (147) с (141), получаем

$$[T_1, T_2] = iT_3, \tag{148}$$

что соответствует (129).

1.6.2. Суперсимметричные генераторы (заряды) и их алгебра. Чтобы применить рассмотренный выше метод, надо иметь SUSY аналог соотношения (135). Соотношения (99a) и (103) (с $A = -1$) можно рассматривать как аналог второго равенства в (135) для $\delta_\xi\phi$ и $\delta_\xi\chi$, но где взять первое равенство? Хотелось бы записать

$$\delta_\xi\phi \sim i[\xi Q, \phi] = \xi^T(-i\sigma_2)\chi, \tag{149}$$

где Q — SUSY генератор. В первом (приближенном) равенстве (149) следует заметить, что ξ — это χ-типа спинорная величина, поэтому ясно, что Q тоже должна быть спинорной величиной. Иначе одна часть равенства будет бозонной величиной, а другая — фермионной. В самом деле, так как ϕ — лоренцевский скаляр, нужно объединить ξ и Q в лоренцевский инвариант. Пусть Q преобразуется как спинор χ-типа, тогда мы знаем, что $\xi^T(-i\sigma_2)Q$ — лоренцевский инвариант.

Поэтому можно записать

$$\delta_\xi\phi = i\big[\xi^T(-i\sigma_2)Q, \phi\big] = \xi^T(-i\sigma_2)\chi. \tag{150}$$

Мы собираемся вычислить $(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\phi$, поэтому (так как $\delta\phi \sim \chi$) необходимо соотношение (103). Оно содержит ξ^*, поэтому для получения полного аналога «$i\vec{\varepsilon}\vec{T}$» нужно расширить «$i\xi Q$» до

$$i\big(\xi^T(-i\sigma_2)Q + \xi^+(i\sigma_2)Q^*\big) = i(\xi Q + \overline{\xi Q}). \tag{151}$$

С помощью (99а) и (103) найдем

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\phi = \delta_\eta(\xi^T(-i\sigma_2\chi)) - (\eta \leftrightarrow \xi) = \xi^T(-i\sigma_2)i\sigma^\mu(-i\sigma_2)\eta^*\partial_\mu\phi - (\eta \leftrightarrow \xi) =$$
$$= (\xi^T C\sigma^\mu C\eta^* - \eta^T C\sigma^\mu C\xi^*)i\partial_\mu\phi, \tag{152}$$

где введено обозначение

$$C = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{153}$$

Выражение (152) переписывается более компактно, если ввести обозначение

$$C\sigma^\mu C = -\overline{\sigma}^{\mu T}. \tag{154}$$

Заметим, что $\xi^T\overline{\sigma}^{\mu T}\eta^*$ равна своему транспонированному значению, правда, за исключением знака минус, возникающего при изменении порядка антикоммутирующих переменных.

Следовательно,

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\phi = (\eta^+\overline{\sigma}^\mu\xi - \xi^+\overline{\sigma}^\mu\eta)i\partial_\mu\phi. \tag{155}$$

С другой стороны,

$$\delta_\xi\phi = i[\xi Q + \overline{\xi Q}, \phi], \tag{156}$$

поэтому

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\phi = -\big\{\big[\eta Q + \overline{\eta Q}, [\xi Q + \overline{\xi Q}, \phi]\big] - \big[\xi Q + \overline{\xi Q}, [\eta Q + \overline{\eta Q}, \phi]\big]\big\}. \tag{157}$$

Как и в (146), правую часть можно записать в виде

$$\big[[\eta Q + \overline{\eta Q}, \xi Q + \overline{\xi Q}], \phi\big] = (\eta^T C\sigma^\mu C\xi^* - \xi^T C\sigma^\mu C\eta^*)i\partial_\mu\phi =$$
$$= -(\eta^T C\sigma^\mu C\xi^* - \xi^T C\sigma^\mu C\eta^*)[P_\mu, \phi], \tag{158}$$

где на последнем шаге введен оператор 4-импульса P_μ, генерирующий трансляции

$$[P_\mu, \phi] = -i\partial_\mu\phi. \tag{159}$$

Таким образом, из (158) имеем

$$[\eta Q + \overline{\eta Q}, \xi Q + \overline{\xi Q}] = -(\eta^T C\sigma^\mu C\xi^* - \xi^T C\sigma^\mu C\eta^*)P_\mu. \tag{160}$$

Мы рассмотрели, как $\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta$ действует на ϕ. Справедливо ли равенство

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\chi = (\xi^T C\sigma^\mu C\eta^* - \eta^T C\sigma^\mu C\xi^*)i\partial_\mu\chi? \tag{161}$$

К сожалению, ответ отрицательный. Эта проблема будет разрешена ниже, пока что будем основываться на (160). Чтобы получить антикоммутационные соотношения для Q из (160), нужно избавиться от параметров η и ξ в обеих частях. Сначала заметим: так как правая часть (160) не содержит членов типа $\eta\ldots\xi$ или $\eta^*\ldots\xi^*$, то можно записать

$$[\eta Q, \xi Q] = [\overline{\eta Q}, \overline{\xi Q}] = 0. \tag{162}$$

Первый коммутатор

$$0 = (\eta^1 Q_1 + \eta^2 Q_2)(\xi^1 Q_1 + \xi^2 Q_2) - (\xi^1 Q_1 + \xi^2 Q_2)(\eta^1 Q_1 + \eta^2 Q_2) = \\ = -\eta^1\xi^1(2Q_2Q_1) - \eta^1\xi^2(Q_1Q_2 + Q_2Q_1) - \eta^2\xi^1(Q_2Q_1 + Q_1Q_2) - \eta^2\xi^2(2Q_2Q_2). \quad (163)$$

«напоминает», что все величины антикоммутируют. Вследствие того, что все эти комбинации параметров независимые, можно заключить

$$\{Q_a, Q_b\} = 0 \quad (164)$$

и аналогично

$$\{Q_a^*, Q_b^*\} = 0.$$

Теперь займемся членом $[\eta Q, \overline{\xi Q}]$ в (160). Запишем

$$\overline{\xi Q} = \xi^+ i\sigma_2 Q^* = \xi_1^* Q_2^* - \xi_2^* Q_1^* \quad (165)$$

и

$$\eta Q = -\eta_1 Q_2 + \eta_2 Q_1. \quad (166)$$

Поэтому

$$[\eta Q, \overline{\xi Q}] = \eta_1\xi_1^*(Q_2Q_2^* + Q_2^*Q_2) - \eta_1\xi_2^*(Q_2Q_1^* + Q_1^*Q_2) = \\ = -\eta_2\xi_1^*(Q_1Q_2^* + Q_2^*Q_1) + \eta_2\xi_2^*(Q_1Q_1^* + Q_1^*Q_1). \quad (167)$$

Между тем, правая часть (160):

$$-(\eta_1\eta_2)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^*\\ \xi_2^*\end{pmatrix}P_\mu = -(\eta_2 - \eta_1)\sigma^\mu\begin{pmatrix}-\xi_2^*\\ \xi_1^*\end{pmatrix}P_\mu = \\ = \left[\eta_2\xi_2^*(\sigma^\mu)_{11} - \eta_2\xi_1^*(\sigma^\mu)_{12} - \eta_1\xi_2^*(\sigma^\mu)_{21} + \eta_1\xi_1^*(\sigma^\mu)_{22}\right]P_\mu, \quad (168)$$

где индексы из матриц σ^μ обозначают, как обычно, элементы матриц.

Сравнивая (168) и (167), получаем

$$\{Q_a, Q_b^*\} = (\sigma^\mu)_{ab}P_\mu. \quad (169)$$

Мы везде записывали Q^* подобно ξ^* и η^*, но Q — квантовые полевые операторы, поэтому последнее соотношение следует записать более точно:

$$\{Q_a, Q_b^+\} = (\sigma^\mu)_{ab}P_\mu. \quad (170)$$

Коммутатор (167) приводит к антикоммутатору в (170). Уравнение (170) представляет собой правильную версию соотношения (33). Соотношение (170) и есть искомая алгебра SUSY, оно показывает, что операторы SUSY напрямую связаны с оператором энергии–импульса, являющегося генератором пространственно-временных смещений. Это дает основание рассматривать SUSY как расширение пространственно-временной симметрии.

1.6.3. Суперсимметричные токи. В случае обычных симметрий, инвариантность лагранжиана относительно преобразований полей (характеризующихся определенными параметрами) подразумевает существование 4-вектора j^μ («тока симметрии»), который сохраняется: $\partial_\mu j^\mu = 0$. Генератор симметрии — «заряд», связанный с этим током, определяется как пространственный интеграл от j^0. Выражение для j^μ легко находится. Пусть лагранжиан L инвариантен относительно преобразования

$$\phi_r \to \phi_r + \delta\phi_r, \quad (171)$$

где под ϕ_r понимается любое поле в L, имеющее несколько компонент, обозначенных индексом r. Тогда

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \phi_r)}\partial^\mu(\delta\phi_r) + \text{эрмит. сопр.} \tag{172}$$

Но уравнение движения для ϕ_r

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_r} = \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\right). \tag{173}$$

Из (172) и (173) получаем

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{174}$$

где

$$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\delta\phi_r + \text{э.с.} \tag{175}$$

Например, для лагранжиана

$$L = \overline{q}(i\not\partial - m)q, \tag{176}$$

где

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \tag{177}$$

Лагранжиан (176) с определением (177) инвариантен относительно преобразований группы $SU(2)$, имеющей три генератора (заряда), три тока и три инфинитезимальных параметра. Рассмотрим, например, преобразование, включающее только ε_1, тогда

$$\delta q = -i\frac{\varepsilon_1\tau_1}{2}q. \tag{178}$$

Из (176) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu q)} = \overline{q}i\gamma^\mu, \tag{179}$$

поэтому из (175) и (178) получаем соответствующий ток

$$\varepsilon_1\overline{q}\gamma^\mu\left(\frac{\tau_1}{2}\right)q. \tag{180}$$

Очевидно, что постоянный фактор ε_1 несущественен, и его можно опустить. Повторяя процедуру для преобразований, ассоциированных с ε_2 и ε_3, получаем изоспиновые токи

$$\vec{j}^\mu = \overline{q}\gamma^\mu\frac{\vec{\tau}}{2}q \tag{181}$$

и заряды

$$\vec{T} = \int q^+\frac{\vec{\tau}}{2}q d^3\vec{x}. \tag{182}$$

Этот же подход применим к нахождению суперсимметричного тока. Однако есть существенная разница между SUSY и $SU(2)$-моделью. В $SU(2)$-модели лагранжиан инвариантен относительно преобразований (131), в случае же SUSY мы смогли убедиться лишь в том, что действие инвариантно, лагранжиан же изменяется на полную производную. Поэтому левую часть (172) (ноль) следует заменить на $\partial_\mu K^\mu$, где K^μ — выражение в скобках (121).

Далее, поскольку SUSY заряды Q_a являются спинорами, то ассоциированные токи несут и спинорный индекс, т. е. их следует записать следующим образом: J_a^μ, где a — спинорный индекс. Эти токи связаны с преобразованиями, характеризующимися спинорными параметрами ξ. Аналогично, эрмитово-сопряженные токи связаны с параметрами ξ^*.

Собирая все вместе, запишем

$$\begin{aligned}\xi^T(-i\sigma_2)J^\mu + \xi^+ i\sigma_2 J^{\mu+} &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \delta\phi^+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^+)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\chi)}\delta_\chi - K^\mu = \\ &= \partial^\mu\phi^+\xi^T(-i\sigma_2)\chi + \chi^+ i\sigma_2\xi^*\partial^\mu\phi + \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu(-i\sigma^\nu)i\sigma_2\xi^*\partial_\nu\phi = \\ &= -(\chi^+ i\sigma_2\xi^*\partial^\mu\phi + \xi^T i\sigma_2\sigma^\nu\overline{\sigma}_\mu\chi\partial_\nu\phi^+ + \xi^T(-i\sigma_2)\chi\partial^\mu\phi^+) = \\ &= \chi^+\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu i\sigma_2\xi^*\partial_\nu\phi + \xi^T(-i\sigma_2)\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\chi\partial_\nu\phi^+, \end{aligned} \tag{183}$$

где SUSY ток

$$J^\mu = \sigma^\nu\sigma^\mu\chi\partial_\nu\phi^+. \tag{184}$$

Как ожидалось, этот ток имеет две спинорные компоненты, а также непарный фермионный оператор χ.

1.7. Супермультиплет

Обсудим некоторые физические следствия соотношения (170). В SUSY теории генераторы коммутируют с гамильтонианом

$$[Q_a, H] = [Q_a^+, H] = 0. \tag{185}$$

Действуя на состояние с массой M, операторы Q создают другое состояние с той же массой M. Но так как это спинорные операторы, то другое состояние уже не будет иметь тот же спин, что и первоначальное состояние. В самом деле, при вращениях

$$\delta Q = -\Big(i\frac{\vec{\varepsilon}\vec{\sigma}}{2}\Big)Q = i\vec{\varepsilon}[\vec{J}, Q], \tag{186}$$

где J — генераторы вращений (например, операторы углового момента).

Так, для вращения вокруг третьей оси

$$-\frac{1}{2}\sigma_3 Q = [J_3, Q]. \tag{187}$$

Поэтому

$$[J_3, Q_1] = -\frac{1}{2}Q_1, \quad [J_3, Q_2] = \frac{1}{2}Q_2. \tag{188}$$

Отсюда следует, что если состояние $|jm\rangle$ имеет спин j и $J_3 = m$, то

$$(J_3Q_1 - Q_1J_3)|jm\rangle = -\frac{1}{2}Q_1|jm\rangle. \tag{189}$$

Поэтому

$$J_3(Q_1|jm\rangle) = \Big(m - \frac{1}{2}\Big)Q_1|jm\rangle \tag{190}$$

показывает, что состояние $Q_1|jm\rangle$ имеет $J_3 = m - 1/2$, т. е. Q_1 понижает величину m на $1/2$. Аналогично, Q_2 повышает на $1/2$.

Поскольку

$$[J_3, Q_1^+] = \frac{1}{2} Q_1^+, \tag{191}$$

то Q_1^+ повышает m на $1/2$, а оператор Q_2^+ понижает на $1/2$.

Мы хотели бы выяснить природу состояний, связанных друг с другом применением операторов Q_a и Q_a^+. Это аналог $(2j+1)$ мультиплета, известного из теории углового момента. Эти состояния будем обозначать через $|p, \lambda\rangle$, где 4-импульс $p = (E, 00, E)$ (поля безмассовые), а λ — индекс спиральности. Кроме того, выберем $|p, \lambda\rangle$ так, чтобы

$$Q_a^+ |p, \lambda\rangle = 0 \quad \text{для} \quad a = 1, 2. \tag{192}$$

Заметим, что это всегда возможно: если рассмотрение начинается с состояния $|p, \lambda\rangle'$, не обладающего свойством (192), то всегда можно выбрать другое состояние $Q_a^+ |p, \lambda\rangle'$, которое, вследствие $Q_a^+ Q_a = 0$, обладает этим свойством. Тогда будет только два состояния, связанных с $|p, \lambda\rangle$. Это состояния $Q_1 |p, \lambda\rangle$ и $Q_2 |p, \lambda\rangle$. Первое из них неприемлемо, так как его норма равна нулю. Это следует из рассмотрения алгебры SUSY (170) при $a = b = 1$

$$Q_1^+ Q_1 + Q_1 Q_1^+ = (\sigma^\mu)_{11} P_\mu. \tag{193}$$

Единственные компоненты σ^μ, которые отличны от нуля — $(\sigma^0)_{11} = 1$ и $(\sigma^3)_{11} = 1$, поэтому

$$Q_1^+ Q_1 + Q_1 Q_1^+ = P_0 + P_3 = P^0 - P^3. \tag{194}$$

Отсюда получаем

$$\langle p, \lambda | Q_1^+ Q_1 + Q_1 Q_1^+ | p, \lambda\rangle = 0, \tag{195}$$

поскольку собственное значение $P^0 - P^3$ в этом состоянии обращается в ноль.

Кроме того, $Q_1^+ |p, \lambda\rangle = 0$, тогда

$$\langle p, \lambda | Q_1^+ Q_1 | p, \lambda\rangle = 0. \tag{196}$$

Последнее соотношение показывает, что норма $Q_1 |p, \lambda\rangle$ равна нулю.

Остается одно связанное состояние

$$Q_2 |p, \lambda\rangle. \tag{197}$$

Мы знаем, что Q_2 повышает λ на $1/2$, т. е.

$$Q_2 |p, \lambda\rangle \sim |p, \lambda + 1/2\rangle. \tag{198}$$

Ожидается, что применение Q_2^+ ко второму состоянию возвращает нас к первоначальному состоянию:

$$Q_2^+ |p, \lambda + 1/2\rangle \sim Q_2^+ Q_2 |p, \lambda\rangle \sim (2E - Q_2 Q_2^+) |p, \lambda\rangle \sim |p, \lambda\rangle, \tag{199}$$

где использовано соотношение (170) для $a = b = 2$. Итак, имеется два различных состояния, вырожденных по массе и связанных операторами Q_2 и Q_2^+. Уравнения (198) и (199) удобны в случае $\lambda = -1/2$ (L-тип), аналогично $\lambda = +1/2$ соответствует R-типу.

В терминах состояний частиц супермультиплет содержит два типа частиц, отличающихся на $1/2$ по спиральности. Рассмотренная в разд. 1.4 SUSY — пример левого кирального супермультиплета, содержащего комплексное скалярное поле и один

2-компонентный фермион L-типа. Далее нужно «включить» взаимодействия, а также рассмотреть векторный (или калибровочный) супермультиплет, содержащий калибровочное поле и 2-компонентный спинор. Наконец, существует гравитационный супермультиплет, включающий гравитационное поле со спином 2 и гравитино со спином 3/2.

1.8. Проблемы и необходимость усложнения

В разд. 1.6 мы получили SUSY алгебру, вычисляя разность $\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta$ двумя различными способами. Мы оценили, как эта разность действует на поле ϕ, но при выводе операторного соотношения (160) согласованный результат получается при действии $\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta$ на поле χ. Остановимся на этом моменте подробнее.

Рассмотрим сначала

$$\delta_\eta\delta_\xi\chi_a = \delta_\eta\big(-i\sigma^\mu(i\sigma_2\xi^*)\big)_a\partial_\mu\phi = \big(i\sigma^\mu(-i\sigma_2\xi^*)\big)_a\partial_\mu\delta_\eta\phi = \\ = \big(i\sigma^\mu(-i\sigma_2\xi^*)\big)_a\big(\eta^T(-i\sigma_2)\partial_\mu\chi\big). \tag{200}$$

Существует важное тождество, включающее произведение трех спиноров (λ, τ, ρ):

$$\lambda_a\big(\tau^T(-i\sigma_2)\rho\big) + \tau_a\big(\rho^T(-i\sigma_2)\lambda\big) + \rho_a(\lambda^T(-i\sigma_2)\tau) = 0. \tag{201}$$

Выберем в (200)

$$\lambda_a = \big(\sigma^\mu(-i\sigma_2)\xi^*\big)_a, \quad \tau_a = \eta_a, \quad \rho_a = \partial_\mu\chi_a, \tag{202}$$

тогда правая часть (200), запишется в виде

$$-i\big\{\eta_a\partial_\mu\chi^T(-i\sigma_2)\sigma^\mu(-i\sigma_2)\xi^* + \partial_\mu\chi_a\big(\sigma^\mu(-i\sigma_2\xi^*)^T(-i\sigma_2)\eta\big)\big\}. \tag{203}$$

Но с помощью (193) первый член в (203) запишется в виде

$$i\eta_a(\partial_\mu\chi^T\overline{\sigma}^{\mu T}\xi^*) = -i\eta_a(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi). \tag{204}$$

Что касается второго слагаемого в (203), найдем транспонированную величину, домножая на $\partial_\mu\chi_a$:

$$-i\partial_\mu\chi_a\big(-\eta^T i\sigma_2\sigma^\mu(-i\sigma_2)\xi^*\big) = -i\eta^T C\sigma^\mu C\xi^*\partial_\mu\chi_a. \tag{205}$$

После очевидных преобразований

$$\delta_\eta\delta_\xi\chi_a = -i\eta_a(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) - i\eta^T C\sigma^\mu C\xi^*\partial_\mu\chi_\alpha, \tag{206}$$

поэтому

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\chi_a = (\xi^T C\sigma^\mu C\eta^* - \eta^T C\sigma^\mu C\xi^*)i\partial_\mu\chi_a + i\xi_a(\eta^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) - i\eta_a(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi). \tag{207}$$

Из последнего соотношения видна проблема: первый член правой части (207) — тот же, что и в (152) с заменой ϕ на χ, но есть два дополнительных нежелательных слагаемых. Они обращаются в ноль, если удовлетворяются уравнения движения $\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi = 0$ (для безмассовых полей) на массовой поверхности. Но это не слишком хорошо, поскольку мы хотели бы иметь симметрию, применимую к внутренним линиям (вне массовой поверхности) диаграмм Фейнмана. Однако не нужно удивляться тому, что «наивная» SUSY разд. 1.6 не «работает» вне массовой поверхности: число степеней свободы ϕ и χ не проявляется в полной мере, так как ϕ имеет две (одно

комплексное поле), а χ — четыре степени свободы (две комплексных компоненты). Нужно ввести еще две степени свободы в дополнение к двум у ϕ, скажем, с помощью второго скалярного поля F.

Самый «дешевый» способ — добавить слагаемое F^+F в лагранжиан (97):

$$L_F = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi + \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + F^+ F. \tag{208}$$

Теперь нужно придумать такое SUSY преобразование для аксиального поля F, полей ϕ и χ, чтобы L_F был инвариантным (по крайней мере, с точностью до полной производной) и чтобы нежелательные члены $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta)\chi$ были исключены.

Поле F имеет размерность M^2, поэтому $\delta_\xi F$ должна быть

$$\delta_\xi F \sim \xi \partial_\mu \chi. \tag{209}$$

Правая часть (209), как и левая, Лоренц-инвариантна. Мы знаем, что $\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$ преобразуется как спинор ψ-типа, а объект типа $\xi^+\psi$ — Лоренц-инвариант. Поэтому попытаемся записать

$$\delta_\xi F = -i\xi^+ \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \tag{210}$$

и соответственно

$$\delta_\xi F^+ = i\partial_\mu \chi^+ \overline{\sigma}^\mu \xi. \tag{211}$$

Раз эти изменения обращаются в ноль при условии, что χ удовлетворяет уравнению движения, то они способны сократить нежелательные члены.

Мы должны убедиться, что расширенный лагранжиан (208) или, по крайней мере, соответствующее действие, остается SUSY инвариантным. При этих изменениях слагаемое F^+F в (208) изменяется следующим образом

$$(\delta_\xi F^+)F + F^+(\delta_\xi F) = (i\partial_\mu \chi^+ \overline{\sigma}^\mu \xi)F - F^+(i\xi^+ \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi). \tag{212}$$

Эти слагаемые имеют структуру, очень похожую на член с χ в (208), который преобразуется следующим образом

$$\delta_\xi(\chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) = (\delta_\xi \chi^+) i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi). \tag{213}$$

Очевидно, если выбрать

$$\delta_\xi \chi_a^+ = \text{предыдущее изменение} + F^+ \xi_a^+, \tag{214}$$

то F^+ часть первого слагаемого в (213) сокращает второй член в (212). Что касается второго слагаемого в (213), то перепишем его так:

$$\chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \delta_\xi \chi = \partial_\mu(\chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \delta_\xi \chi) - \partial_\mu \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \delta_\xi \chi = \partial_\mu(\chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \xi F) - \partial_\mu \chi^+ i\overline{\sigma}^\mu \xi F, \tag{215}$$

где использована «крестовая» версия (214):

$$\delta_\xi \chi_a = \text{предыдущее изменение} + \xi_a F. \tag{216}$$

Первое слагаемое в (215) — полная производная, обеспечивающая инвариантность действия, а второе слагаемое сокращает первый член в (212). Это достигается путем смешивания полей χ и F при SUSY преобразованиях.

Теперь вычислим снова $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta)\chi$, включая новые члены, содержащие аксиальное поле F. Это преобразование оставляет ϕ неизменным, $\delta_\eta \delta_\xi \chi$ будет таким же, как и раньше (206), но появится дополнительный член

$$\delta_\eta(\xi_a F) = -i\xi_a(\eta^+ \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi). \tag{217}$$

Итак, $(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\chi$ будет таким же, как и в (207), но с дополнительными слагаемыми

$$i\eta_a(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) - i\xi_a(\eta^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi). \tag{218}$$

Эти дополнительные члены точно сокращают нежелательные члены в (207), что и требовалось. Аналогичный результат получается и для действия $(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)$ на ϕ и на F, т. е. и в расширенной структуре, включающей F, справедливо операторное соотношение (160).

1.9. Модель Весса–Зумино

Лагранжиан (208) описывает свободный (левый) киральный супермультиплет с безмассовым полем ϕ спина 0, безмассовым спинором χ L-типа и нераспространяющимся полем F. Как мы видели в разд. 1.5, кварки, лептоны и хиггсовские бозоны нужно ввести в киральные супермультиплеты совместно с соответствующими S-партнерами. Поэтому нужно обобщить (208)

$$L_{\text{free}\,WZ} = \partial_\mu\phi_i^+\partial^\mu\phi_i + \chi_i^+ i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_i + F_i^+F_i, \tag{219}$$

где индекс суммирования i пробегает по всем внутренним степеням свободы (например, ароматам) и его не нужно путать (в случае χ_i) с индексом спинорной компоненты. Соответствующее действие инвариантно относительно SUSY преобразований

$$\delta_\xi\phi_i = \xi\chi_i, \quad \delta_\xi\chi_i = -i\sigma^\mu i\sigma_2\xi^*\partial_\mu\phi_i + \xi F_i, \quad \delta_\xi F_i = -i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_i, \tag{220}$$

а также их эрмитово-сопряженных аналогов.

Очевидно, что следующий шаг — ввести взаимодействие таким образом, чтобы оно сохраняло SUSY, т. е. инвариантность лагранжиана (или действия) при преобразованиях (220).

Мы должны подразумевать, что взаимодействия перенормируемые. Это означает, что, в смысле размерности массы, все члены, описывающие взаимодействия, не должны иметь степень, превышающую 4. Или, эквивалентно, константы связи в членах со взаимодействием должны быть безразмерными.

Наиболее общий набор перенормируемых взаимодействий полей ϕ, χ и F имеет вид

$$L_{\text{int}} = W_i(\phi, \phi^+)F_i - \frac{1}{2}W_{ij}(\phi, \phi^+)\chi_i\chi_j + \text{эрмитово-сопряженные}, \tag{221}$$

где суммируется по iи по j. Здесь W_i и W_{ij} — пока произвольные функции бозонных полей. Мы увидим, что они связаны между собой и имеют простую форму.

Заметим, что F_i имеет размерность 2. W_i не может зависеть ни от χ_i, которое имеет размерность 3/2, ни от какой степени F_i, кроме первой, которая уже включена в (219). W_i не может включать другие степени ϕ_i и ϕ_i^+, кроме второй. Аналогично, поскольку $\chi_i\chi_j$ имеет размерность 3, W_{ij} может зависеть только от ϕ_i и ϕ_i^+. Кроме того, вследствие $\chi_i\chi_j = \chi_j\chi_i$, W_{ij} симметричен по индексам i и j.

Известно, что действие для «свободной» части (219) инвариантно относительно (220), поэтому нужно рассматривать изменение $\delta_\xi L_{\text{int}}$ при преобразованиях (220).

Сначала рассмотрим часть, включающую четыре спинора:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k}(\xi\chi_k)(\chi_i\chi_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial W_{ij}}{\partial\phi_k^+}(\overline{\xi}\overline{\chi}_k)(\chi_i\chi_j) + \text{эрмитово-сопряженное}. \tag{222}$$

Ни один из этих членов не сокращается при вариации любого другого члена. Однако первый член будет обращаться в ноль, если $\partial W_{ij}/\partial\phi_k$ симметричен по i, j, k. Причина — тождество (201) (с заменой $\lambda\to\chi_k$, $\tau\to\chi_i$, $\rho\to\chi_j$)

$$(\xi\chi_k)(\chi_i\chi_j)+(\xi\chi_i)(\chi_j\chi_k)+(\xi\chi_j)(\chi_k\chi_i)=0. \tag{223}$$

Отсюда следует, что если $\partial W_{ij}/\partial\phi_k$ симметрична по i, j, k, то первый член в (222) тождественно равен нулю. Однако нет соответствующего тождества для произведения 4-х спиноров во втором члене (222). Единственный способ избавиться от этого члена и сохранить SUSY для таких взаимодействий — допустить, что W_{ij} не зависит от ϕ_k^T, а зависит только от ϕ_k. Это важно для MSSM: в стандартной модели имеется как хиггсовское поле ϕ, так и его зарядово-сопряженное, связанное с ϕ^+. В MSSM нужно рассматривать два поля ϕ.

Итак, мы ожидаем, что W_{ij} должен иметь следующий вид

$$W_{ij}=M_{ij}+y_{ijk}\phi_k, \tag{224}$$

где матрица M_{ij} (имеющая размерность массы) симметрична по i, j; а юкавские константы симметричны по i, j, k.

Удобно записать (224) в виде

$$W_{ij}=\frac{\partial^2 W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}, \tag{225}$$

эта форма автоматически симметрична по i, j и где

$$W=\frac{1}{2}M_{ij}\phi_i\phi_j+\frac{1}{6}y_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k. \tag{226}$$

Далее рассмотрим часть $\delta_\xi L_{\rm int}$, которая содержит одну производную ∂_μ. Эта часть (напомним, что $C=-i\sigma_2$)

$$W_i(-i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_i)-\frac{1}{2}W_{ij}\{\chi_i^TCi\sigma^\mu C\xi^*\}\partial_\mu\phi_j+\frac{1}{2}W_{ij}\xi^+Ci\sigma^{T\mu}\partial_\mu\phi_iC\chi_j. \tag{227}$$

Рассмотрим выражение в скобках $\{\chi_i^T\ldots\xi^*\}$. Так как после вычисления матричных произведений это дает число, то оно равно транспонированному значению

$$-\xi^+Ci\sigma^{\mu T}C\chi_i=\xi^+i\overline{\sigma}^\mu\chi_i, \tag{228}$$

где знак минус возникает при перестановке двух фермионных величин и использовано соотношение $C\sigma^{\mu T}C=-\overline{\sigma}^\mu$.

Поэтому второй член в (227):

$$-\frac{1}{2}W_{ij}i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\chi_i\partial_\mu\phi_j, \tag{229}$$

третий

$$\frac{1}{2}W_{ij}\xi^+Ci\sigma^{\mu T}C\chi_j\partial_\mu\phi_i=-\frac{1}{2}W_{ij}i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\chi_j\partial_\mu\phi_i. \tag{230}$$

Совместно два члена дают

$$-W_{ij}i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\chi_i\partial_\mu\phi_j=-i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\chi_i\partial_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right), \tag{231}$$

где использовано соотношение

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right)=\frac{\partial^2 W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\partial_\mu\phi_j=W_{ij}\partial_\mu\phi_j. \tag{232}$$

Собирая все вместе, для вариации $\delta_\xi L_{\text{int}}$ получаем

$$-iW_i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_i - i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\chi_i\partial_\mu\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right). \tag{233}$$

Эта вариация не может сокращаться какими-либо другими слагаемыми, поэтому единственный шанс сохранения SUSY — считать эту вариацию полной производной. Чтобы (231) было полной производной, необходимо

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial\phi_i}. \tag{234}$$

В этом случае (233)

$$\partial_\mu\left\{\frac{\partial W}{\partial\phi_i}(-i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\chi_j)\right\}. \tag{235}$$

Возвращаясь к (226), видим, что условие (234) подразумевает

$$W_i = M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k. \tag{236}$$

Итак, найдены условия на W_i и W_{ij}, при которых взаимодействия (221) приводят к действию, инвариантному относительно SUSY преобразований.

Рассмотрим теперь часть полного лагранжиана (включая (219)), содержащего F_i и F_i^+ и имеющего вид $F_iF_i^+ + W_iF_i + W_i^+F_i^+$. Так как эта часть не содержит градиентов, уравнения Эйлера–Лагранжа для F_i и F_i^+ определяются равенствами

$$\frac{\partial L}{\partial F_i} = 0 \text{или} \quad F_i^+ + W_i = 0. \tag{237}$$

Следовательно, $F_i = -W_i^+$ и, аналогично, $F_i^+ = -W_i$. Эти соотношения не содержат производных, поэтому канонические коммутационные соотношения не меняются, и это дает возможность заменить F_i и F_i^+ в лагранжиане значениями, полученными из уравнений Эйлера–Лагранжа.

Поэтому окончательно лагранжиан Весса–Зумино записывается в виде

$$L_{WZ} = L_{\text{free}\,WZ} - |W_i|^2 - \frac{1}{2}\{W_{ij}\chi_i\chi_j + \text{э.с.}\}, \tag{238}$$

где «э.с.» означает эрмитово сопряжение.

Обсудим подробнее особенности модели Весса–Зумино. Для простоты выберем только один супермультиплет, опуская индексы iи j. Сначала рассмотрим квадратичные по полям ϕ и χ члены, которые соответствуют кинетическим и массовым членам. Это дает возможность изучения массовых членов двухкомпонентных спиноров.

Квадратичные члены для одного супермультиплета

$$L_{WZ,\text{quad.}} = \partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi + \chi^+i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - MM^*\phi^+\phi - \frac{1}{2}M\chi^T(-i\sigma_2)\chi - \frac{1}{2}M^*\chi^+(i\sigma_2)\chi^{+T}. \tag{239}$$

В этом выражении χ^+ задается выражением (111), а

$$\chi^{+T} = \begin{pmatrix}\chi_1^+\\ \chi_2^+\end{pmatrix}, \tag{240}$$

где 1 и 2 относятся к спинорным компонентам. Уравнения Эйлера–Лагранжа для ϕ^+:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^+)}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi^+} = 0, \tag{241}$$

откуда

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + |M|^2 \phi = 0. \tag{242}$$

Это ни что иное, как свободное уравнение Клейна–Гордона для бесспинового поля массы $|M|$.

При рассмотрении уравнений Эйлера–Лагранжа, скажем, для χ^+, нужно быть осторожным при вычислении функциональных производных L по антикоммутирующим полям χ и χ^+. Для члена $-(1/2)M\chi\chi$ в (239) имеем

$$-\frac{1}{2}M(\chi_1\chi_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}M(-\chi_1\chi_2 + \chi_2\chi_1) = -M\chi_2\chi_1 = +M\chi_1\chi_2. \tag{243}$$

Определим

$$\frac{\partial}{\partial \chi_1}(\chi_1\chi_2) = \chi_2, \tag{244}$$

тогда необходимо

$$\frac{\partial}{\partial \chi_2}(\chi_1\chi_2) = -\chi_1. \tag{245}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \chi_1}\left\{-\frac{1}{2}M\chi\chi\right\} = M\chi_2 \tag{246}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \chi_2}\left\{-\frac{1}{2}M\chi\chi\right\} = -M\chi_1. \tag{247}$$

Уравнения (246) и (247) можно объединить

$$\frac{\partial}{\partial \chi_a}\left\{-\frac{1}{2}M\chi\chi\right\} = M(i\sigma_2\chi_a). \tag{248}$$

Теперь можно рассмотреть уравнения Эйлера–Лагранжа для χ^+:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \chi_a^+)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \chi_a^+} = 0. \tag{249}$$

Использование квадратичных частей (239) дает

$$i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = M^* i\sigma_2 \chi^{+T}. \tag{250}$$

Аналогично

$$i\sigma^\mu \partial_\mu (i\sigma_2 \chi^{+T}) = M\chi. \tag{251}$$

Из (250) и (251) следует

$$i\sigma^\mu \partial_\mu (i\overline{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi) = i\sigma^\mu \partial_\mu (M^* i\sigma_2 \chi^{+T}) = |M|^2 \chi. \tag{252}$$

Учитывая (114), левая часть (252)

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + |M|^2 \chi = 0. \tag{253}$$

Это соотношение показывает, что поле χ тоже имеет массу $|M|$. Мы проверили, что квадратичные части (239) описывают свободные поля со спином 0 и спином 1/2, которые вырождены и имеют массы $|M|$. Отметим, что мы начинали с безмассовых

полей, а получили массивную суперсимметричную теорию, в которой бозонные и фермионные суперпартнеры имеют одинаковые массы. Далее обратимся к членам со взаимодействием в (238), снова для случая одного кирального супермультиплета.

Эти члены имеют вид

$$-\left|M\phi + \frac{1}{2}y\phi^2\right|^2 - \frac{1}{2}\{(M + y\phi)\chi\chi + \text{э.с.}\}. \tag{254}$$

В дополнение к квадратичным частям $|M|^2\phi^+\phi$ и $(-1/2)|M|\chi\chi+$э.с., которые только что обсуждались, (254) содержит три типа взаимодействий:

1) кубическое взаимодействие полей ϕ:

$$-\frac{1}{2}(My^*\phi\phi^{+2} + M^*y\phi^2\phi^+); \tag{255}$$

2) четверное взаимодействие полей ϕ:

$$-\frac{1}{4}|y|^2\phi^2\phi^{+2}; \tag{256}$$

3) юкавского типа связи полей ϕ и χ:

$$-\frac{1}{2}\{y\phi\chi\chi + \text{э.с.}\}. \tag{257}$$

Важно отметить, что один и тот же параметр y входит в кубические и четверные бозонные взаимодействия (255) и (256), а также в юкавского типа фермион-бозонные взаимодействия (257). В частности, четверная константа связи в (256) равна квадрату юкавской константы в (257). Именно это соотношение между константами было отражено в (20) как условия сокращения бозонной собственной энергии и вклада фермион-антифермионной петли. А нет ли другого способа, который бы автоматически порождал SUSY-инвариантные взаимодействия? Такая процедура действительно имеется в суперполевом подходе.

1.10. Суперполя

1.10.1. SUSY-преобразования полей. Сначала вспомним несколько полезных вещей, относящихся к пространственно-временным трансляциям.

При трансляции координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}, \tag{258}$$

где a^{μ} — постоянный 4-вектор. В нештрихованной системе координат наблюдатель использует состояния $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, ... И имеет дело с амплитудами $\langle\beta|\phi(x)|\alpha\rangle$, где ϕ — скалярное поле. В штрихованной системе наблюдатель «оценивает» поле ϕ в точке x', используя состояния $|\alpha\rangle' = U|\alpha\rangle, \ldots$, где U — унитарны. На этом пути матричные элементы (следовательно, вероятности переходов) равны матричным элементам в нештрихованной системе:

$$\langle\beta|U^{-1}\phi(x')U|\alpha\rangle = \langle\beta|\phi(x)|\alpha\rangle. \tag{259}$$

Поскольку это справедливо для всех пар состояний, то

$$U^{-1}\phi(x')U = \phi(x) \tag{260}$$

или

$$U\phi(x)U^{-1} = \phi(x') = \phi(x + a). \tag{261}$$

Для инфинитезимальной трансляции $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}$, можно записать

$$U = 1 + i\varepsilon_{\mu}P^{\mu}, \tag{262}$$

где 4 оператора P^{μ} являются генераторами трансляций. В этом случае

$$(1 + i\varepsilon_{\mu}P^{\mu})\phi(x)(1 - i\varepsilon_{\mu}P^{\mu}) = \phi(x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}) = \phi(x^{\mu}) + \varepsilon^{\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}, \tag{263}$$

т. е.

$$\phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + \varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x), \tag{264}$$

где

$$\delta\phi(x) = i\varepsilon_{\mu}[P^{\mu}, \phi(x)] = \varepsilon_{\mu}\partial^{\mu}\phi(x). \tag{265}$$

Таким образом, получаем фундаментальное соотношение

$$i[P^{\mu}, \phi(x)] = \partial^{\mu}\phi(x). \tag{266}$$

В этом выражении P^{μ} построен из полевых операторов. Например, P^0 — гамильтониан, который есть интеграл от плотности гамильтониана.

Однако на выражение (265) можно посмотреть иначе:

$$\delta\phi = \varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi = (1 - i\varepsilon^{\mu}\widehat{P}_{\mu})\phi, \tag{267}$$

где $\widehat{P}^{\mu}$ — дифференциальный оператор, действующий на аргумент ϕ. Ясно, что, как обычно, $\widehat{P}^{\mu} = i\partial^{\mu}$.

Мы хотели бы осуществить подобную процедуру с SUSY преобразованиями. Для этого нужно расширить пространство координат x^{μ}, от которых зависят поля, включив спинорные степени свободы θ и θ^*. Поля, зависящие как от x, так и от спинорных степеней свободы, называются суперполями. Расширенное пространство x^{μ}, θ и θ^* называется суперпространством. Поскольку операторы P^{μ} генерируют сдвиги в пространстве–времени аргумента поля ϕ, нужно попытаться построить из Q и Q^+ аналоги унитарных операторов, которые бы осуществляли сдвиги спинорных аргументов поля. При построении этих операторов следует рассмотреть аналог (267) и привлечь дифференциальное операторное представление SUSY генераторов, скажем $\widehat{Q}$ и $\widehat{Q}^+$.

Основная идея очень проста. Перепишем (261) следующим образом

$$e^{ixP}\phi(0)e^{-ixP} = \phi(x). \tag{268}$$

По аналогии, выберем «U» для SUSY преобразований в форме

$$U(x, \theta, \theta^*) = e^{ixP}e^{i\theta Q}e^{i\overline{\theta Q}}. \tag{269}$$

Здесь Q и Q^* (или Q^{+T}) — спинорные SUSY генераторы, уже введенные в разд. 1.6, а θ и θ^* — спинорные степени свободы, ассоциированные с SUSY трансляциями. Как обычно

$$\theta Q = \theta^T(-i\sigma_2)Q \tag{270}$$

и

$$\overline{\theta Q} = \theta^+(i\sigma_2)Q^{+T}. \tag{271}$$

Когда поле $\phi(0)$ преобразуется посредством $U(x, \theta, \theta^*)\phi(0)U^{-1}(x, \theta, \theta^*)$, мы ожидаем получить ϕ как функцию x, но также как функцию «фермионных координат» θ и θ^*,

т. е. введем суперполе Φ:

$$U(x,\theta,\theta^*)\Phi(0)U^{-1}(x,\theta,\theta^*) = \Phi(x,\theta,\theta^*). \tag{272}$$

Теперь рассмотрим произведение двух обычных операторов пространственных трансляций:

$$e^{ixP}e^{iaP} = e^{i(x+a)P}, \tag{273}$$

поскольку все компоненты P коммутируют. Говорят, что это произведение операторов трансляции индуцирует преобразование $x \to x + a$ в координатном пространстве. Мы собираемся обобщить это утверждение, перемножая два оператора U из (269) и спрашивая: какие при этом индуцируются преобразования пространственно-временных координат и спинорных степеней свободы?

Найдем это произведение

$$U(a,\xi,\xi^*)U(x,\theta,\theta^*) = e^{iaP}e^{i\xi Q}e^{i\overline{\xi Q}}e^{ixP}e^{i\theta Q}e^{i\overline{\theta Q}}. \tag{274}$$

В отличие от (273), здесь уже нельзя просто объединить все экспоненты, так как операторы Q и Q^+ не коммутируют. Они удовлетворяют алгебре (170). Однако, как отмечено в разд. 1.6, компоненты P коммутируют с Q и Q^+, поэтому можно передвинуть оператор $\exp[ixP]$ через стоящие слева от него операторы и объединить с $\exp[iaP]$, как в (273). Остается нетривиальная часть

$$e^{i\xi Q}e^{i\overline{\xi Q}}e^{i\theta Q}e^{i\overline{\theta Q}}. \tag{275}$$

Чтобы упростить это выражение, воспользуемся тождеством Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{6}[[A,B],B]+\ldots}. \tag{276}$$

Применим это тождество к первому произведению в (275), выбрав $A = i\xi Q$ и $B = i\overline{\xi Q}$. Получаем

$$e^{i\xi Q}e^{i\overline{\xi Q}} = e^{i\xi Q+i\overline{\xi Q}-\frac{1}{2}[\xi Q,\overline{\xi Q}]+\ldots}. \tag{277}$$

Имея в виду (170), перепишем коммутатор

$$\begin{aligned}
&[\xi Q,\overline{\xi Q}] = [\xi^1Q_1+\xi^2Q_2,\xi_1^*Q_2^+-\xi_2^*Q_1^+] = \\
&= [\xi^1Q_1+\xi^2Q_2,-\xi_2^*Q_2^+-\xi^{1*}Q_1^+] = [\xi^aQ_a,-\xi^{b*}Q_b^+] = -\xi^aQ_a\xi^{b*}Q_b^+ + \xi_b^*Q_b^+\xi^aQ_a = \\
&= \xi^a\xi^{b*}(Q_aQ_b^++Q_b^+Q_a) = \xi^a\xi^{b*}(\sigma^\mu)_{ab}P_\mu.
\end{aligned} \tag{278}$$

Поскольку P коммутирует с Q и Q^+, то остается

$$e^{i\xi Q}e^{i\overline{\xi Q}} = e^{iAP}e^{i(\xi Q+\overline{\xi Q})}, \tag{279}$$

где

$$A^\mu = \frac{1}{2}i\xi^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}. \tag{280}$$

Продолжая редукцию соотношения (275), рассмотрим произведение

$$e^{i\xi Q}e^{i\overline{\xi Q}}e^{i\theta Q}e^{i\overline{\theta Q}} = e^{iAP}e^{i(\xi Q+\overline{\xi Q})}e^{i\theta Q}e^{i\overline{\theta Q}} \tag{281}$$

и применим (276) ко второму и третьему членам в произведении (281)

$$e^{i(\xi Q+\overline{\xi Q})}e^{i\theta Q} = e^{i(\xi Q+\overline{\xi Q}+\theta Q)-\frac{1}{2}[\xi Q,\overline{\xi Q}]+\ldots} = e^{i(\xi Q+\overline{\xi Q}+\theta Q)-\frac{1}{2}\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}P_\mu}. \tag{282}$$

Тогда выражение (275) принимает вид

$$e^{-\frac{1}{2}\xi^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}P_\mu+\frac{1}{2}\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}P_\mu}e^{i(\xi Q+\overline{\xi Q}+\theta Q)}e^{i\overline{\theta Q}}. \tag{283}$$

Снова применяя (276), запишем

$$e^{i(\xi Q+\overline{\xi Q}+\theta Q)}=e^{i(\xi+\theta)Q}e^{i\overline{\xi Q}}e^{\frac{1}{2}[(\xi+\theta)Q,\overline{\xi Q}]}. \tag{284}$$

Как и раньше, вычисляя коммутатор, получаем

$$e^{i\xi Q}e^{i\overline{\xi Q}}e^{i\theta Q}e^{i\overline{\theta Q}}=e^{i[-i\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}P_\mu]}e^{i(\xi+\theta)Q}e^{i(\overline{\xi}+\overline{\theta})\overline{Q}}. \tag{285}$$

Из этого соотношения следует, что произведение $U(a,\xi,\xi^*)U(x,\theta,\theta^*)$ индуцирует преобразования

$$\begin{aligned}&\theta\to\theta+\xi;\\&\theta^*\to\theta^*+\xi^*;\\&x^\mu\to x^\mu+a^\mu-i\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}.\end{aligned} \tag{286}$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned}U(a,\xi,\xi^*)U(x,\theta,\theta^*)\Phi(0)U^{-1}(x,\theta,\theta^*)U^{-1}(a,\xi,\xi^*)=U(a,\xi,\xi^*)\Phi(x,\theta,\theta^*)U^{-1}(a,\xi,\xi^*)=\\=\Phi(x^\mu+a^\mu-i\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*},\theta+\xi,\theta^*+\xi^*).\end{aligned} \tag{287}$$

Как видно, это выражение представляет собой SUSY расширение обычных трансляций, аналогичных (267).

1.10.2. Представление SUSY генераторов в виде дифференциальных операторов. Выражение (267) представляет собой запись генераторов трансляций в виде дифференциальных операторов. Аналогичная процедура (287) задает SUSY генераторы как дифференциальные операторы. Мы проверим, что они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (170), подобным соотношениям между операторами углового момента в $SU(2)$-алгебре. Будем считать, что (287) — результат применения преобразования, параметризованного (a,ξ,ξ^*), к полю $\Phi(x,\theta,\theta^*)$. Для инфинитезимального изменения поля Φ:

$$\delta\Phi=-i\theta^a(\sigma^\mu)\xi^{b*}\partial_\mu\Phi+\xi^a\frac{\partial\Phi}{\partial\theta^a}+\xi^*_a\frac{\partial\Phi}{\partial\theta^*_a}. \tag{288}$$

$$\delta\Phi=(-i\xi\widehat{Q}-i\overline{\xi}\overline{\widehat{Q}})\Phi=(-i\xi^a\widehat{Q}_a-i\xi^*_a\widehat{Q}^{+a})\Phi. \tag{289}$$

Сравнивая (288) с (289), можно идентифицировать

$$\widehat{Q}_a=i\frac{\partial}{\partial\theta^a}. \tag{290}$$

Аналогично

$$\widehat{Q}^{+a}=i\frac{\partial}{\partial\theta^*_a}. \tag{291}$$

Кроме того

$$-i\xi^*_a\widehat{Q}^{+a}\Phi=-i\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}\partial_\mu\Phi. \tag{292}$$

Нам нужно проверить, что эти $\widehat{Q}$ операторы удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (170). Чтобы это показать, удобнее использовать операторы с нижними

индексами $\widehat{Q}^+_a$. Очевидно, что

$$\widehat{Q}^+_a = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{a*}}. \tag{293}$$

Что касается выражения (292), то $\xi^*_a\widehat{Q}^{+a} = -\xi^{a*}\widehat{Q}^+_a$ и $\theta^a\xi^{b*} = -\xi^{b*}\theta^a$, а также

$$\widehat{Q}^+_a = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{a*}} + \theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\partial_\mu. \tag{294}$$

Нетрудно проверить, что

$$[\widehat{Q}_a, \widehat{Q}^+_b] = i(\sigma^\mu)_{ab}\partial_\mu = (\sigma^\mu)_{ab}\widehat{P}_\mu, \tag{295}$$

кроме того, $[\widehat{Q}_a, \widehat{Q}_b] = [\widehat{Q}^+_a, \widehat{Q}^+_b] = 0$.

Таким образом, мы представили SUSY генераторы в терминах фермионных параметров и производных, удовлетворяющих SUSY алгебре.

1.10.3. Киральные суперполя и их (киральные) компонентные поля. Предположим, что суперполе $\Phi(x,\theta,\theta^*)$ не зависит от θ^* : $\Phi(x,\theta)$. Такое суперполе называют «лево-киральным суперполем» и обозначают Φ_L, поскольку оно содержит только спинор L-типа χ и не содержит R-типа спинор ψ. Рассмотрим разложение Φ по степеням θ. Из-за спинорной природы переменных θ следует $(\theta_1)^2 = (\theta_2)^2 = 0$, поэтому в разложении будет только три слагаемых

$$\Phi(x,\theta) = \phi(x) + \theta\chi(x) + \frac{1}{2}\theta\theta F(x). \tag{296}$$

Это наиболее общая форма суперполя, зависящего только от x и θ. Как видно из (296), суперполе зависит от трех компонент полей: ϕ, χ и F. Нам нужно проверить, что закон преобразования (289) для суперполя с операторами $\widehat{Q}$ и $\widehat{Q}^+$, задаваемый соотношениями (290) и (294) подразумевает преобразование (220) для компонент полей ϕ, χ и F.

Действительно,

$$\begin{aligned}\delta\Phi = (-i\xi^a\widehat{Q}_a - i\xi^*_a\widehat{Q}^{+a})\Phi = (-i\xi^a\widehat{Q}_a + i\xi^{a*}\widehat{Q}^+_a)\Phi =\\ = \left(\xi^a\frac{\partial}{\partial\theta_a} + \xi^{a*}\frac{\partial}{\partial\theta^{a*}} + i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\partial_\mu\right)\left[\phi(x) + \theta^c\chi_c + \frac{1}{2}\theta\theta F\right] \equiv\\ \equiv \delta_\xi\phi + \theta^a\delta_\xi\chi_a + \frac{1}{2}\theta\theta\delta_\xi F.\end{aligned} \tag{297}$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}\left[\theta^c\chi_c + \frac{1}{2}\theta\theta\right] = \chi_a + \theta_a, \tag{298}$$

где использовано соотношение $\partial/\partial\theta^a(\theta\theta) = 2\theta_a$. Поэтому слагаемое $\xi^a\partial/\partial\theta^a$ дает

$$\xi^a\chi_a + \theta^a\xi_a F. \tag{299}$$

Далее, член с $\partial/\partial\theta^{a*}$ обращается в ноль, поскольку Φ не зависит от θ^*. Оставшееся слагаемое

$$i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\partial_\mu\phi + i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\theta^c\partial_\mu\chi_c. \tag{300}$$

Отметим, что фермионная природа θ не допускает кубических членов по θ. Первое слагаемое в (300) можно переписать в виде

$$-i\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\xi^{a*}\partial_\mu\phi. \tag{301}$$

Возвращаясь к (297), можно идентифицировать независящую от θ часть как

$$\delta_\xi \phi = \xi^a \chi_a, \tag{302}$$

а часть, линейную по θ:

$$\theta^a \delta_\xi \chi_a = \theta^a (\xi_a F - i(\sigma^\mu)_{ab} \xi^{b*} \partial_\mu \phi). \tag{303}$$

Поскольку последнее соотношение выполняется для всех θ, символ θ^a можно исключить, и тогда (302) и (303) для полей ϕ и χ действительно воспроизводят (220).

Остается разобраться со вторым слагаемым в (300), которое билинейно по θ и содержит δ, F. Это слагаемое можно записать в виде

$$-i\xi^{a*} (\sigma^{\mu T})_{ab} \varepsilon^{bc} \partial_\mu \chi_c \frac{1}{2} \theta\theta. \tag{304}$$

Сравнивая его с (297), получаем

$$\delta_\xi F = -i\xi^{a*} (\sigma^{\mu T})_{ab} \varepsilon^{bc} \partial_\mu \chi_c. \tag{305}$$

Итак, киральное суперполе $\Phi(x,\theta)$ из (296), содержащее компоненты ϕ, χ и F, корректно преобразуется при SUSY трансформациях. В этом случае говорят, что киральное суперполе является линейным представлением SUSY алгебры.

Теперь рассмотрим произведение киральных суперполей и получим SUSY инвариантные взаимодействия, в частности, в модели Весса–Зумино, рассмотренной выше.

1.10.4. Произведение киральных суперполей. Пусть Φ_i — киральное суперполе («левого» типа), причем индекс i нумерует калибровочные и «ароматные» степени свободы компонент поля. Представим снова поле Φ_i в виде

$$\Phi_i(x,\theta) = \phi_i(x) + \theta\chi_i(x) + \frac{1}{2}\theta\theta F_i(x) \tag{306}$$

и рассмотрим произведение двух суперполей

$$\Phi_i \Phi_j = \Big(\phi_i + \theta\chi_i + \frac{1}{2}\theta\theta F_i\Big)\Big(\phi_j + \theta\chi_j + \frac{1}{2}\theta\theta F_j\Big). \tag{307}$$

В правой части этого выражения содержатся следующие слагаемые:

независящие от θ: $\phi_i \phi_j$; (308)

линейные по θ: $\theta(\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i)$; (309)

билинейные по θ: $\frac{1}{2}\theta\theta(\phi_i F_j + \phi_j F_i) + \theta\chi_i \theta\chi_j$. (310)

Начнем со второго слагаемого в (310) и запишем его в виде

$$\theta\chi_i\theta\chi_j = \theta^a \chi_{ia} \theta^b \chi_{jb} = -\theta^a \theta^b \chi_{ia} \chi_{jb} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab} \theta\theta \chi_{ia} \chi_{jb} = \frac{1}{2}\theta\theta(\chi_{i1}\chi_{j2} - \chi_{j2}\chi_{i1}) = -\frac{1}{2}\theta\theta\chi_i\chi_j. \tag{311}$$

Поэтому билинейный член по θ в (307)

$$\frac{1}{2}\theta\theta(\phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \chi_j). \tag{312}$$

Собирая все слагаемые вместе, получаем

$$\Phi_i \Phi_j = \phi_{ij} + \theta\chi_{ij} + \frac{1}{2}\theta\theta F_{ij}, \tag{313}$$

где

$$\phi_{ij} = \phi_i \phi_j, \quad \chi_{ij} = \chi_i \phi_j + \phi_j \chi_i, \quad F_{ij} = \phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \chi_j. \tag{314}$$

Введем величину

$$W_{\text{quad}} = \frac{1}{2} M_{ij} \Phi \Phi_j \Big|_F, \tag{315}$$

где $|_F$ означает F-компоненту, т. е. коэффициент $(1/2)\theta\theta$ в произведении, а M_{ij} выбрана симметрично по i и j. Тогда

$$W_{\text{quad}} = \frac{1}{2} M_{ij} (\phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \chi_j) = M_{ij} \phi_i F_j - \frac{1}{2} M_{ij} \chi_i \chi_j. \tag{316}$$

Очевидно, что F — компонента кирального суперполя (которая есть произведение двух других суперполей) гарантирует, что (316) дает SUSY инвариантное действие.

Теперь обратимся к произведению трех киральных суперполей

$$\Phi_i \Phi_j \Phi_k = \Big[\phi_i \phi_j + \theta(\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) + \frac{1}{2} \theta\theta (\phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \chi_j) \Big] \Big[\phi_k + \theta \chi_k + \frac{1}{2} \theta\theta F_k \Big]. \tag{317}$$

Поскольку наш интерес ограничен нахождением кандидатов на SUSY инвариантное действие, будем рассматривать лишь F-компоненту. В выражении (317) содержится слагаемое

$$\phi_i \phi_j F_k + \phi_j \phi_k F_i + \phi_k \phi_i F_j - \chi_i \chi_j \phi_k. \tag{318}$$

Слагаемое $\theta(\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) \theta \chi_k$ можно переписать, как и в (311), в виде

$$-\frac{1}{2} \theta\theta (\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) \chi_k. \tag{319}$$

Объединяя, получаем

$$\Phi_i \Phi_j \Phi_k |_F = \phi_i \phi_j F_k + \phi_j \phi_k F_i + \phi_k \phi_i F_j - \chi_i \chi_j \phi_k - \chi_j \chi_k \phi_i - \chi_i \chi_k \phi_j. \tag{320}$$

Рассмотрим кубический аналог (315):

$$W_{\text{cub}} = \frac{1}{6} y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Big|_F, \tag{321}$$

где коэффициенты y_{ijk} полностью симметричны по i, j, k. Тогда из (320) следует

$$W_{\text{cub}} = \frac{1}{2} y_{ijk} \phi_i \phi_j F_k - \frac{1}{2} y_{ijk} \chi_i \chi_j \phi_k. \tag{322}$$

Первый член в этом выражении в точности совпадает с первым членом в (221) с W_i, задаваемым вторым (y_{ijk}) членом в (226). Второй же член в (322) совпадает со вторым членом в (221), если W_{ij} задается в терминах y_{ijk} соотношения (224). Таким образом, показано, что все взаимодействия, обсуждавшиеся в разд. 1.9, можно выразить через F-компоненты произведения суперполей, а это гарантирует SUSY инвариантность соответствующего действия. Конечно, следует включить также и эрмитово-сопряженные слагаемые. Вследствие того, что все взаимодействия генерируются произведениями суперполей в W_{quad} и W_{cub}, сами W называются суперпотенциалами. Таким образом, полный потенциал модели Весса–Зумино записывается в виде:

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k, \tag{323}$$

и при этом понимается, что в лагранжиане выбирается F-компонента.

В MSSM (минимальной суперсимметричной стандартной модели) суперпотенциалы (323) описывают некалибровочные взаимодействия полей, т. е. взаимодействия, включающие хиггсовские супермультиплеты.

Теперь обратимся к супермультиплетам, содержащим калибровочные поля, имея в виду суперсимметрию калибровочных взаимодействий стандартной модели (SM).

1.11. Векторные (калибровочные) супермультиплеты

1.11.1. Абелевый калибровочный супермультиплет. Начнем обсуждение с безмассового $U(1)$-калибровочного поля $A^\mu(x)$, подобного фотонному полю. Спин такого поля равен единице, на массовой поверхности оно имеет две (а не три) степени свободы, причем поперечные направлению распространения. В SUSY существует партнер этого поля со спином 1/2, также имеющий две степени свободы. Такой фермионный партнер калибровочного поля называют калибрино. В случае $U(1)$-симметрии это фотино, будем обозначать его λ, и пусть это состояние L-типа. Принадлежа к тому же мультиплету, что и фотон, фотино имеет те же квантовые числа, в частности, фотино электрически нейтрально. Масса фотино, как и фотона, равна нулю. Поэтому лагранжиан будет суммой максвелловского члена для фотона, плюс соответствующий безмассовый спинорный член для фотино

$$L_{\gamma\lambda} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda, \tag{324}$$

где, как обычно, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Каким должно быть преобразование между A^μ и λ, чтобы лагранжиан (324) или действие были инвариантными? Мы ожидаем, что в киральном супермультиплете нельзя для калибровочных полей игнорировать степени свободы вне массовой поверхности, но начнем именно с этого предположения.

Что такое $\delta_\xi A^\mu$? Это 4-вектор и вещественная, а не комплексная величина, линейная по ξ и ξ^*. Попробуем записать

$$\delta_\xi A^\mu = \xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi, \tag{325}$$

где ξ — L-типа спинор, но размерности $M^{-1/2}$, как и в (100). Спинорное поле λ имеет размерность $M^{3/2}$, поэтому в (325) A^μ имеет желаемую размерность M^1.

А как насчет $\delta_\xi\lambda$? Эта величина должна быть пропорциональна A^μ. Поскольку λ — калибровочно-инвариантно и пропорционально калибровочно-инвариантной величине $F^{\mu\nu}$, запишем

$$\delta_\xi\lambda \sim \xi F^{\mu\nu}. \tag{326}$$

Размерность $F^{\mu\nu}$ есть M^2, поэтому с размерностями в (326) все в порядке, и нет необходимости для введения производных. Но нужно «поглотить» в правой части лоренцевские индексы и остаться с некоторой величиной, преобразующейся, как L-типа спинор. Для этого напомним из разд. 1.3, что величина $\overline{\sigma}^\nu\xi$ преобразуется как R-типа спинор ψ, а $\sigma^\mu\psi$ преобразуется как L-типа спинор. Поэтому определим

$$\delta_\xi\lambda = C\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi F_{\mu\nu}, \tag{327}$$

где C — константа, подлежащая определению. Аналогично

$$\delta_\xi\lambda^+ = C^*\xi^+\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu F_{\mu\nu}. \tag{328}$$

Рассмотрим SUSY вариацию максвелловского члена в лагранжиане (324). Используя антисимметрию $F^{\mu\nu}$, получаем

$$\delta_\xi\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\partial^\mu\delta_\xi A^\nu - \partial^\nu\delta_\xi A^\mu) = -F_{\mu\nu}\partial^\mu\delta_\xi A^\nu = -F_{\mu\nu}\partial^\mu(\xi^+\overline{\sigma}^\nu\lambda + \lambda^+\overline{\sigma}^\nu\xi). \tag{329}$$

Вариация спинорного члена

$$i(\delta_\xi\lambda^+)\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + i\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu(\delta_\xi\lambda) = i(C^*\xi^+\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu F_{\mu\nu})\overline{\sigma}^\rho\partial_\rho\lambda + iC\lambda^+\overline{\sigma}^\rho\partial_\rho(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi F_{\mu\nu}). \tag{330}$$

Часть с ξ в (329) должна сокращать часть с ξ в (330) (или, по крайней мере, выражаться через полную производную), то же самое справедливо и для ξ^+ частей. Поэтому рассмотрим ξ^+ часть в (330), она запишется в виде

$$iC^*\xi^+\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\sigma}^\rho\partial_\rho\lambda F_{\mu\nu} = -iC^*\xi^+\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\partial_\rho\lambda F_{\mu\nu}. \tag{331}$$

Здесь σ — матрица Паули, но, как известно, произведение двух матриц Паули дает либо единичную матрицу, либо третью матрицу Паули. Следовательно, произведение трех матриц σ выражается в виде линейной комбинации этих матриц.

Полезно использовать следующее тождество

$$\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho = g^{\mu\nu}\overline{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho}\overline{\sigma}^\nu + g^{\nu\rho}\overline{\sigma}^\mu - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\delta}\overline{\sigma}_\delta. \tag{332}$$

Тогда в (331) исчезает член, содержащий $\ldots g^{\mu\nu}\ldots F_{\mu\nu}$, поскольку $g^{\mu\nu}$ симметричен по индексам, а $F_{\mu\nu}$ — антисимметричен. Далее, можно провести интегрирование по частям и записать $\partial_\rho\lambda F_{\mu\nu}$ в виде $-\lambda\partial_\rho F_{\mu\nu} = -\lambda(\partial_\rho\partial_\mu A_\nu - \partial_\rho\partial_\nu A_\mu)$. Первый из этих двух членов симметричен при перестановке ρ и μ, а второй — симметричен при перестановке ρ и ν. Но оба они домножаются на $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, который антисимметричен при перестановке любых пар индексов. Следовательно, как целое выражение обращается в ноль, и от выражения (331) остается

$$-iC^*\xi^+[-\overline{\sigma}^\nu\partial^\mu\lambda + \overline{\sigma}^\mu\partial^\nu\lambda]F_{\mu\nu}. \tag{333}$$

Во втором слагаемом (333) переставим индексы μ и ν и, используя антисимметрию $F_{\mu\nu}$, получим, что второй член равен первому, поэтому «ξ^+» часть вариации фермионного поля $L_{\gamma\lambda}$:

$$2iC^*\xi^+\overline{\sigma}^\nu\partial_\mu\lambda F_{\mu\nu}. \tag{334}$$

Это слагаемое сокращает «ξ^+» часть в (329), если $C = 1/2$, и для этого необходимы SUSY преобразования (325), а также

$$\delta_\xi\lambda = \frac{1}{2}i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi F_{\mu\nu} \tag{335}$$

и

$$\delta_\xi\lambda^+ = -\frac{1}{2}i\xi^+\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu F_{\mu\nu}. \tag{336}$$

Однако, если попытаться вычислить действие $\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta$ на полях A^μ и λ, то самосогласованного результата не получится до тех пор, пока не будет сделано предположение о том, что поля удовлетворяют свободным уравнениям движения. Ясно, что такое предположение неудовлетворительно. Вне массовой поверхности A^μ имеет три степени свободы, поэтому нужно ввести дополнительное аксиальное поле, назовем его $D(x)$ — вещественное скалярное поле с одной степенью свободы. Добавим также внешний (нераспространяющийся) член в лагранжиан

$$L_D = \frac{1}{2}D^2. \tag{337}$$

Теперь следует рассмотреть, как SUSY преобразования действуют на поле D. Заметим, что поле D имеет размерность M^2, как и F. Резонно предположить, что D преобразуется так же, как и поле F (210). Однако поле D — вещественное, поэтому (210) нужно изменить, добавив эрмитово-сопряженное слагаемое

$$\delta_\xi D = -i\big(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - (\partial_\mu\lambda)^+\overline{\sigma}^\mu\xi\big). \tag{338}$$

Как и в случае $\delta_\xi F$, последнее выражение (338) является полной производной. Аналогично (214) и (216), выражения (335) и (336) нужно модифицировать, введя дополнительные члены

$$\delta_\xi\lambda = \xi D, \quad \delta_\xi\lambda^+ = \xi^+ D. \tag{339}$$

Тогда вариация L_D:

$$\delta_\xi\Big(\frac{1}{2}D^2\Big) = D\delta_\xi D = -iD\big(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - (\partial_\mu\lambda)^+\overline{\sigma}^\mu\xi\big), \tag{340}$$

а вариация фермионной части $L_{\gamma\lambda}$ получает дополнительный вклад

$$i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda D + i\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi D. \tag{341}$$

Первое слагаемое в (341) сокращается с первым слагаемым в (340), а вторые слагаемые сокращаются после интегрирования по частям.

1.11.2. Неабелевы калибровочные супермультиплеты. Рассмотренный выше пример не вполне физический, однако он поможет нам разобраться с SUSY преобразованиями в физически значимом неабелевом случае. Для определенности будем рассматривать $SU(2)$ калибровочную теорию, входящую в электрослабый сектор SM. Но сначала напомним уже известные вещи. В $SU(2)$ калибровочной теории тензор

$$F^\alpha_{\mu\nu} = \partial_\mu W^\alpha_\nu - \partial_\nu W^\alpha_\mu - g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}W^\beta_\mu W^\gamma_\nu, \tag{342}$$

где α, β и γ принимают значения 1, 2, 3; калибровочное поле $\vec{W}_\mu = (W^1_\mu, W^2_\mu, W^3_\mu)$ — триплет $SU(2)$ (вектор $SO(3)$); g — константа связи. В векторной нотации выражение (342) записывается в виде

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu. \tag{343}$$

При инфинитезимальных преобразованиях W^α_μ изменяются следующим образом

$$W'^{\,\alpha}_\mu(x) = W^\alpha_\mu(x) - \partial_\mu\varepsilon^\alpha(x) - g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^\beta(x)W^\gamma_\mu(x), \tag{344}$$

где обозначена зависимость полей от x, чтобы подчеркнуть локальный характер преобразований. При этом и три инфинитезимальных параметра $\varepsilon^\alpha(x)$ зависят от x. В случае $U(1)$-симметрии есть только один $\varepsilon(x)$, второго слагаемого в (344) нет, и тензор $F_{\mu\nu}$ калибровочно-инвариантен. В $SU(2)$ соответствующий тензор (343) преобразуется так:

$$F^{\alpha\,\prime}_{\mu\nu}(x) = F^\alpha_{\mu\nu}(x) - g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^\beta(x)F^\gamma_{\mu\nu}(x), \tag{345}$$

это просто означает, что $\vec{F}_{\mu\nu}$ преобразуется как $SU(2)$-триплет.

Последнее выражение не включает производной от $\vec{\varepsilon}(x)$, которая входит в (344). Это означает, что простым обобщением максвелловского лагранжиана в терминах $\vec{F}_{\mu\nu}$ получаем

$$-\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F^\alpha_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha}. \tag{346}$$

Теперь уже все готово для обобщения $U(1)$ SUSY модели, рассмотренной выше.

Очевидно, что нужно ввести $SU(2)$-триплет калибрино $\vec{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ — партнеров к триплету калибровочных полей. При инфинитезимальном $SU(2)$-преобразовании λ^a изменяется следующим образом

$$\lambda^{\alpha\prime}(x) = \lambda^\alpha(x) - g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^\beta(x)\lambda^\gamma(x). \tag{347}$$

Калибрино, конечно, не являются калибровочными полями, и их произведение не содержит производных от $\overline{\varepsilon}(x)$. Поэтому непосредственное обобщение соотношения (324):

$$L_{W\lambda} = -\frac{1}{4}F^\alpha_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha} + i\lambda^{\alpha+}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda^\alpha. \tag{348}$$

Первое слагаемое в этом выражении — $SU(2)$ калибровочно-инвариантно, второе же — нет. Дело в том, что при действии на x-зависимые параметры $\varepsilon^\beta(x)$ в (347) оставляет несокращенными члены $\partial_\mu\varepsilon^\beta(x)$.

Рецепт «борьбы» очевиден: надо перейти к инвариантной производной

$$\partial_\mu \to D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\vec{T}^{(t)}\vec{W}_\mu, \tag{349}$$

где три матрицы $T^{(t)\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$ имеют размерность $(2t+1)(2t+1)$ и представляют собой операторы $SU(2)$. В рассматриваемом случае λ^α относятся к триплетному ($t = 1$) представлению, для которого 3×3 матрицы

$$(T^{(1)\alpha})_{\beta\gamma} = -i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}. \tag{350}$$

Таким образом, в выражении (348) нужно сделать замену

$$\begin{aligned}\partial_\mu\lambda^\alpha \to (D_\mu\lambda)^\alpha = \partial_\mu\lambda^\alpha + ig(\vec{T}^{(1)}W_\mu)_{\alpha\beta}\lambda^\beta = \partial_\mu\lambda^\alpha + ig(-i\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}W^\gamma_\mu)\lambda^\beta = \\ = \partial_\mu\lambda^\alpha + g\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}W^\gamma_\mu\lambda^\beta = \partial_\mu\lambda^\alpha - g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}W^\beta_\mu\lambda^\gamma.\end{aligned} \tag{351}$$

При такой замене $L_{W\lambda}$ в (348) — $SU(2)$-калибровочно-инвариантен.

А как насчет инвариантности по отношению к SUSY преобразованиям? Из опыта рассмотрения $U(1)$-симметрии следует необходимость введения аналога аксиального поля D. Однако в этом случае нужен триплет D^α, балансирующий третьи (вне массовой поверхности) степени свободы для каждого W^α_μ. Поэтому попытаемся представить SUSY и калибровочно-инвариантный лагранжиан для $SU(2)$ калибровочного супермультиплета в виде

$$L_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F^\alpha_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha} + i\lambda^{\alpha+}\overline{\sigma}^\mu(D_\mu\lambda)^\alpha + \frac{1}{2}D^\alpha D^\alpha. \tag{352}$$

Какие могут быть предложения по соответствующим SUSY преобразованиям? Можно пойти по пути обобщения преобразований $U(1)$:

$$\begin{aligned}\delta_\xi W^{\mu\alpha} &= \xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda^\alpha + \lambda^{\alpha+}\overline{\sigma}^\mu\xi; \\ \delta_\xi\lambda^\alpha &= \frac{1}{2}i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi F^\alpha_{\mu\nu} + \xi D^\alpha; \\ \xi D^\alpha &= -i\big(\xi^+\overline{\sigma}^\mu(D_\mu\lambda)^\alpha - (D_\mu\lambda)^{\alpha+}\overline{\sigma}^\mu\xi\big),\end{aligned} \tag{353}$$

где в последней строке для реализации калибровочной инвариантности сделана замена «∂_μ» на «D_μ». При этом действие, основанное на лагранжиане (352), инвариантно относительно преобразований (353), и операция $(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)$ может быть согласованно применена ко всем полям W^α_μ, λ и D^α в этом калибровочном супермультиплете.

Эта суперсимметричная калибровочная теория содержит два сорта взаимодействий: 1) обычное самовзаимодействие полей W в (346); 2) взаимодействия W и λ за счет ковариантной производной в (352). Подчеркнем, что SUSY требует, чтобы калибрино было в том же представлении калибровочной группы, что и сами калибровочные бозоны.

Следующий шаг на пути к MSSM — построение лагранжианов, содержащих как киральные, так и калибровочные супермультиплеты.

1.12. Киральные и калибровочные супермультиплеты

Будем действовать в два этапа. Сначала введем (через ковариантные производные) связь калибровочных полей со скалярами и фермионами (полями материи) в киральных супермультиплетах. При этом будут учтены и взаимодействия между калибровочными полями векторных супермультиплетов и полями материи в киральных супермультиплетах. Но поскольку калибрино и D-поля входят в векторные супермультиплеты, нужно найти такую ренормализационную схему, в которой взаимодействие между полями материи, калибрино и D-полями было бы как калибровочно, так и SUSY инвариантным. На следующем этапе эти взаимодействия включим «в программу» объединения двух типов супермультиплетов. Как и раньше, начнем с $U(1)$ векторного и свободного кирального супермультиплетов.

1.12.1. $U(1)$ векторный и киральный супермультиплеты. Начнем с лагранжиана (219) для одного супермультиплета, заменив ∂_μ на D_μ:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \tag{354}$$

где q — $U(1)$-константа связи (заряд) и добавив $U(1)$ векторный супермультиплет. Тогда лагранжиан принимает вид

$$L = (D_\mu\phi)^+(D^\mu\phi) + i\chi^+\overline{\sigma}^\mu D_\mu\chi + F^+F^- - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2. \tag{355}$$

Теперь нужно рассмотреть возможные взаимодействия между полями материи ϕ и χ и полями λ и D в векторном супермультиплете. Любое такое взаимодействие должно быть Лоренц-инвариантным, перенормируемым и калибровочно-инвариантным. Получив взаимодействия с такими свойствами, мы должны попытаться включить их в лагранжиан сохраняющим SUSY способом.

Поскольку поля λ и Dнейтральны, любая калибровочно-инвариантная связь между ними и сопряженными полями ϕ и χ должна включать нейтральные билинейные комбинации последних полей: $\phi^+\phi$, $\phi^+\chi, \chi^+\phi$ и $\chi^+\chi$. Эти комбинации имеют размерности 2, 5/2, 5/2 и 3. Они связаны с полями λ и D, имеющими размерности 3/2 и 2, при этом должны возникать величины с размерностями, превышающими четыре. Это требование исключает комбинацию $\chi^+\chi$ и оставляет лишь три Лоренц- и калибровочно-инвариантных связи: $(\phi^+\chi)\chi$, $\chi^+(\chi^+\phi)$ и $\phi^+\phi D$. В первой из них Лоренц-инвариантность обеспечивается произведением L-типа величины $(\phi^+\chi)$ и L-типа спинора λ, а во второй — за счет «$\lambda^+\chi^+$»-типа произведения. Для получения эрмитовых взаимодействий, возьмем сумму первых двух типов связи, т. е. запишем допустимые члены взаимодействия в виде

$$Aq\big[(\phi^+\chi)\lambda + \lambda^+(\chi^+\phi)\big] + Bq\phi^+\phi D. \tag{356}$$

Коэффициенты A и B следует определить так, чтобы полный лагранжиан (355) был SUSY инвариантным. Но сначала нужно определить SUSY преобразования этих

полей. На первый взгляд, это можно сделать достаточно тривиально: используем соотношения (325), (335), (336) и (338) для полей в векторном супермультиплете и вводим ковариантные преобразования для кирального супермультиплета. Так, для кирального супермультиплета

$$\delta_\xi \phi = \xi\chi, \quad \delta_\xi \chi = -i\overline{\sigma}^\mu (i\sigma_2)\xi^{+T} D_\mu \phi + \xi F, \quad \delta_\xi F = -i\xi^+ \overline{\sigma}^\mu D_\mu \chi, \tag{357}$$

совместно с аналогичными преобразованиями для эрмитово-сопряженных полей. Однако, как мы увидим, на этом пути нет шансов определить A и B в выражении (356), поскольку полный лагранжиан инвариантен относительно этих преобразований. Это и не удивительно, так как преобразования для кирального супермультиплета найдены для случая $q = 0$ и вполне возможно, что преобразования (357) модифицируют части, пропорциональные q. Действительно, мы обнаружили, что нет необходимости модифицировать преобразование поля F. Но есть и более глубокая причина неудачи в определении A и B. Преобразования (325), (335), (336) и (338) с одной стороны, и преобразования (357) — с другой, в пределе $q = 0$ подразумевают SUSY и калибровочную инвариантность киральной части (357). Но нет априорной причины для того, чтобы ξ параметр в одном наборе преобразований было точно таким же, как в другом наборе преобразований. Конечно, можно домножить ξ на постоянное число, чтобы соответствующий лагранжиан остался инвариантным. Однако при объединении лагранжианов и учете (356) для $q \neq 0$ требование общей SUSY инвариантности фиксирует относительный масштаб двух ξ (с точностью до знака), и без его изменения невозможно получить SUSY инвариантную теорию. Для определенности, оставим ξ в (357) без изменения и введем вещественный масштабный параметр α в преобразования векторного мультиплета:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi A^\mu &= \alpha(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi);\\
\delta_\xi \lambda &= \frac{\alpha i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi)F_{\mu\nu} + \alpha\xi D;\\
\delta_\xi \lambda^+ &= -\frac{\alpha i}{2}(\xi^+\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)F_{\mu\nu} + \alpha\xi^+ D;\\
\delta_\xi D &= -\alpha i\big(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - (\partial_\mu\lambda^+)\overline{\sigma}^\mu\xi\big).
\end{aligned} \tag{358}$$

Обсудим теперь SUSY-вариацию «A» части выражения (356):

$$Aq\big[(\delta_\xi\phi^+)\chi\lambda + \phi^+(\delta_\xi\chi)\lambda + \phi^+\chi(\delta_\xi\chi) + (\delta_\xi\lambda^+)\chi^+\phi + \lambda^+(\delta_\xi\chi^+)\phi + \lambda^+\chi^+(\delta_\xi\phi)\big]. \tag{359}$$

Среди этих членов есть два линейных по q и D, возникающих за счет $\phi^+\chi(\delta_\xi\lambda)$ и сопряженного выражения:

$$Aq[\alpha\phi^+\chi\xi D + \alpha\xi^+\chi^+ D\phi]. \tag{360}$$

Аналогично вариация «B» части в (356):

$$\begin{aligned}
&Bq\big[(\delta_\xi\phi^+)\phi D + \phi^+(\delta_\xi\phi)D + \phi^+\phi(\delta_\xi D)\big] =\\
&\qquad = Bq\big[\chi^+\xi^+\phi D + \phi^+\xi\chi D + \phi^+\phi(-\alpha i)(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - (\partial_\mu\lambda^+)\overline{\sigma}^\mu\xi)\big].
\end{aligned} \tag{361}$$

«D» часть в (361) сокращает (360), если

$$A\alpha = -B. \tag{362}$$

Далее заметим, что первый и последний члены в (350) генерируют изменение

$$Aq[\chi^+\xi^+\chi\lambda + \lambda^+\chi^+\xi\chi]. \tag{363}$$

Между тем, имеется соответствующее изменение, возникающее за счет члена $-q\chi^+\overline{\sigma}^\mu\chi A_\mu$, а именно

$$-q\chi^+\overline{\sigma}^\mu\chi(\delta_\xi A_\mu) = -q\alpha\chi^+\overline{\sigma}^\mu\chi(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi). \tag{364}$$

Это выражение упрощается при использовании тождества

$$(\chi^+\overline{\sigma}^\mu\chi)(\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi) = 2(\chi^+\lambda^+)(\chi\xi). \tag{365}$$

Выражение (364) превращается в следующее

$$-2q\alpha[\chi^+\xi^+\chi\lambda + \chi^+\lambda^+\chi\xi]. \tag{366}$$

Это выражение сокращает (363), если

$$A = 2\alpha. \tag{367}$$

До сих пор ничего не препятствовало выбору $\alpha = 1$. Однако ограничение на α возникает при рассмотрении $(A^\mu - \phi)$ члена взаимодействия в выражении (355). А именно

$$-iq\delta_\xi\big(A^\mu\phi^+\partial_\mu\phi - (\partial_\mu\phi)^+A^\mu\phi\big). \tag{368}$$

Члены в $\delta_\xi A^\mu$ изменяются следующим образом

$$iq\alpha\big[(\partial_\mu\phi^+)(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi)\phi - (\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi)\phi^+\partial_\mu\phi\big]. \tag{369}$$

Подобное же изменение возникает и за счет членов $Aq[\phi^+(\delta_\xi\chi)\lambda + \lambda^+(\delta_\xi\chi^+)\phi]$ в (356):

$$Aq\big[\phi^+(-i\sigma^\mu i\sigma_2\xi^{+T}\partial_\mu\phi)\lambda + \lambda^+\partial_\mu\phi^+\xi^T(-i\sigma_2 i\sigma^\mu\phi)\big]. \tag{370}$$

Первое спинорное точечное произведение

$$\xi^+(-i\sigma_2)(-i\sigma^{\mu T})(-i\sigma_2)\lambda = i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda. \tag{371}$$

Второе спинорное произведение — эрмитово-сопряженное к первому, поэтому (370) дает изменение

$$Aqi\big[\phi^+(\partial_\mu\phi)\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda - (\partial_\mu\phi^+)\phi\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi\big]. \tag{372}$$

Наряду с (369) и (372), нужно сгруппировать два последних слагаемых в (361):

$$Bq\big[\phi^+\phi(-\alpha i)(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - (\partial_\mu\lambda^+)\overline{\sigma}^\mu\xi)\big] \tag{373}$$

и проинтегрировать по частям:

$$\alpha iBq\big\{\big[(\partial_\mu\phi^+)\phi + \phi^+\partial_\mu\phi\big](\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda) - \big[(\partial_\mu\phi^+)\phi + \phi^+\partial_\mu\phi\big](\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\xi)\big\}. \tag{374}$$

Обратимся к слагаемым в (369), (372) и (374), содержащим величины $\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda$. Соберем их вместе

$$iq\alpha\big[(\partial_\mu\phi^+)\phi - \phi^+\partial_\mu\phi\big] + Aqi\phi^+\partial_\mu\phi + \alpha iBq\big[(\partial_\mu\phi^+)\phi + \phi^+\partial_\mu\phi\big]. \tag{375}$$

Эти слагаемые сокращаются, если

$$B = -1. \tag{376}$$

Тогда из (367) и (362) получаем

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}. \tag{377}$$

Таким образом, объединенный лагранжиан не будет SUSY инвариантным до тех пор, пока не введен масштаб преобразований калибровочного мультиплета относительно кирального супермультиплета. Этот нетривиальный масштаб

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{378}$$

При этом выборе коэффициент $A = -\sqrt{2}$. Окончательно, SUSY инвариантный объединенный киральный и $U(1)$ калибровочный лагранжиан записывается в виде

$$L = (D_\mu\phi)^+(D_\mu\phi) + i\chi^+\overline{\sigma}^\mu D_\mu\chi + F^+F - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ + i\lambda^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2 - \sqrt{2}q\big[(\phi^+\chi)\lambda + \lambda^+(\chi^+\phi)\big] - q\phi^+\phi D. \tag{379}$$

Уравнение движения для поля D:

$$D = q\phi^+\phi. \tag{380}$$

Поскольку в это выражение не входят производные, с помощью (380) можно исключить поле D из лагранжиана. Для этого достаточно заменить два члена в (379), содержащие D, одним слагаемым

$$-\frac{1}{2}q^2(\phi^+\phi)^2. \tag{381}$$

Этот «$(\phi^+\phi)^2$» тип взаимодействий выглядит подобно хиггсовскому потенциалу (4), но появляется здесь с константой связи, определяемой калибровочной константой q. В следующем подразделе мы увидим, что нечто подобное происходим и в более реалистичном неабелевом случае. Масса хиггса (для фиксированного вакуумного среднего хиггсовского поля) определяется $(\phi^+\phi)^2$ связью, поэтому в MSSM меньше произвола для массы хиггса, чем в стандартной модели.

1.12.2. Неабелевы супермультиплеты. Снова будем действовать в два этапа. Начнем с лагранжиана Весса–Зумино для набора киральных супермультиплетов, обозначенных индексом i и включающего следующие слагаемые суперпотенциала

$$L_{WZ} = \partial_\mu\phi_i^+\partial_\mu\phi_i + \chi_i^+ i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_i + F_i^+F_i + \left[\frac{\partial W}{\partial\phi_i}F_i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\chi_i\chi_j + \text{э.с.}\right], \tag{382}$$

в котором калибровочные константы введены с помощью ковариантных производных

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi_i \to D_\mu\phi_i &= \partial_\mu\phi_i + igA_\mu^a(T^a\phi)_i; \\ \partial_\mu\chi_i \to D_\mu\chi_i &= \partial_\mu\chi_i + igA_\mu^a(T^a\chi)_i. \end{aligned} \tag{383}$$

В этих выражениях g и A_μ^a — калибровочные константы и калибровочные поля (например g_s и глюонные поля для КХД), T^a — эрмитовы генераторы калибровочной группы. Отметим еще раз, что SUSY требует, чтобы ϕ_i, χ_i и F_i принадлежали к одному представлению калибровочной группы. Конечно, как и в случае SM, некоторые поля материи взаимодействуют более чем одним калибровочным полем, поэтому все калибровочные константы должны быть включены в ковариантные производные. Заметим, что ковариантные производные для аксиальных полей отсутствуют, поскольку их «обычных» производных нет в лагранжиане (382). Нам нужно построить все возможные Лоренц- и калибровочно-инвариантные перенормируемые взаимодействия между полями материи и полями λ^a (калибрино), D^α.

Имея в виду структуру SM, нужно рассмотреть случаи, в которых поля материи являются синглетами по отношению к калибровочной группе (например, R-части кварковых или лептонных полей) или принадлежат к фундаментальному представлению калибровочной группы (триплету $SU(3)$ или дублету $SU(2)$). Для полей материи в синглетных представлениях нет калибровочно-инвариантной связи с полями λ^a или D^α. Для полей же материи в фундаментальном представлении можно организовать их билинейные комбинации, преобразующиеся по регулярному представлению, и эти комбинации при объединении с λ^a и D^α дают калибровочные синглеты (т. е. калибровочно-инвариантные связи).

Эти билинейные комбинации ϕ_i и $\phi_i^+ T^\alpha \phi_i$, преобразующиеся по регулярному представлению, имеют вид

$$\phi_i^+ T^\alpha \phi_i, \quad \phi_i^+ T^\alpha \chi_i, \quad \chi_i^+ T^\alpha \phi_i, \quad \chi_i^+ T^\alpha \chi_i, \tag{384}$$

где, например, $T^\alpha = \tau^\alpha/2$ для $SU(2)$ и τ^α — матрицы Паули.

Эти билинейные комбинации аналогичны тем, которые уже рассматривались в случае $U(1)$. В частности, они имеют ту же размерность. Следуя по этому пути, введем дополнительные слагаемые со взаимодействием

$$Ag\big[(\phi_i^+ T^\alpha \chi_i)\lambda^\alpha + \lambda^{\alpha+}(\chi_i^+ T^\alpha \phi_i)\big] + Bg(\phi_i^+ T^\alpha \phi_i)D^\alpha, \tag{385}$$

где опять A и B — коэффициенты, которые следует определить из требования SUSY инвариантности. Оказывается, что эти коэффициенты точно такие же, как в $U(1)$-случае. Поэтому объединенный SUSY инвариантный лагранжиан для неабелева случая запишется в символической форме следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\text{gauge+chiral}} = L_{\text{gauge}}(352) + L_{WZ}(382) - \\ - \sqrt{2}g\big[(\phi_i^+ T^\alpha \chi_i)\lambda^\alpha + \lambda^{\alpha+}(\chi_i^+ T^\alpha \phi_i)\big] - g(\phi_i^+ T^\alpha \phi_i)D^\alpha. \end{aligned} \tag{386}$$

Обратим внимание на важное следствие, связанное со слагаемым $-\sqrt{2}g[\ldots]$ в (386). В случае, если киральными мультиплетами являются хиггсовские супермультиплеты H_u и H_d (содержащие хиггс и хиггсино) и скалярные хиггсовские поля H_u^0 и H_d^0 приобретают ненулевые вакуумные средние, то между хиггсино и калибрино возникает смешивание.

Уравнение движения для поля D^α:

$$D^\alpha = g\sum_i (\phi_i^+ T^\alpha \phi_i), \tag{387}$$

где суммируется по всем киральным супермультиплетам. Как и раньше, с помощью (387) аксиальные поля исключаются из лагранжиана.

Тогда полный скалярный потенциал

$$V(\phi_i, \phi_i^+) = |W_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_G \sum_\alpha \sum_{i,j} g_G^2 (\phi_i^+ T_G^\alpha \phi_i)(\phi_j^+ T_G^\alpha \phi_j), \tag{388}$$

где суммирование подразумевает, что возможна более чем одна калибровочная группа ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ для SM) с различными константами связи g_G и генераторами T_G. Первое слагаемое в (388) называют «F-членом», он определяется фермионными массовыми членами M_{ij} и юкавскими константами связи (236). Второе слагаемое в (388) называется «D-членом», и он определяется калибровочными взаимодействиями. Ниже мы увидим, что D-член дает возможность получить в минимальной суперсимметричной модели (MSSM) ограничение на массу легчайшего Хиггс-бозона.

1.13. Содержание MSSM

Все фермионы стандартной модели, т. е. кварки и лептоны, имеют следующее свойство: их $L(\chi)$-части являются $SU(2)$-дублетами, а $R(\psi)$-части — $SU(2)$-синглеты. Свойства слабой калибровочной группы предписывают трактовать L- и R-части отдельно, а не вместе, как дираковский 4-компонентный спинор. Поэтому основным «строительным» блоком будет киральный супермультиплет, надлежащим образом «калиброванный».

Следует рассмотреть киральный мультиплет L-типа спинора χ. Это замечательно для e_L^-, μ_L^-, u_L, d_L и т. д., но как быть с e_R^-, μ_R^- и т. д.? Эти R-типа поля можно рассматривать как зарядово-сопряженные поля L-типа античастиц. Если (как это часто делается) обозначить поле так же, как частицу, то $e_R^- \equiv \psi_{e^-}$, но $e_L^+ \equiv \chi_{e^+}$. С другой стороны, если мы рассматриваем e_R^- как зарядово-сопряженное состояние к e_L^+, то

$$e_R^- \equiv \psi_{e^-} = (e_L^+)^C \equiv i\sigma_2 \chi_{e^+}^{+T}. \tag{389}$$

Чтобы получить опыт в новых обозначениях, запишем дираковский массовый член для электрона

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_{e^-}\Psi_{e^-} = \psi_{e^-}\chi_{e^-} + \chi_{e^-}^+\psi_{e^-} = (i\sigma_2\chi_{e^+}^{+T})\chi_{e^-} + \chi_{e^-}^+ i\sigma_2\chi_{e^+}^{+T} = \\ = \chi_{e^+}^T(-i\sigma_2)\chi_{e^-} + \chi_{e^-}^+ i\sigma_2\chi_{e^+}^{+T} = \chi_{e^+}\chi_{e^-} + \chi_{e^-}^+\chi_{e^+}^+.\end{aligned} \tag{390}$$

Видно, что все выражается в терминах χ. Полезно заметить, что

$$\Psi_{e^-}\gamma_5\Psi_{e^-} = -\chi_{e^+}\chi_{e^-} + \chi_{e^-}^+\chi_{e^+}^+. \tag{391}$$

В табл. 1 перечислены киральные супермультиплеты, появляющиеся в MSSM. Может быть добавлен индекс i, чтобы подчеркнуть принадлежность к какому-либо семейству, например, $u_{1L} = u_L$, $u_{2L} = c_L$, $u_{3L} = t_L$ и аналогично для лептонов.

Таблица 1

Киральные супермультиплеты MSSM

Наименование		**Спин 0**	**Спин 1/2**	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
Скварки, кварки (3 семейства)	Q	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	(u_L, d_L)	3	2	1/3
	$\overline{u}$	$\tilde{\overline{u}}_L(\tilde{u}_R)$	$\overline{u}_L \sim (u_R)^C$	$\overline{3}$	1	−4/3
	$\overline{d}$	$\tilde{\overline{d}}_L(\tilde{d}_R)$	$\overline{d}_L \sim (d_R)^C$	$\overline{3}$	1	2/3
Слептоны, лептоны (3 семейства)	L	$(\tilde{\nu}_{lL}, \tilde{l}_L)$	(ν_{lL}, l_L)	1	2	−1
	$\overline{l}$	$\tilde{\overline{l}}_L(\tilde{l}_R)$	$\overline{l}_L \sim (l_R)^C$	1	1	2
Хиггс, хиггсино	H_u	(H_u^+, H_u^0)	$(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$	1	2	1
	H_d	(H_d^0, H_d^-)	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$	1	2	−1

В табл. 2 представлены поля калибровочного супермультиплета MSSM.

Таблица 2

Поля калибровочного супермультиплета MSSM

Наименование	**Спин 0**	**Спин 1/2**	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
Глюино, глюоны	$\tilde{g}$	g	8	1	0
Вино, W-бозоны	$\tilde{W}^{\pm}$, $\tilde{W}^0$	$W^{\pm}$, W^0	1	3	0
Вино, B-бозон	$\tilde{B}$	B	1	1	0

После нарушения электрослабой симметрии, поля W^0 и B смешиваются и возникают физические Z^0 и γ, а соответствующие им партнеры тоже смешиваются и генерируют зино ($\tilde{Z}^0$) и безмассовое фотино $\tilde{\gamma}$.

Итак, зная калибровочные группы, состав частиц и свойства по отношению к калибровочным преобразованиям, а также суперпотенциал W, мы можем определить (в принципе) все свойства MSSM. В MSSM суперпотенциал выбирается в виде

$$W = y_u^{ij}\overline{u}_i Q_j H_u - y_d^{ij}\overline{d}_i Q_j H_d - y_l^{ij}\overline{l}_i L_j H_d + \mu H_u H_d. \tag{392}$$

Поля, входящие в (392) — это киральные суперполя, представленные в первой из таблиц. Величины «y» — это 3×3 матрицы для каждого поколения, и они точно такие же, как юкавские константы связи в SM. В SM можно использовать только один хиггсовский дублет и зарядово-сопряженный к нему дублет. В суперсимметричном случае это недопустимо, так как W не может зависеть от комплексно сопряженного поля. MSSM не включает дираковского типа нейтринные массы, т. е. массы нейтрино следует рассматривать вне физики стандартной модели.

Итак, ценой введения только одного нового параметра μ в (392) получено суперсимметричное расширение стандартной модели. Фермионные массы пропорциональны соответствующему y-параметру. Так как t-кварк, b-кварк и τ — самые тяжелые фермионы в SM, то иногда полезно рассмотреть приближение, в котором единственные ненулевые значения

$$y_u^{33} = y_t, \quad y_d^{33} = y_b, \quad y_e^{33} = y_\tau. \tag{393}$$

В терминах $SU(2)_L$ слабых изоспиновых полей (для скалярных полей и опуская μ-член) получаем

$$W \simeq y_t\big[\bar{\tilde{t}}_L(\tilde{t}_L H_u^0 - \tilde{b}_L H_u^+)\big] - y_b\big[\bar{\tilde{b}}_L(\tilde{t}_L H_d^- - \tilde{b}_L H_d^0)\big] - y_t\big[\bar{\tilde{\tau}}_L(\tilde{\nu}_{\tau L} H_d^- - \tilde{\tau}_L H_d^0)\big]. \tag{394}$$

Знак минус в W выбран для того, чтобы члены $y_t\bar{\tilde{t}}_L\tilde{t}_L$, $y_b\bar{\tilde{b}}_L\tilde{b}_L$ и $y_\tau\bar{\tilde{\tau}}_L\tilde{\tau}_L$ имели правильный знак при генерации масс t, b и τ при $\langle H_u^0\rangle \neq 0$ и $\langle H_d^0\rangle \neq 0$.

В такой SUSY, вдобавок к юкавским взаимодействиям SM, связывающим хиггсовские поля с кварками и лептонами, должны быть аналогичные связи хиггсино с скварками и кварками, а также между хиггсино и слептонами и лептонами. Имеются также четверные скалярные взаимодействия, пропорциональные квадратам калибровочных констант g и g', возникающие за счет «D-члена» в (388). Они включают (хиггс)^4-связь, как это и постулируется в SM, но теперь они появляются с коэффициентами, которые определяются параметрами g и g', уже имеющимися в теории. Хотя в (392) нет обычного массового члена, есть слагаемое, квадратичное по полям, это так называемый «μ-член». Этот член реализует $SU(2)$-инвариантную связь двух различных хиггсовских дублетов:

$$W(\mu\text{-член}) = \mu H_u H_d = \mu(H_{u1}H_{d2} - H_{u2}H_{d1}), \tag{395}$$

где индексы 1 и 2 обозначают изоспинорные компоненты. Только одна такая билинейная связь допустима в W, поскольку другие возможности $H_u^+ H_u$ и $H_d^+ H_d$ включают эрмитово-сопряженные поля, нарушающие SUSY. Как обычно, нужно ввести F-компоненту (395):

$$\mu\big[(H_u^+ F_d^- - H_u^0 F_d^0 + H_d^0 F_u^0 - H_d^- F_u^+) - (\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_d^- - \tilde{H}_u^0 \tilde{H}_d^0)\big]. \tag{396}$$

Кроме того, следует добавить эрмитово-сопряженное выражение к (396). Второе слагаемое в (396) дает вклад в (недиагональные) массовые члены хиггсино. Первый

же член в (396) приводит к скалярному потенциалу, включающему хиггсовские поля:

$$|\mu^2|\big(|H_u^+|^2 + |H_d^-|^2 + |H_u^0|^2 + |H_d^0|^2\big). \tag{397}$$

Все эти члены имеют (положительный) знак, соответствующий стандартному «$m^2\phi^+\phi$» бозонному массовому члену, но не отрицательный знак, необходимый для нарушения электрослабой симметрии вследствие механизма Хиггса. Это означает, что наш SUSY-инвариантный лагранжиан «не приспособлен» для нарушения электрослабой симметрии.

Конечно, SUSY само по себе и в MSSM варианте не может быть точной симметрией, поскольку мы еще не наблюдали S-партнеров полей SM. Очевидно, что для обеспечения нарушения электрослабой симметрии надо ввести SUSY нарушающие слагаемые. В этом, однако, возникает трудность. Параметр μ должен, вероятно, лежать в интервале 100 ГэВ–1 ТэВ, иначе нужно очень деликатное сокращение положительных $|\mu|^2$-членов и отрицательных SUSY нарушающих членов.

1.14. Объединение калибровочных констант в MSSM

Уже отмечалось выше, что три «бегущие константы» $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$-теории должны сходиться к общему значению на очень больших масштабах энергий. Однако это происходит не в SM, а в MSSM. Эволюция калибровочных констант определяется числом и типом мультиплетов калибровочных и полей материи, имеющихся в теории. В MSSM мы только что определили состав мультиплетов и поэтому вполне готовы к тому, чтобы воспроизвести замечательный результат по объединению констант.

Константы α_3 и α_2 определяются следующим образом

$$\alpha_3 = \frac{g_S^2}{4\pi}, \quad \alpha_2 = \frac{g^2}{4\pi}, \tag{398}$$

где g_S — $SU(3)_C$ калибровочная константа КХД и g — электрослабая константа $SU(2)_L$. Определение третьей константы α_1 несколько более сложное. Очевидно, что она связана с ${g'}^2$, где g' — калибровочная константа $U(1)_Y$ SM. Константы g и g' появляются в $SU(2)_L$ ковариантной производной

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\Big(\frac{\vec{\tau}}{2}\Big)\vec{W}_\mu + ig'\Big(\frac{y}{2}\Big)B_\mu. \tag{399}$$

Проблема в том, что в рамках SM масштаб g' произволен. Мы могли бы домножить слабый гиперзарядный генератор y на произвольную константу c или поделить на c, при этом ничего не изменится. С другой стороны, нормировка констант в (399) определяется нормировкой генераторов $\vec{\tau}$:

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{\tau^\alpha}{2}\frac{\tau^\beta}{2}\Big) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}. \tag{400}$$

Так как каждый генератор нормирован на одну и ту же величину, то на эту же величину нужно нормировать и g, т. е. никакой относительный рескейлинг невозможен. В рамках объединения следует предположить, что один из $Y = c(y/2)$ является одним из генераторов большей группы (например, $SU(5)$), включающей генераторы $SU(3)_C$ и $SU(2)_L$. При этом все они удовлетворяют единому нормировочному условию, а следовательно, имеют одну общую калибровочную константу. Кварки и лептоны одного семейства будут принадлежать одному представлению большой

группы, причем не обязательно фундаментальному представлению. Важно только, чтобы генераторы имели общую нормировку. Например, можно потребовать

$$\mathrm{tr}\left(c^2\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) = \mathrm{tr}(t_3)^2, \tag{401}$$

где t_3 — третий $SU(2)_L$-генератор (любой генератор дает тот же результат) и след вычисляется по всем состояниям в представлении. Следы — это просто суммы квадратов собственных значений. Для правой части (401) получаем

$$3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 2, \tag{402}$$

где «3» возникает за счет цвета. Левую же часть в (402) найдем с помощью табл. 1.

$$c^2\left(\frac{3}{36}+\frac{3}{36}+\frac{3\cdot 4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}\right) = c^2\frac{20}{6}. \tag{403}$$

Из (402) и (403) получаем

$$c = \sqrt{\frac{3}{5}}. \tag{404}$$

Поэтому правильно нормированный генератор

$$Y = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{y}{2}. \tag{405}$$

Тогда B_μ член в выражении (399):

$$ig'\sqrt{\frac{5}{3}}YB_\mu \tag{406}$$

указывает на то, что константу α_1 следует определить так

$$\alpha_1 = \frac{5}{3}\frac{g'^2}{4\pi} = \frac{g_1^2}{4\pi}. \tag{407}$$

Последнее выражение можно интерпретировать как предсказание слабого угла θ_W на масштабе объединения: так как $g\,\mathrm{tg}\,\theta_W = g' = \sqrt{3/5}g_1$ и $g = g_1$ при объединении, то имеем $\mathrm{tg}\,\theta_W = \sqrt{3/5}$ или

$$\sin^2\theta_W(\text{масштаб объединения}) = \frac{3}{8}. \tag{408}$$

Теперь все готово для рассмотрения бегущих констант α_i. В однопетлевом приближении уравнение ренормгруппы

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{b_i}{2\pi}\alpha_i^2, \tag{409}$$

где $t = \ln Q$, Q — «бегущий» масштаб энергий. Коэффициенты b_i определяются калибровочной группой и мультиплетами полей материи, с которыми связаны калибровочные бозоны. Для $SU(N)$ калибровочных теорий с полями материи в фундаментальном представлении

$$b_N = \frac{11}{3}N - \frac{1}{3}n_f - \frac{1}{6}n_s, \tag{410}$$

где n_f — число комплексных скаляров, связанных с калибровочными бозонами. Для $U(1)_Y$ калибровочной теории, в которой фермионы имеют заряды Y_f, а скаляры несут

заряды Y_s:

$$b_1 = -\frac{2}{3}\sum_f Y_f^2 - \frac{1}{3}\sum_s Y_s^2. \qquad (411)$$

Для исследования объединения удобно переписать (409) в виде

$$\frac{d}{dt}(\alpha_i^{-1}) = \frac{b_i}{2\pi}. \qquad (412)$$

Это уравнение интегрируется и дает

$$\alpha_i^{-1}(Q) = \alpha_i^{-1}(Q_0) + \frac{b_i}{2\pi}\ln(Q/Q_0), \qquad (413)$$

где Q_0 — некоторый начальный энергетический масштаб. Как видно, величины, обратные константам связи, линейно зависят от $\ln Q$. Q_0 обычно выбирают вблизи m_Z, где все константы измеряются достаточно хорошо. Гипотеза объединения состоит в том, что на некотором масштабе $Q_U = m_U$ все константы становятся одинаковыми:

$$\alpha_1(m_U) = \alpha_2(m_U) = \alpha_3(m_U) \equiv \alpha_U. \qquad (414)$$

Это означает, что три уравнения (413) имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_U^{-1} &= \alpha_3^{-1}(m_Z) + \frac{b_3}{2\pi}\ln\left(\frac{m_U}{m_Z}\right), \\ \alpha_U^{-1} &= \alpha_2^{-1}(m_Z) + \frac{b_2}{2\pi}\ln\left(\frac{m_U}{m_Z}\right), \\ \alpha_U^{-1} &= \alpha_1^{-1}(m_Z) + \frac{b_1}{2\pi}\ln\left(\frac{m_U}{m_Z}\right). \end{aligned} \qquad (415)$$

Исключая из этих уравнений α_U и $\ln(m_U/m_Z)$, получаем условие, связывающее константы $\alpha_i^{-1}(m_Z)$ и вычисляемые значения b_i:

$$\frac{\alpha_3^{-1}(m_Z) - \alpha_2^{-1}(m_Z)}{\alpha_2^{-1}(m_Z) - \alpha_1^{-1}(m_Z)} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2}. \qquad (416)$$

Проверка этого соотношения — наиболее простой способ количественного исследования объединения. Назовем левую часть (416) B_{exp}, а правую — B_{th}. Для B_{exp} используем экспериментальные данные

$$\begin{gathered} \sin^2\theta_W = 0{,}231; \\ \alpha_3(m_Z) = 0{,}119 \quad \text{или} \quad \alpha_3^{-1}(m_Z) = 8{,}40; \\ \alpha_{em}^{-1}(m_Z) = 128. \end{gathered} \qquad (417)$$

Что касается погрешностей, то они составляют $\approx 2\%$ для $\alpha_3(m_Z)$ и гораздо меньше для $\sin^2\theta_W(m_Z)$ и $\alpha_{em}(m_Z)$. Здесь α_{em} определяется как $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$, $e = g\sin^2\theta_W$. Следовательно

$$\alpha_2^{-1}(m_Z) = \alpha_{em}^{-1}(m_Z)\sin^2\theta_W(m_Z) = 29{,}6. \qquad (418)$$

Наконец,

$$g'^2 = g^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta_W, \qquad (419)$$

и следовательно

$$\alpha_1^{-1}(m_Z) = \frac{3}{5}\alpha'^{-1}(m_Z) = \frac{3}{5}\alpha_2^{-1}(m_Z)\,\mathrm{ctg}^2\,\theta_W(m_Z) = 59{,}12. \tag{420}$$

Отсюда получаем

$$B_{\mathrm{exp}} = 0{,}72. \tag{421}$$

Теперь обратимся к B_{th}. Сначала для стандартной модели. Для $SU(3)_C$ имеем

$$b_3^{\mathrm{SM}} = 11 - \frac{1}{3}\cdot 12 = 7. \tag{422}$$

Для $SU(2)_L$

$$b_2^{\mathrm{SM}} = \frac{22}{3} - 4 - \frac{1}{6} = \frac{19}{6}, \tag{423}$$

а для $U(1)_Y$

$$b_1^{\mathrm{SM}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\sum_f\left(\frac{y_f}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\sum_s\left(\frac{y_s}{2}\right)^2 = -\frac{41}{10}. \tag{424}$$

Итак, в SM правая часть (416)

$$B_{\mathrm{th}} = \frac{115}{218} = 0{,}528, \tag{425}$$

что находится в плохом согласии с (421). Какова же ситуация в MSSM? Формулу (410) следует изменить в учетом того, что в каждой $SU(N)$ калибровочные бозоны сопровождаются калибрино в регулярном представлении группы. Их вклад в b_N равен $-2N/3$. Нужно включить скалярных партнеров кварков и лептонов в фундаментальных представлениях $SU(3)$ и $SU(2)$, а также не забыть, что имеется два хиггсовских дублета, «сопровождающихся» хиггсино в фундаментальном представлении $SU(2)$. Эти изменения дают

$$\begin{aligned} b_3^{\mathrm{MSSM}} &= 7 - 2 - \frac{12}{6} = 3,\\ b_2^{\mathrm{MSSM}} &= \frac{19}{6} - \frac{4}{3} - \frac{12}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = -1. \end{aligned} \tag{426}$$

Интересно, что знак b_2 изменяется на противоположный. В b_1^{MSSM} нет вклада от калибровочных бозонов или их фермионных партнеров. Левые фермионы вносят вклад, аналогичный (424), причем каждый из них сопровождается соответствующим скаляром. Поэтому

$$b_1^{\mathrm{MSSM}}(\text{фермионы и сфермионы}) = -\frac{3}{5}\cdot 10 = -6. \tag{427}$$

Вклады хиггса и хиггсино

$$b_1^{\mathrm{MSSM}}(\text{хиггс и хиггсино}) = -\frac{3}{5}\cdot 4\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{5}. \tag{428}$$

Таким образом

$$b_1^{\mathrm{MSSM}} = -\frac{33}{5}. \tag{429}$$

Из (426) и (429) получаем

$$B_{\mathrm{th}}^{\mathrm{MSSM}} = \frac{5}{7} = 0{,}74, \tag{430}$$

что находится в хорошем согласии с (421). Для улучшения согласия нужно учесть двухпетлевые поправки, а также то, что SUSY должна быть нарушена на масштабах порядка 1 ТэВ, и отличие в массах частиц и их суперпартнеров будет давать «пороговые поправки» к (430).

Возвращаясь к соотношениям (415) и подставляя величины $\alpha_2^{-1}(m_Z)$ и $\alpha_1^{-1}(m_Z)$, получаем оценку для масштаба объединения m_U. В самом деле,

$$\ln\left(\frac{m_U}{m_Z}\right) = \frac{10\pi}{28}\left[\alpha_1^{-1}(m_Z) - \alpha_2^{-1}(m_Z)\right] \simeq 33{,}1, \tag{431}$$

отсюда

$$m_U \simeq 2{,}2 \cdot 10^{16}\ \text{ГэВ}.$$

Эта величина достаточно близка к планковской массе $M_{\text{Pl}} \simeq 1{,}2 \cdot 10^{19}$ ГэВ.

1.15. *R*-четность

Выше мы уже отмечали, что «минимальное» суперсимметричное расширение SM определяет выбор суперпотенциала (392). Однако имеются и другие калибровочно-инвариантные и перенормируемые слагаемые, которые могли бы быть включенными в суперпотенциал:

$$W_{\Delta L=1} = \lambda_l^{ijk} L_i L_j \overline{e}_k + \lambda_L^{ijk} L_i Q_j \overline{d}_k + \mu_L^i L_i H_u, \tag{432}$$

а также

$$W_{\Delta B=1} = \lambda_B^{ijk} \overline{u}_i \overline{d}_j \overline{d}_k. \tag{433}$$

Суперполя Q несут барионное число $B = 1/3$, а $\overline{u}$, $\overline{d}$ — число $B = -1/3$. Поле L несет лептонное число $L = 1$, а $\overline{L}$ $L = -1$. Следовательно, члены (432) нарушают лептонное число на единицу, а (433) — барионное число. До сих пор процессы с нарушением B и L не наблюдались. Если присутствуют обе константы λ_L и λ_B, то распад протона идет по каналам $e^+\pi^0, \mu^+\pi^0, \ldots$ Ненаблюдение таких распадов ограничивает величину констант связи, которые могут быть чрезвычайно малыми (будучи перенормируемыми, константы связи безразмерны, и нет естественного масштаба подавления, как в неперенормируемых членах). Примечательно, что в SM нет неперенормируемых членов в лагранжиане, которые бы нарушали B или L, и это замечательный «подарок» SM.

Можно было бы принять сохранение B и L как принцип, подавив (432) и (433). Но B и L, как известно, нарушаются непертурбативными электрослабыми эффектами, которыми можно пренебречь при имеющихся энергиях, но которые важны в ранней Вселенной. Поэтому ни B, ни L не могут рассматриваться в качестве фундаментальных симметрий. Вместо этого допускается альтернативная симметрия, подавляющая (432) и (433), но допускающая все другие взаимодействия в MSSM.

Эта симметрия называется R-симметрией, она мультипликативно сохраняется и определяется как

$$R = (-1)^{3B+L+2S}, \tag{434}$$

где S — спин частицы.

Очевидно, что $R = +1$ для всех обычных частиц и $R = -1$ для их суперпартнеров. Произведение $(-1)^{2S}$ равно $+1$ для частиц в любой вершине взаимодействия, тогда, в силу сохранения углового момента, очевидно, что (432) и (433) нарушают R-четность, тогда как (392) — нет. Действительно, в каждой вершине взаимодействия (392)

содержится четное число SUSY частиц, и это имеет важные феноменологические следствия:

1) легчайшая частица (LSP) абсолютно стабильна, и если она нейтральна, то может быть кандидатом на небарионную темную материю;

2) продукты распада всех SUSY частиц должны содержать нечетное число LSP;

3) в ускорительных экспериментах SUSY частицы могут рождаться только парами.

В контексте MSSM LSP не участвует в электромагнитных и сильных взаимодействиях, однако LSP могла бы «выжить» со времен Большого Взрыва. В коллайдерных экспериментах LSP уносит энергию и импульс, но непосредственно не детектируется. Так как все SUSY-частицы будут распадаться, по крайней мере, на одну LSP (плюс частицы SM), а также вследствие их парного рождения, каждое событие с рождением SUSY будет сопровождаться «потерянной» энергией $2m_{\tilde{\chi}_1^0}$, где $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ — масса LSP. На e^+e^--коллайдерах можно измерить полную энергию и импульс в событии, при этом пучки достаточно коллимированы. В этом случае недостающую энергию и импульс можно отнести на счет LSP. На адронных коллайдерах распределение партонов (кварков и глюонов) по энергии и продольному импульсу достаточно широкое, поэтому практически можно измерить недостающий поперечный импульс.

1.16. Нарушение SUSY

Очевидно, что SUSY не является точной симметрией в спектре известных частиц, поэтому необходимо обсудить вопросы нарушения SUSY. Известны два способа нарушения симметрии: а) за счет нарушающих симметрию членов в лагранжиане; б) путем спонтанного нарушения симметрии, как это происходит в электрослабой теории. Заметим, что в электрослабой теории введение массовых членов для фермионов и массивных калибровочных бозонов нарушает перенормируемость. Поэтому предпочтительнее выглядит спонтанное нарушение, сохраняющее перенормируемость теории. Спонтанное нарушение SUSY имеет, по сравнению со стандартной моделью, ряд интересных особенностей, которые мы рассмотрим.

1.16.1. Спонтанное нарушение SUSY. Основное требование на поле при спонтанном нарушении симметрии — наличие ненулевого вакуумного среднего. Иначе говоря, если поле обозначить через ϕ', то должно быть $\langle 0|\phi'|0\rangle \neq 0$. При этом поле ϕ' неинвариантно относительно обсуждаемой симметрии и может относиться к некоторому мультиплету других полей. Тогда это поле можно представить в виде

$$\phi' = i[Q, \phi(x)], \tag{435}$$

где Q — генераторы группы симметрии, ϕ — поле из мультиплета, к которому принадлежит поле ϕ'. Вакуумное среднее

$$\langle 0|\phi'|0\rangle = \langle 0|i[Q,\phi]|0\rangle = \langle 0|iQ\phi - i\phi Q|0\rangle \neq 0. \tag{436}$$

Здесь вакуумное состояние $|0\rangle$ обычно предполагается таким, что $Q|0\rangle = 0$, т. е. вакуум $|0\rangle$ инвариантен относительно преобразований, генерируемых Q. Но если мы выберем $Q|0\rangle = 0$, то нарушим (436). Следовательно, для спонтанного нарушения симметрии следует предположить, что $Q|0\rangle \neq 0$, т. е. вакуум неинвариантен относительно рассматриваемой симметрии.

В случае SUSY это означает

$$Q_a|0\rangle \neq 0, \quad Q_b^+|0\rangle \neq 0 \tag{437}$$

для SUSY генераторов. Условие (437) имеет замечательно следствие в SUSY, которое отличает его от всех других случаев спонтанного нарушения симметрии. Для SUSY алгебры

$$\{Q_a, Q_b^+\} = (\sigma^\mu)_{ab}P_\mu, \tag{438}$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned} Q_1Q_1^+ + Q_1^+Q_1 &= (\sigma^\mu)_{11}P_\mu = P_0 + P_3, \\ Q_2Q_2^+ + Q_2^+Q_2 &= (\sigma^\mu)_{22}P_\mu = P_0 - P_3. \end{aligned} \tag{439}$$

Отсюда следует

$$P_0 = \frac{1}{2}(Q_1Q_1^+ + Q_1^+Q_1 + Q_2Q_2^+ + Q_2^+Q_2) = H, \tag{440}$$

где H — гамильтониан рассматриваемой теории. Найдем вакуумное среднее

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle 0|Q_1Q_1^+|0\rangle + \langle 0|Q_1^+Q_1|0\rangle + \ldots\big) = \frac{1}{2}\big(|(Q_1^+|0\rangle)|^2 + |(Q_1|0\rangle)|^2 + \ldots\big) > 0, \tag{441}$$

где последнее строгое неравенство возникает из основного предположения (437).

Таким образом, если SUSY спонтанно нарушена, то вакуумная энергия положительна. Заметим, что это утверждение относится к глобальной SUSY (когда параметры ξ и ξ^+ не зависят от пространственно-временной координаты x). В локальном случае, существенном для супергравитации, вакуумная энергия при спонтанном нарушении обращается в ноль.

С другой стороны, при точной SUSY $Q_a|0\rangle = 0$ и $Q_b^+|0\rangle = 0$, тогда $\langle 0|H|0\rangle = 0$ — вакуумная энергия глобальной SUSY инвариантной теории равна нулю.

Для SUSY спонтанное нарушение означает, что скалярный потенциал ν должен иметь SUSY неинвариантный минимум. Какие поля ϕ' могли бы иметь ненулевые вакуумные средние в SUSY случае? Возвращаясь к (435) и считая Q SUSY генератором, рассмотрим всевозможные коммутационные соотношения, начиная с кирального супермультиплета. Коммутационные соотношения Q с этими полями определяются SUSY преобразованиями

$$\begin{aligned} \delta_\xi\phi &= i[\xi Q, \phi] = \xi\chi, \\ \delta_\xi\chi &= i[\xi Q, \chi] = -i\sigma^\mu i\sigma_2\xi^*\partial_\mu\phi + \xi F, \\ \delta_\xi F &= i[\xi Q, F] = -i\xi^+\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi. \end{aligned} \tag{442}$$

Выражения в правых частях (442) не могут иметь $\langle 0|\chi|0\rangle \neq 0$, поскольку поле χ не является скалярным, а также вакуумное среднее для спинора нарушало бы Лоренц-инвариантность. Кроме того $\langle 0|\partial_\mu\phi|0\rangle \neq 0$, так как ϕ постоянно в вакууме. Остается одна возможность

$$\langle 0|F|0\rangle \neq 0. \tag{443}$$

Это так называемы «F-тип» SUSY нарушения, связанный с ненулевым вакуумным средним аксиального поля.

Напомним, что в модели Весса–Зумино с суперпотенциалом (226) мы имеем

$$F_i = -\Big(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\Big)^+ = (M_{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y_{ijk}\phi_j\phi_k)^+ \tag{444}$$

и $V(\phi) = |F_i|^2$, который имеет очевидный минимум, когда все ϕ равны нулю. Следовательно, с такой формой W SUSY не может быть спонтанно нарушенной. Чтобы получить спонтанное нарушение SUSY, нужно добавить константу к F_i, т. е. линейный член в W. Для этого можно выбрать три киральных супермультиплета и записать W в виде

$$W = m\phi_1\phi_3 + g\phi_2(\phi_3^2 - M^2). \tag{445}$$

Тогда

$$-F_1^+ = m\phi_3, \quad -F_2^+ = g(\phi_3^2 - M^2), \quad -F_3^+ = m\phi_1 + 2\phi_2\phi_3. \tag{446}$$

Следовательно,

$$V = |F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 = m^2|\phi_3|^2 + g^2|\phi_3^2 - M^2|^2 + |m\phi_1 + 2\phi_2\phi_3|^2. \tag{447}$$

Первые два слагаемых не могут обращаться в ноль, т. е. нет полевых конфигураций, дающих $V = 0$ и сохраняющих SUSY. Вместо этого, имеется SUSY нарушающий минимум

$$\phi_1 = \phi_3 = 0, \tag{448}$$

которые интерпретируются как соответствующие вакуумные средние, а ϕ_2 не определяется (так называемое плоское направление в полевом пространстве).

Это решение дает

$$\langle 0|F_1^+|0\rangle = \langle 0|F_3^+|0\rangle = 0, \tag{449}$$

но

$$\langle 0|F_2^+|0\rangle = gM^2. \tag{450}$$

Минимальное значение V равно gM^2, которое строго положительно, как и ожидалось. Отметим, что параметр M действительно имеет размерность массы, его следует понимать как масштаб нарушения SUSY, аналогично хиггсовскому вакуумному среднему при нарушении электрослабой симметрии.

В SM или MSSM все члены в W должны быть калибровочно-инвариантными. Но в SM нет полей, которые сами по себе были бы калибровочно-инвариантными (т. е. все их калибровочные числа равны нулю). Следовательно, в SM или MSSM нет линейных членов в W, и нужно выйти за пределы этих моделей, если мы хотим осуществить именно этот механизм нарушения SUSY.

При «F-типе» SUSY нарушения имеем

$$0 \neq \langle 0|[Q, \chi(x)]|0\rangle = \sum_n \langle 0|Q|n\rangle\langle n|\chi(x)|0\rangle - \langle 0|\chi(x)|n\rangle\langle n|Q|0\rangle, \tag{451}$$

где $|n\rangle$ — полный набор состояний. Можно показать, что соотношение (451) подразумевает среди $|n\rangle$ безмассовое состояние $|\tilde{g}\rangle$, которое связано с вакуумом посредством генератора Q: $\langle 0|Q|\tilde{g}\rangle \neq 0$. Это есть не что иное, как SUSY версия теоремы Голдстоуна. В несуперсимметричном случае возникают бозоны, а в SUSY, поскольку генераторы фермионные, — это фермионы (или голдстино).

В отсутствие SUSY нарушения массивный киральный супермультиплет состоит (как и в модели Весса–Зумино) из комплексного скалярного поля (или, эквивалентно, из двух вещественных скалярных полей), вырожденного по массе с L-типа полем со спином 1/2. В рассмотренной выше модели массы трех супермультиплетов после нарушения SUSY удовлетворяют соотношению

$$(m^2 - 2g^2M^2) + (m^2 + 2g^2M^2) = 2m^2 = 2m_{\chi_S}^2, \tag{452}$$

которое является обобщением соотношения, справедливого для SUSY сохраняющегося случая $g = 0$. Действительно, существует правило сумм для квадратов («древесных») масс скалярных и киральных фермионов в теориях со спонтанным нарушением SUSY:

$$\sum m^2_{\text{вещ. скаляров}} = 2\sum m^2_{\text{киральн. фермионы}}, \tag{453}$$

где суммирование производится по секторам с одинаковыми электрическим, цветовым зарядами и барионными и лептонными числами. К сожалению, выражение (453) подразумевает, что этот тип SUSY нарушения не может быть феноменологически значимым, поскольку он требует существования (например) скалярных партнеров правых кварков d-типа с массами в несколько ГэВ, не обнаруженных экспериментально.

Нужно рассмотреть и возможное SUSY нарушение посредством членов в калибровочном супермультиплете. В этом случае преобразования

$$\begin{aligned}
\delta_\xi W^{\mu\alpha} &= i[\xi Q, W^{\mu\alpha}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^+\overline{\sigma}^\mu\lambda^\alpha + \lambda^{\alpha+}\overline{\sigma}^\mu\xi),\\
\delta_\xi \lambda^\alpha &= i[\xi Q, \lambda^\alpha] = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi F^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi D^\alpha,\\
\delta_\xi D^\alpha &= i[\xi Q, \lambda^\alpha] = \frac{i}{\sqrt{2}}\big(\xi^+\overline{\sigma}^\mu(D_\mu\lambda)^\alpha - (D_\mu\lambda)^{\alpha+}\overline{\sigma}^\mu\xi\big).
\end{aligned} \tag{454}$$

Изучение этих выражений, как и для кирального супермультиплета, показывает, что только аксиальные поля могут иметь ненулевые вакуумные средние

$$\langle 0|D^\alpha|0\rangle, \tag{455}$$

такой тип нарушения симметрии называется «D-типом».

На первый взгляд, такой механизм не может действовать в MSSM со скалярным потенциалом (388). «F-тип» SUSY нарушения возникает «за счет» первого слагаемого $|W_i|^2$, а «D-тип» — за счет второго. Однако второе слагаемое в (388) имеет SUSY сохраняющий минимум при $V = 0$, когда все поля обращаются в ноль. Но есть и другая возможность, открытая Файетом и Иллиопулосом для $U(1)$ калибровочного случая.

Аксиальное поле D из $U(1)$ калибровочного супермультиплета калибровочно инвариантно, и член в лагранжиане, пропорциональный D, SUSY инвариантен (преобразуется как полная производная). Предположим, что мы добавили член M^2D (Файета–Иллиопулоса) в лагранжиан (386). Тогда часть лагранжиана, содержащая D:

$$L_D = M^2 D + \frac{1}{2}D^2 - g_1 D\sum_i e_i\phi_i^+\phi_i, \tag{456}$$

где e_i — $U(1)$-заряды скалярных полей ϕ_i в единицах g_1 — $U(1)$-константы связи. Тогда уравнение движения для D:

$$D = -M^2 + g_1\sum_i e_i\phi_i^+\phi_i. \tag{457}$$

Соответствующий потенциал

$$V_D = \frac{1}{2}\Big(-M^2 + g_1\sum_i e_i\phi_i^+\phi_i\Big)^2. \tag{458}$$

Рассмотрим для простоты только одно скалярное поле ϕ с зарядом eg_1. Если $eg_1 > 0$, то будет SUSY-сохраняющееся решение с $V_D = 0$ при $|\langle 0|\phi|0\rangle| = (M^2/eg_1)^{1/2}$. Это хиггсовского типа нарушение $U(1)$-симметрии, при этом происходит генерация $U(1)$ калибровочного поля. С другой стороны, если $eg_1 < 0$, то $V_D = (1/2)M^4$ при $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$. Это сохраняющее $U(1)$ и нарушающее SUSY решение. В самом деле

$$L_D = -\frac{1}{2}M^4 - |eg_1|M^2\phi^+\phi + \ldots \tag{459}$$

показывает, что поле ϕ имеет массу $M(|eg_1|)^{1/2}$. Поле калибрино λ и калибровочное поле A_μ остаются безмассовыми, и λ интерпретируется как голдстино. Этот механизм нельзя использовать в неабелевом случае, так как нет калибровочно инвариантного члена типа M^2D. Нельзя ли добавить D-нарушающий член в $U(1)_y$-сектор MSSM? К сожалению, нет. Нам хотелось бы реализовать ситуацию, в которой поля (458) не приобретают вакуумные средние, так, минимум (458) «стремится» к ненулевому значению, нарушающему SUSY. В MSSM, однако, скварк и слептонные поля не имеют суперпотенциальных массовых членов, т. е. они не могут препятствовать возникновению вакуумных средних, минимизирующих (458). Но это означает нарушение любой симметрии, ассоциированной с квантовыми числами полей (например, цвета), а это неприемлемо. С общей точки зрения кажется, что SUSY нарушение могло бы происходить в секторе, который слабо связан с киральными супермультиплетами MSSM. Например, оно могло бы осуществляться: а) за счет гравитационных взаимодействий (вероятно, на планковском масштабе); б) посредством электрослабых калибровочных взаимодействий.

1.16.2. «Мягкое» нарушение SUSY. При необходимости нарушения SUSY всегда можно рассматривать параметризацию SUSY-нарушающих членов, которая присутствовала при низких энергиях, и развивать соответствующую феноменологию. Такие феноменологические SUSY слагаемые должны быть «мягкими», т. е. иметь положительную размерность массы, например, $M^2\phi^2$, $M\phi^3$, $M\chi\chi$ и т. д. Причина введения таких слагаемых (они супернормируемы) состоит в том, что они не вносят новых расходимостей. Типичная однопетлевая поправка к квадрату массы скаляра в SM:

$$\delta m^2 \sim (\lambda_{\text{скаляр.}} - g^2_{\text{фермион.}})\Lambda^2, \tag{460}$$

где Λ — ультрафиолетовое обрезание. В SUSY $\lambda_{\text{скаляр.}} = g^2_{\text{фермион.}}$ и зависимость δm^2 от Λ становится логарифмической. Предположим, с другой стороны, что безразмерные константы связи $\lambda_{\text{скаляр.}}$ и $g_{\text{фермион.}}$ получают расходящиеся однопетлевые поправки, возникающие из перенормируемых (а не суперперенормируемых) SUSY-нарушающих взаимодействий. Тогда $\lambda_{\text{скаляр.}}$ и $g_{\text{фермион.}}$ отличались бы членом порядка $\ln\Lambda$, а величина (460) стала бы очень большой.

В общем, «мягкие» нарушающие SUSY слагаемые обеспечивают сокращение квадратично расходящихся радиационных поправок к квадрату массы скалярного поля во всех порядках теории возмущений. Это означает, что поправки δm^2 ведут себя как $m^2_{\text{soft}}\ln(\Lambda/m_{\text{soft}})$, где m_{soft} — типичный массовый масштаб «мягкого» нарушения SUSY. Природа этого массового масштаба остается неясной.

Формы «мягко» нарушающих SUSY членов довольно ограничены:

а) массы калибрино для каждой калибровочной группы

$$-\frac{1}{2}(M_3\tilde{g}^\alpha\tilde{g}^\alpha + M_2\tilde{W}^\alpha\tilde{W}^\alpha + M_1\tilde{B}\tilde{B} + \text{э.с.}), \tag{461}$$

где в первом (глюинном) слагаемом α изменяется от 1 до 8, во втором (вино) α изменяется от 1 до 3, точки обозначают Лоренц-инвариантное спинорное произведение.

б) Квадраты скварковых масс

$$m^2_{\tilde{Q}_{ij}} \tilde{Q}_i^+ \tilde{Q}_j - m^2_{\tilde{\bar{u}}_{ij}} \tilde{\bar{u}}_i^+ \tilde{\bar{u}}_j - m^2_{\tilde{\bar{d}}_{ij}} \tilde{\bar{d}}_i \tilde{\bar{d}}_j, \tag{462}$$

где i и j нумеруют семейства.

в) Квадраты слептонных масс

$$-m^2_{\tilde{L}_{ij}} \tilde{L}_i^+ \tilde{L}_j - m^2_{\tilde{\bar{e}}_j} \tilde{\bar{e}}_i^+ \tilde{\bar{e}}_j. \tag{463}$$

г) Квадраты хиггсовских масс

$$-m^2_{H_u} H_u^+ H_u - m^2_{H_d} H_d^+ H_d - (bH_u H_d + \text{э.с.}), \tag{464}$$

где $SU(2)_L$-инвариантное точечное произведение

$$H_u^+ H_u = |H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 \tag{465}$$

и аналогично для $H_d^+ H_d$, однако

$$H_u H_d = H_u^+ H_d^- - H_u H_d^0. \tag{466}$$

д) Тройная скалярная связь

$$-a_u^{ij} \tilde{\bar{u}}_i \tilde{Q}_j H_u + a_d^{ij} \tilde{\bar{d}}_i \tilde{Q}_j H_d + a_l^{ij} \tilde{\bar{l}}_i L_j H_d + \text{э.с.} \tag{467}$$

Пять матриц а)–д) квадратов масс комплексные, но эрмитовы, поэтому лагранжиан вещественен.

Важно отметить, что слагаемые (461)–(466) имеют отношение к калибровочным симметриям SM. Член с «b» в (464), а также тройная скалярная связь в (467) имеют ту же форму, что и «μ» и юкавская связь в калибровочно-инвариантном суперпотенциале (392), но только для скалярных полей. В частности, калибровочно-инвариантные слагаемые возможны для всех суперпартнеров, и это отличается от ситуации с известными частицами стандартной модели. Для примера рассмотрим выражение (461). Глюино, подобно их суперпартнеру (калибровочному бозону), принадлежат регулярному представлению калибровочной группы. Так, для $SU(2)$ вино принадлежат $t = 1$ (векторному) представлению. В этом представлении матрицы преобразований могут быть выбраны вещественными. Это значит, что они ортогональны, подобно матрицам вращений в 3-мерном пространстве. Величины типа $\tilde{W}\tilde{W}$ инвариантны относительно $SU(2)$-преобразований, включая локальные, поскольку не включают производных. Аналогичная ситуация для глюино и бино. Возвращаясь к (462) и (463), такие массовые члены для скварков и слептонов допустимы, если i и j относятся к семейству и m^2_{ij} — эрмитовы матрицы в пространстве семейств. Действительно, при калибровочном преобразовании $\phi_i \to U\phi_i$, $\phi_j \to U\phi_j$, где $U^+U = 1$ и ϕ обозначает скварки и слептоны сортового мультиплета.

Хиггсовский массовый член типа $-m^2_{H_u} H_u^+ H_u$ присутствует уже в SM, и мы должны его включить в такой SUSY нарушающий член, чтобы обеспечить спонтанное нарушение электрослабой симметрии.

Можно сказать, что массовые члены, которые нарушают SUSY, но сохраняют электрослабую симметрию, вполне определены даже для до сих пор ненаблюдаемых частиц MSSM. Однако подобные массовые члены для известных частиц SM нарушали бы электрослабую симметрию, что совершенно неприемлемо: массы известных

частиц SM должны возникать за счет спонтанного нарушения электрослабой симметрии. С точки зрения MSSM, известные частицы — «легкие», и это ассоциируется с масштабом нарушения электрослабой симметрии. Массы же неоткрытых частиц, с другой стороны, связаны с нарушением SUSY, масштаб этого нарушения значительно выше. Очевидно, что невозможно электрослабое нарушение без нарушения SUSY.

К сожалению, хотя слагаемые (461)–(467) и ограничены по форме, существует слишком много возможностей, а следовательно, и много параметров. Однако экспериментальные данные во многих случаях позволяют ограничить пространство параметров. Так, большинство новых параметров допускают нейтральные токи с изменением аромата (FCNC) или новые источники CP нарушения на уровне, уже исключенном экспериментально.

Например, матрица $m^2_{\tilde{e}}$ в (463) имеет неподавленный недиагональный член

$$(m^2_{\tilde{e}})_{e\mu}\tilde{\bar{e}}^+_L\tilde{\bar{\mu}}_L, \tag{468}$$

описывающий переход $\mu \to e$. Петлевая диаграмма процесса $\mu \to e + \gamma$ вычисляется так: сначала μ виртуально распадается на $\tilde{\bar{\mu}}_L +$ бино (из-за (386)), затем $\tilde{\bar{\mu}}_L$ переходит (из-за (468)) в $\tilde{\bar{e}}_L$, а потом $\tilde{\bar{e}}_L$ рекомбинирует с бино в электрон с испусканием фотона. Верхний предел на бренчинг составляет $\simeq 1{,}2 \cdot 10^{-11}$, а наша петлевая амплитуда будет давать на много порядков больше, даже для масс слептона на уровне ТэВ-а. Аналогично, матрица скваркового квадрата масс ограничена как смешиванием в системах $K^0 - \overline{K}^0$, $D^0 - \overline{D}^0$, $B^0 - \overline{B}^0$, так и распадом $b \to s\gamma$.

Существование этих ограничений на параметры нарушения SUSY на масштабе SM предполагает, что, независимо от конкретного механизма нарушения, «опасные» недиагональные члены должны быть подавлены.

Это достигается, например, в минимальной супергравитации (mSUGRA), в которой параметры (461)–(467) на планковских масштабах принимают следующие значения:

$$\begin{gathered} M_3 = M_2 = M_1 = m_{1/2}; \\ m^2_{\tilde{Q}} = m^2_{\tilde{\bar{u}}} = m^2_{\tilde{\bar{d}}} = m^2_{\tilde{L}} = m^2_{\tilde{\bar{l}}} = m^2_0 \cdot 1, \end{gathered} \tag{469}$$

где «1» — единичная матрица в пространстве семейств. Кроме того

$$m^2_{H_u} = m^2_{H_d} = m^2_0 \tag{470}$$

и

$$a_u = A_0 y_u, \quad a_d = A_0 y_d, \quad a_e = A_0 y_e, \tag{471}$$

где y — матрицы из (392).

Соотношение (469) показывает, что на планковских масштабах все скварки и слептоны вырождены по массе и имеют одинаковые электрослабые квантовые числа. Все смешивания (за исключением тройных скалярных взаимодействий) можно исключить.

1.16.3. Ренорм-групповая эволюция параметров в мягко нарушенной MSSM. Успешное применение методов ренорм-группы (RG) к объединению калибровочных взаимодействий в MSSM вдохновляет на RG-анализ и других констант связи MSSM, а также параметров (469)–(471).

Начнем опять с простейшего примера — массового параметра калибрино M_i $(i = 1, 2, 3)$, чья эволюция определяется уравнением

$$\frac{dM_i}{dt} = -\frac{b_i}{2\pi}\alpha_i M_i. \tag{472}$$

Из (409) и (472) получаем

$$\frac{1}{\alpha_i}\frac{dM_i}{dt} - M_i\frac{1}{\alpha_i^2}\frac{d\alpha_i}{dt} = 0. \tag{473}$$

Следовательно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M_i}{\alpha_i}\right) = 0. \tag{474}$$

Таким образом, три отношения M_i/α_i в однопетлевом приближении не зависят от RG-масштаба t. В mSUGRA моделях можно записать

$$\frac{M_i(Q)}{\alpha_i(Q)} = \frac{m_{1/2}}{\alpha_i(m_p)}. \tag{475}$$

И поскольку все α_i уже объединены на масштабе, меньшем m_p, то

$$\frac{M_1(Q)}{\alpha_1(Q)} = \frac{M_2(Q)}{\alpha_2(Q)} = \frac{M_3(Q)}{\alpha_3(Q)} \tag{476}$$

на любом масштабе Q. Применяя (476) при $Q = m_Z$, находим

$$M_1(m_Z) = \frac{\alpha_1(m_Z)}{\alpha_2(m_Z)}M_2(m_Z) = \frac{5}{3}\,\mathrm{tg}^2\,\theta_W(m_Z) \simeq \frac{M_2(m_Z)}{2} \tag{477}$$

и

$$M_3(m_Z) = \frac{\alpha_3(m_Z)}{\alpha_2(m_Z)}M_2(m_Z) = \frac{\sin^2\theta_W(m_Z)}{\alpha_{em}(m_Z)}\alpha_3(m_Z)M_2(m_Z) \simeq 3{,}5M_2(m_Z), \tag{478}$$

где использованы соотношения (417).

Из (477) и (478) имеем

$$M_3(m_Z) : M_2(m_Z) : M_1(m_Z) = 7 : 2 : 1. \tag{479}$$

Из этого соотношения следует, что глюино должно быть тяжелее других состояний, ассоциированных с электрослабым сектором. К этим состояниям относится нейтралино, которое является смесью нейтральных хиггсино $(\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0)$ и нейтральных калибрино $(\tilde{B}, \tilde{W}_0)$ и чарджино (chargino) — смесь заряженных хиггсино $(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_d^-)$ и вино $(\tilde{W}^+, \tilde{W}^-)$.

Другой пример — массы скалярных частиц. В этом случае вклад калибрино в правую часть уравнения для dm^2/dt отрицательный, и это приводит к увеличению массы при понижении Q. С другой стороны, вклады от фермионных петель имеют противоположный знак, т. е. усиливается тенденция к уменьшению массы на малых масштабах. При этом доминантный вклад обеспечивает петля с t-кварком, так как y_t гораздо больше других юкавских констант. Если ограничиться вкладом только t-кварка, то уравнения эволюции

$$\begin{aligned}
\frac{dm^2_{H_u}}{dt} &= \left[\frac{3X_t}{4\pi} - 6\alpha_2M_2^2 - \frac{6}{5}\alpha_1M_1^2\right]\Big/4\pi,\\
\frac{dm^2_{\tilde{Q}_3}}{dt} &= \left[\frac{X_t}{4\pi} - \frac{32}{3}\alpha_3M_3^2 - 6\alpha_2M_2^2 - \frac{2}{15}\alpha_1M_1^2\right]\Big/4\pi,\\
\frac{dm^2_{\tilde{\bar{u}}_3}}{dt} &= \left[\frac{2X_t}{4\pi} - \frac{32}{3}\alpha_3M_3^2 - \frac{32}{15}\alpha_1M_1^2\right]\Big/4\pi,
\end{aligned} \tag{480}$$

где

$$X_t = 2|y_t|^2[m_{H_u}^2 + m_{\tilde{Q}_3}^2 + m_{\tilde{\bar{u}}_3}^2 + A_0^2] \tag{481}$$

и использовано соотношение (471). Соответствующее уравнение для $m_{H_d}^2$, в которое t-кварковая петля не дает вклада

$$\frac{dm_{H_d}^2}{dt} = \left[-6\alpha_2 M_2^2 - \frac{6}{5}\alpha_1 M_1^2\right] \Big/ 4\pi. \tag{482}$$

Поскольку величина X_t положительна, то соответствующий параметр квадрата масс уменьшается на малых масштабах. Из (480) видно, что три массы $m_{H_u}^2$:

а) уменьшаются на фактор три;

б) возрастают из-за отсутствия вклада глюино.

С другой стороны, $m_{H_d}^2$ всегда растет при низких масштабах энергий. Возникает возможность изменения $m_{H_u}^2$ от положительного значения при $Q_0 \sim 10^{16}$ ГэВ до отрицательного значения на электрослабом масштабе, при этом все другие параметры квадратов масс скалярных частиц остаются положительными. Благодаря большой массе t-кварка, это действительно может происходить. Такая отрицательная величина (масс)^2 стремится дестабилизировать точку $H_u^0 = 0$, обеспечивая нарушение электрослабой симметрии.

Параметр y_t в (480), как и другие параметры в (392), тоже изменяется. Исследование RG-поведения этих параметров приводит к новым интересным результатам. Если для простоты предположить, что существенны только связи третьего семейства и игнорировать вклады α_1 и α_2, то RG-уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{dy_t}{dt} &= \frac{y_t}{4\pi}\left[\frac{(6y_t^2 + y_b^2)}{4\pi} - \frac{16}{3}\alpha_S\right];\\
\frac{dy_b}{dt} &= \frac{y_b}{4\pi}\left[\frac{(6y_b^2 + y_t^2 + y_\tau^2)}{4\pi} - \frac{16}{3}\alpha_S\right];\\
\frac{dy_\tau}{dt} &= \frac{y_\tau}{16\pi^2}[4y_\tau^2 + 3y_b^2].
\end{aligned} \tag{483}$$

Как и в уравнениях (480), юкавские константы связи и калибровочная связь α_S, входят в правую часть (483) с противоположными знаками. При этом юкавские связи увеличивают y на больших расстояниях, а α_S стремится уменьшить y_t и y_b. Поэтому вполне допустимо, что, начиная с $y_t > y_b > y_\tau$ при низких масштабах, эти три y объединятся на масштабе m_U. Есть основания считать, что условие $y_b(m_U) = y_\tau(m_U)$, естественно возникающее в моделях большого объединения, приводит к «хорошей» низкоэнергетической феноменологии. Дальнейшее объединение с $y_t(m_U)$ должно быть согласовано с известной массой t-кварка при низких энергиях. Для того чтобы это проследить, вернемся к выражению

$$m_{u_{ij}} = v_u y_u^{ij} \tag{484}$$

и подобным ему выражениям для $m_{d_{ij}}$ и $m_{e_{ij}}$, которые в диагональном по массе базисе дают

$$y_t = \frac{m_t}{v_u}, \quad y_b = \frac{m_b}{v_d}, \quad y_\tau = \frac{m_\tau}{v_d}, \tag{485}$$

где v_d — вакуумное среднее поля H_d^0. Очевидно, что выполнимость соотношения $y_t \simeq y_b$ будет зависеть от дополнительного параметра v_u/v_d (обычно обозначаемого как $\operatorname{tg}\beta$). Объединение юкавских взаимодействий происходит при m_U, если $\operatorname{tg}\beta \simeq m_t/m_b$.

1.17. Хиггсовский сектор и нарушение электрослабой симметрии в MSSM

1.17.1. Скалярный потенциал и условия для электрослабого нарушения симметрии. Сначала найдем потенциал скалярных хиггсовских полей в MSSM. В этой модели имеется два комплексных хиггсовских $SU(2)_L$ дублета, которые обозначаются как $H_u = (H_u^+, H_u^0)$ (несет слабый гиперзаряд $y = 1$) и $H_d = (H_d^0, H_d^-)$ с $y = -1$. Классический (древесный) потенциал для этих полей состоит из нескольких слагаемых. Во-первых, квадратичные члены за счет SUSY-инвариантного (F-член) вклада (397), включающего параметр μ, а также SUSY-нарушающие члены (464):

$$m_{H_u}^2(|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2) + m_{H_d}^2(|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2), \tag{486}$$

где произвольные параметры $m_{H_u}^2$ и $m_{H_d}^2$ могут иметь любой знак.

Кроме того, имеется и вклад

$$b(H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + \text{э.с.} \tag{487}$$

К этим слагаемым нужно добавить четверной SUSY инвариантный «D-член» из (461) в форме (хиггс)^2 · (хиггс)^2, который следует определить для электрослабого сектора MSSM. В нашем распоряжении две группы G: $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$ с константами связи g и $g'/2$. Для группы $T^\alpha = \tau^\alpha/2$, и нужно найти

$$\sum_\alpha \Big(H_u^+\Big(\frac{\tau^\alpha}{2}\Big)H_u + H_d^+\Big(\frac{\tau^\alpha}{2}\Big)H_d\Big)\Big(H_u^+\Big(\frac{\tau^\alpha}{2}\Big)H_u + H_d^+\Big(\frac{\tau^\alpha}{2}\Big)H_d\Big) =$$
$$= \Big(H_u^+\Big(\frac{\vec\tau}{2}\Big)H_u\Big)\cdot\Big(H_u^+\Big(\frac{\vec\tau}{2}\Big)H_u\Big) + \Big(H_d^+\Big(\frac{\vec\tau}{2}\Big)H_d\Big)\cdot\Big(H_d^+\Big(\frac{\vec\tau}{2}\Big)H_d\Big) +$$
$$+ 2\Big(H_u^+\Big(\frac{\vec\tau}{2}\Big)H_u\Big)\Big(H_d^+\Big(\frac{\vec\tau}{2}\Big)H_d\Big). \tag{488}$$

Если записать

$$H_u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad H_d = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \tag{489}$$

и вычислить матричные и точечные произведения в (488), то получаем

$$\frac{1}{4}\big\{\big[(|a|^2 + |b|^2) - (|c|^2 + |d|^2)\big]^2 + 4(ac^* + bd^*)(a^*c + b^*d)\big\}. \tag{490}$$

Поэтому вклад от $SU(2)_L$ — это выражение (490), помноженное на $g^2/2$. Вклад же группы $U(1)_Y$:

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{g'}{2}\Big)^2[H_u^+ H_u - H_d^+ H_d]^2 = \frac{g'^2}{8}\big[(|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2)\big]. \tag{491}$$

Переписывая (490) и (491) в обозначениях полей и включив четверные слагаемые, получаем полный потенциал скалярных полей в MSSM:

$$V = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2) + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)(|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2) +$$
$$+ \big[b(H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + \text{э.с.}\big] + \frac{(g^2 + g'^2)}{8}(|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2)^2 +$$
$$+ \frac{g^2}{2}|H_u^+ H_d^{0+} + H_u^0 H_d^{-+}|^2. \tag{492}$$

Теперь нужно исследовать, имеет ли и при каких условиях этот потенциал минимум (подобно хиггсовскому потенциалу SM). Для упрощения можно попытаться использовать калибровочную симметрию. Как и в SM, можно $SU(2)_L$-преобразованием вакуумное среднее одной из компонент H_u или H_d обратить в ноль. Выберем $H_u^+ = 0$ в минимуме потенциала V. Условия $H_u^+ = 0$ и $\partial V/\partial H_u^+ = 0$ подразумевают, что минимум потенциала достигается либо при

$$H_d^- = 0, \tag{493}$$

либо при

$$b + \frac{g^2}{2} H_d^{0+} H_u^{0+} = 0. \tag{494}$$

Условие (494) означает, что «b-член» в выражении (492):

$$g^2 |H_u^0|^2 |H_d^0|^2, \tag{495}$$

положительный, и это неблагоприятно с точки зрения нарушения симметрии. Как мы увидим, условие (493) приводит к отрицательному b-вкладу. Если принять альтернативу (493), то ни H_u^+, ни H_d^- не приобретают вакуумного среднего, а это означает, что электромагнетизм спонтанно не нарушается. Сконцентрируемся на потенциале для нейтральных полей

$$V_n = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)|H_u^0|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)|H_d^0|^2 - (bH_u^0 H_d^0 + \text{э.с.}) + \\ + \frac{(g^2 + g'^2)}{8}(|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2. \tag{496}$$

Здесь уместно напомнить, что коэффициент при четвертом слагаемом определяется электрослабой связью $(g^2 + g'^2)/8 \simeq 0{,}065$. В это отношении существенная разница с SM, где коэффициент $\lambda/4$ в (4) — свободный параметр. В SM масса хиггсовского бозона пропорциональна $\sqrt{\lambda}$; при заданном вакуумном среднем это означает, что в MSSM хиггс должен быть сравнительно легким. Как будет видно, это действительно так.

Рассмотрим теперь b-член в (496), он единственный зависящий от фаз полей. Без потери общности b можно выбрать вещественным и положительным и возможную фазу b «поглотить» в относительную фазу H_u^0 и H_d^0. В минимуме V_n произведение $H_u^0 H_d^0$ должно быть вещественным и положительным, а это означает, что вакуумные средние полей H_u^0 и H_d^0 имеют равные и противоположные фазы. Так как эти поля имеют равные и противоположные гиперзаряды, можно $U(1)_Y$-преобразованием обратить фазы в ноль.

Итак, все вакуумные средние и связи можно выбрать вещественными, т. е. CP-симметрия не нарушается спонтанно для 2-хиггсовского потенциала MSSM, как и для 1-хиггсовского потенциала SM. Это утверждение справедливо на древесном уровне, CP-симметрия может быть нарушена радиационными поправками.

Скалярный потенциал принимает уже более «обозримый» вид:

$$V_n = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)x^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)y^2 - 2bxy + \frac{(g^2 + g'^2)}{8}(x^2 - y^2), \tag{497}$$

где $x = |H_u^0|$, $y = |H_d^0|$. Потенциал зависит от трех параметров: $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$, $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$ и b. Нам нужно определить условия стабильности минимума V_n и при ненулевых значениях x и y. Поначалу заметим, что вдоль (плоского) направления $x = y$

потенциал не ограничен снизу (нет минимума) до тех пор, пока

$$2|\mu|^2 + m^2_{H_u} + m^2_{H_d} > 2b > 0. \tag{498}$$

Следовательно, $(|\mu|^2 + m^2_{H_u})$ и $(|\mu|^2 + m^2_{H_d})$ не могут быть оба отрицательными, т. е. точка $x = y = 0$ не может быть минимумом потенциала V_n. Если же $(|\mu|^2 + m^2_{H_u})$ и $(|\mu|^2 + m^2_{H_d})$ оба положительны, то «начало» координат является минимумом до тех пор, пока

$$(|\mu|^2 + m^2_{H_u})(|\mu|^2 + m^2_{H_d}) < b^2. \tag{499}$$

Это есть условие седловой точки в «начале координат».

Что можно сказать о $m^2_{H_u}$ и $m^2_{H_d}$? Соотношения (498) и (499) не удовлетворяются, если $m^2_{H_u} = m^2_{H_d}$. Это условие справедливо для масштаба $\sim 10^{16}$ ГэВ. Однако параметр $m^2_{H_u}$ является единственным, чья RG-эволюция может привести к отрицательным значениям на электрослабом масштабе. Ясно, что отрицательное значение $m^2_{H_u}$ способствует удовлетворению условия (499), но не является ни необходимым, ни достаточным ($|\mu|$ может быть очень большим или b очень малым).

Имея условия (498) и (499), требуемые для существования у полей ненулевых вакуумных средних, скажем, v_u и v_d, запишем уравнения, определяющие эти вакуумные средние. Для этого используем условия стационарности:

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} = \frac{\partial V_n}{\partial y} = 0. \tag{500}$$

Выполняя дифференцирование и полагая $x = v_u$, $y = v_d$, получаем

$$\begin{aligned}(|\mu|^2 + m^2_{H_u})v_u &= bv_d + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_d^2 - v_u^2),\\ (|\mu|^2 + m^2_{H_d})v_d &= bv_u - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_d^2 - v_u^2).\end{aligned} \tag{501}$$

Одна комбинация из v_u и v_d фиксируется экспериментом, так как она, подобно SM, определяется массами W- и Z-бозонов. Соответствующие члены в электрослабом секторе

$$(D_\mu H_u)^+(D^\mu H_u) + (D_\mu H_d)^+(D^\mu H_d), \tag{502}$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\Big(\frac{\vec{\tau}}{2}\Big)\vec{W}_\mu + i\Big(\frac{g'}{2}\Big)yB_\mu. \tag{503}$$

Массовые члены для векторных частиц возникают при подстановке вакуумных средних H_u и H_d и определения

$$Z^\mu = \frac{(-g'B^\mu + gW_3^\mu)}{(g^2 + g'^2)^{1/2}}. \tag{504}$$

Тогда

$$\begin{aligned}m_Z^2 &= \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)(v_u^2 + v_d^2),\\ m_W^2 &= \frac{1}{2}g^2(v_u^2 + v_d^2).\end{aligned} \tag{505}$$

Следовательно

$$(v_u^2 + v_d^2)^{1/2} = \Big(\frac{2m_W^2}{g^2}\Big)^{1/2} = 174 \text{ ГэВ}. \tag{506}$$

Уравнения (501) теперь перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
(|\mu|^2 + m_{H_u}^2) &= b\,\mathrm{ctg}\,\beta + \frac{m_Z^2}{2}\cos 2\beta, \\
(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) &= b\,\mathrm{tg}\,\beta - \frac{m_Z^2}{2}\cos 2\beta,
\end{aligned}
\tag{507}
$$

где

$$
\mathrm{tg}\,\beta = \frac{v_u}{v_d}. \tag{508}
$$

Легко проверить, что (507) удовлетворяет условиям (498) и (499). Можно использовать (507) для исключения параметров $|\mu|$ и b в пользу $\mathrm{tg}\,\beta$, но фаза μ при этом остается неопределенной. Так как v_u и v_d вещественны и положительны, угол β изменяется от 0 до $\pi/2$. Теперь все готово для вычисления массового спектра.

1.17.2. Массы скалярных хиггсов MSSM на древесном уровне. В SM в хиггсовском дублете содержится четыре вещественных скалярных степени свободы (5). После нарушения электрослабой симметрии, три из них становятся продольными модами массивных векторных бозонов $W^{\pm}$ и Z^0, а четвертая проявляет себя как нейтральный хиггс бозон, масса которого квадратично расходится вне SUSY нарушающего минимума. В MSSM имеется восемь вещественных скалярных степеней свободы. Три из них — безмассовые, как и в SM. Массы оставшихся пяти вычисляются путем разложения потенциала вблизи минимума до членов второго порядка по полям. Трудность в том, что квадратичные расходимости недиагональны по полям, поэтому для извлечения физических масс нужно провести процедуру диагонализации. Чтобы проиллюстрировать эту процедуру, выберем лагранжиан

$$
L_{12} = \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - V(\phi_1, \phi_2), \tag{509}
$$

причем $V(\phi_1, \phi_2)$ имеет минимум при $\phi_1 = v_1$, $\phi_2 = v_2$. Разложим V возле минимума, оставляя только квадратичные слагаемые и опуская несущественные константы

$$
\begin{aligned}
L_{12,\mathrm{quad}} = \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1^2}(\phi_1 - v_1)^2 - \\
- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2^2}(\phi_2 - v_2)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}(\phi_1 - v_1)(\phi_2 - v_2),
\end{aligned}
\tag{510}
$$

причем производные вычисляются в минимуме (v_1, v_2). Определяя

$$
\tilde{\phi}_1 = \sqrt{2}(\phi_1 - v_1), \quad \tilde{\phi}_2 = \sqrt{2}(\phi_2 - v_2) \tag{511}
$$

выражение (510) перепишем в виде

$$
L_{12,\mathrm{quad}} = \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi}_1 \partial^\mu \tilde{\phi}_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{\phi}_2 \partial^\mu \tilde{\phi}_2 - \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2) M^{sq} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}, \tag{512}
$$

где (масс)^2-матрица

$$
M^{sq} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} V_{11}'' & V_{12}'' \\ V_{21}'' & V_{22}'' \end{pmatrix} \tag{513}
$$

и

$$
V_{ij}'' = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(v_1, v_2). \tag{514}
$$

Матрица M^{sq} вещественна и симметрична, так что может быть диагонализована путем ортогонального преобразования

$$\begin{pmatrix}\phi_+\\ \phi_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\phi_1\\ \tilde\phi_2\end{pmatrix}. \tag{515}$$

Если собственные значения M^{sq} обозначить через m_+^2 и $m_-{}^2$, то в новом базисе лагранжиан (512) запишется в виде

$$L_{12,quad} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_+\partial^\mu\phi_+ + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_-\partial^\mu\phi_- - \frac{1}{2}(\phi_+)^2 m_+^2 - \frac{1}{2}(\phi_-)^2 m_-{}^2. \tag{516}$$

Отсюда видно, что m_+^2 и $m_-{}^2$ — квадраты масс мод, описываемых полями ϕ_+ и ϕ_-. Применим этот подход сначала к паре полей $(\operatorname{Im} H_u^0, \operatorname{Im} H_d^0)$. Часть скалярного потенциала, содержащая эту пару, имеет вид

$$V_A = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(\operatorname{Im} H_u^0)^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)(\operatorname{Im} H_d^0)^2 + 2b(\operatorname{Im} H_u^0)(\operatorname{Im} H_d^0) + \\ + \frac{(g^2 + g'^2)}{8}\left[(\operatorname{Re} H_u^0)^2 + (\operatorname{Im} H_u^0)^2 - (\operatorname{Re} H_d^0)^2 - (\operatorname{Im} H_d^0)^2\right]^2. \tag{517}$$

Вычисляя вторые производные в точке минимума, найдем элементы (масс)^2-матрицы

$$M_{11}^{sq} = |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{(g^2 + g'^2)}{4}(v_u^2 - v_d^2) = b\operatorname{ctg}\beta, \tag{518}$$

где использовано (501). Аналогично

$$M_{12}^{sq} = b, \quad M_{22}^{sq} = b\operatorname{tg}\beta. \tag{519}$$

Собственные значения M^{sq} легко найти

$$m_+^2 = 0, \quad m_-^2 = \frac{2b}{\sin 2\beta}. \tag{520}$$

При этом собственная мода, соответствующая безмассовому состоянию

$$\sqrt{2}\left[\sin\beta(\operatorname{Im} H_u^0) - \cos\beta(\operatorname{Im} H_d^0)\right], \tag{521}$$

и эта мода становится продольным состоянием Z^0. Ортогональная комбинация

$$\sqrt{2}\left[\cos\beta(\operatorname{Im} H_u^0) + \sin\beta(\operatorname{Im} H_d^0)\right] \tag{522}$$

— поле скалярной частицы A^0 с массой

$$m_{A^0} = \left(\frac{2b}{\sin 2\beta}\right)^{1/2}. \tag{523}$$

При описании пространства параметров хиггсовского сектора MSSM пара параметров $(b, \operatorname{tg}\beta)$ заменяется парой $(m_{A^0}, \operatorname{tg}\beta)$.

Теперь рассмотрим заряженную пару (H_u^+, H_d^{-+}). В этом случае существенная часть лагранжиана

$$L_{ch,\text{quad}} = (\partial_\mu H_u^+)^+(\partial^\mu H_u^+) + (\partial_\mu H_d^-)^+(\partial^\mu H_d^-) - \frac{\partial^2 V}{\partial H_u^{++}\partial H_u^+}H_u^{++}H_u^+ - \\ - \frac{\partial^2 V}{\partial H_d^{-+}\partial H_d^-}H_d^{-+}H_d^- - \frac{\partial^2 V}{\partial H_u^+\partial H_d^-}H_u^+H_d^- - \frac{\partial^2 V}{\partial H_u^{++}\partial H_d^{-+}}H_u^{++}H_d^{-+}, \tag{524}$$

где использовано выражение (492) для V и производные вычислены при $H_u^0 = v_u$, $H_d^0 = v_d$, $H_u^+ = H_d^- = 0$. Запишем слагаемые потенциала в виде

$$(H_u^{++} H_d^-) M_{ch}^{sq} \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_d^{-+} \end{pmatrix}, \tag{525}$$

где

$$M_{ch}^{sq} = \begin{pmatrix} M_{++}^{sq} & M_{+-}^{sq} \\ M_{-+}^{sq} & M_{--}^{sq} \end{pmatrix} \tag{526}$$

с $M_{++}^{sq} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial H_u^{++} \partial H_u^+}$ и т. д.

Выполняя дифференцирование и вычисляя в минимуме потенциала, получаем

$$M_{ch}^{sq} = \begin{pmatrix} b \operatorname{ctg}\beta + \dfrac{g^2}{2} v_d^2 & b + \dfrac{g^2}{2} v_u v_d \\ b + \dfrac{g^2}{2} v_u v_d & b \operatorname{tg}\beta + \dfrac{g^2}{2} v_u^2 \end{pmatrix}. \tag{527}$$

Эта матрица имеет собственные значения, равные 0 и $m_W^2 + m_{A^0}^2$. Безмассовое состояние соответствует суперпозиции

$$G^+ = \sin\beta H_u^+ - \cos\beta H_d^{-+} \tag{528}$$

и обеспечивает продольной модой W^+-бозон. Имеется и состояние $G^- = (G^+)^+$, которое переходит в W^-. Массивное ортогональное состояние

$$H^+ = \cos\beta H_u^+ + \sin\beta H_d^{-+} \tag{529}$$

имеет массу $m_{H^+} = (m_W^2 + m_{A^0}^2)^{1/2}$ и состояние $H^- = (H^+)^+$. Заметим, что после диагонализации выражение (524) принимает вид

$$(\partial_\mu G^+)^+ (\partial^\mu G^+) + (\partial_\mu H^+)^+ (\partial^\mu H^+) - m_{H^+}^2 H^{++} H^+. \tag{530}$$

При этом уравнение движения для H^+ показывает, что $m_{H^+}^2$ действительно физический квадрат массы.

Наконец, рассмотрим связанную пару $(\operatorname{Re} H_u^0 - v_u, \operatorname{Re} H_d^0 - v_d)$, подобную паре $(\operatorname{Im} H_u^0, \operatorname{Im} H_d^0)$. Матрица квадрата массы

$$M_{h,H}^{sq} = \begin{pmatrix} b \operatorname{ctg}\beta + m_Z^2 \sin^2\beta & -b - \dfrac{1}{2} m_Z^2 \sin 2\beta \\ -b - \dfrac{1}{2} m_Z^2 \sin 2\beta & b \operatorname{tg}\beta + m_Z^2 \cos^2\beta \end{pmatrix} \tag{531}$$

с собственными значениями

$$m_{h^0}^2 = \left\{ m_{A^0}^2 + m_Z^2 - \left[(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4 m_{A^0}^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta \right]^{1/2} \right\} \tag{532}$$

и

$$m_{H^0}^2 = \frac{1}{2} \left\{ m_{A^0}^2 + m_Z^2 + \left[(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4 m_{A^0}^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta \right]^{1/2} \right\}. \tag{533}$$

Последние два соотношения содержат зависимость m_{h^0} и m_{H^0} от параметров m_{A^0} и β. Важно отметить, что массы m_{A^0}, m_{H^0}и $m_{H^\pm}$ не ограничены (они растут как $b/\sin 2\beta$), однако масса m_{h^0} имеет ограничение сверху. Действительно, запишем

$x = m^2_{A^0}$, $a = m^2_Z$, тогда

$$m^2_{h^0} = \frac{1}{2}\left\{x + a - \left[(x+a)^2 - 4ax\cos^2 2\beta\right]^{1/2}\right\}. \tag{534}$$

Легко проверить, что эта функция не имеет стационарной точки для конечных x. Далее, для малых x

$$m^2_{h^0} \simeq x\cos^2 2\beta, \tag{535}$$

а при больших x

$$m^2_{h^0} \to a\cos^2 2\beta - \left(\frac{a^2}{4x}\right)\sin^2 4\beta. \tag{536}$$

Следовательно, максимальное значение $m^2_{h^0}$, достигаемое при $m^2_{A^0} \to \infty$, равно $a\cos^2 2\beta$, т. е.

$$m_{h^0} \leq m_Z|\cos 2\beta|. \tag{537}$$

Заметим, что правая часть (537) обращается в ноль при $\beta = \pi/4$. Это обнадеживающее ограничение на массу нейтрального хиггсовского бозона в MSSM. Ограничение (537) уже превышено имеющимися экспериментальными данными

$$m_H \geq 114{,}4\ \text{ГэВ}. \tag{538}$$

К счастью для MSSM, «древесные» массовые формулы, полученные выше, существенно изменяются при учете петлевых поправок, особенно в случае h^0. Однако m_{h^0} по-прежнему минимизируется при $\operatorname{tg}\beta \simeq 1$. Количественный массовый сдвиг зависит от дополнительных параметров MSSM, входящих в петли. Результат очень чувствителен к массе t-кварка.

1.17.3. Константы связи h^0-, H^0- и A^0-бозонов в древесном приближении. Феноменология хиггсовского сектора зависит не только от масс частиц, но и от констант связи, входящих в распадные процессы. При преобразованиях к диагональному базису соотношения $m_{u_{ij}} = v_u y_u^{ij}$ и аналогично для $m_{d_{ij}}$ и $m_{e_{ij}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} m_{u,c,t} &= v_u y_{u,c,t}, \\ m_{d,s,b} &= v_d y_{d,s,b}, \\ m_{e,\mu,\tau} &= v_d y_{e,\mu,\tau}. \end{aligned} \tag{539}$$

В этом базисе юкавские связи в суперпотенциале (с учетом (505)):

$$\begin{aligned} y_{u,c,t} &= \frac{m_{u,c,t}}{v_u} = \frac{g m_{u,c,t}}{\sqrt{2}m_W \sin\beta}, \\ y_{d,s,b} &= \frac{m_{d,s,b}}{v_d} = \frac{g m_{d,s,b}}{\sqrt{2}m_W \cos\beta}, \\ y_{e,\mu,\tau} &= \frac{m_{e,\mu,\tau}}{v_d} = \frac{g m_{e,\mu,\tau}}{\sqrt{2}m_W \cos\beta}. \end{aligned} \tag{540}$$

Первые два их этих соотношений предполагают, что грубые ограничения на величину $\operatorname{tg}\beta$ можно получить, если ни y_t, ни y_b не принимают больших значений. Например, если $\operatorname{tg}\beta \geq 1$, то $y_t < 1{,}4$ и если $\operatorname{tg}\beta < 50$, то $y_b < 1{,}25$. В некоторых моделях большого объединения величины y_t, y_b и y_τ могут совпадать на масштабах объединения, это требует $\operatorname{tg}\beta \simeq m_t/m_b \simeq 40$.

Чтобы найти связи хиггсовских бозонов с фермионами в MSSM, обратимся к юкавским связям типа

$$-\frac{1}{2}y_u^{ij}(\chi_{\overline{u}_{L_i}}\chi_{u_{L_j}} + \chi_{u_{L_i}}\chi_{\overline{u}_{L_j}})H_u^0 + \text{э.с.} = -y_u^{ij}(\chi_{\overline{u}_{L_i}}\chi_{u_{L_i}})H_u^0 + \text{э.с.}, \quad \ldots \tag{541}$$

(а также аналогичными для y_d^{ij} и y_e^{ij}) и разложим H_u^0 и H_d^0 возле их вакуумных значений. Чтобы получить результат в терминах физических полей h^0 и H^0, нужно знать, как последние связаны с $\operatorname{Re} H_u^0$ и $\operatorname{Re} H_d^0$. Для этого потребуем соответствия между собственными модами (масс)^2-матрицы (531), соответствующими собственным значениям $m_{h^0}^2$ и $m_{H^0}^2$ в (532) и (533) и представим (531) в виде

$$M_{h,H}^{sq} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + Bc & -As \\ -As & A - Bc \end{pmatrix}, \tag{542}$$

где $A = (m_{A^0}^2 + m_{Z|}^2)$, $B = (m_{A^0}^2 - m_Z^2)$, $c = \cos 2\beta$, $s = \sin 2\beta$ и использовано выражение (523). Выражение (542) вычислено в базисе $(\sqrt{2}(\operatorname{Re} H_u^0 - v_u), \sqrt{2}(\operatorname{Re} H_d^0 - v_d))$. Обозначим нормированные собственные вектора (542) через u_h и u_H, где

$$u_h = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad u_H = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{543}$$

с собственными значениями

$$\begin{aligned} m_{h^0}^2 &= \frac{1}{2}(A - C), \\ m_{H^0}^2 &= \frac{1}{2}(A + C), \end{aligned} \tag{544}$$

где $C = [A^2 - (A^2 - B^2)c^2]^{1/2}$. Тогда уравнение, определяющее u_u:

$$\begin{pmatrix} A + Bc & -As \\ -As & A - Bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} = (A - C)\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}, \tag{545}$$

отсюда

$$\begin{aligned} (C + Bc)\cos\alpha &= -As\sin\alpha, \\ (-C + Bc)\sin\alpha &= As\cos\alpha. \end{aligned} \tag{546}$$

Удобнее переписать это соотношение в несколько другой форме. Умножим первое из соотношений (546) на $\sin\alpha$, второе — на $\cos\alpha$ и вычтем результаты:

$$\sin 2\alpha = -\frac{As}{c} = -\frac{(m_{A^0}^2 + m_Z^2)}{(m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2)}\sin 2\beta. \tag{547}$$

Снова домножая первое из соотношений (546) на $\cos\alpha$, второе — на $\sin\alpha$, но теперь уже складывая, получим

$$\cos 2\alpha = -\frac{Bc}{C} = -\frac{(m_{A^0}^2 - m_Z^2)}{(m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2)}\cos 2\beta. \tag{548}$$

Уравнения (547) и (548) служат для определения квадранта угла смешивания α: $-\pi/2 < \alpha < 0$. В пределе $m_{A^0}^2 \gg m_Z^2$ имеем $\sin 2\alpha \simeq -\sin 2\beta$ и $\cos 2\alpha \simeq -\cos 2\beta$, поэтому $\alpha \simeq \beta - \pi/2$ для $m_{A^0}^2 \gg m_Z^2$.

Физические состояния определяются следующим образом

$$\begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{Re} H_u^0 - v_u \\ \operatorname{Re} H_d^0 - v_d \end{pmatrix}, \tag{549}$$

которые можно переписать так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H_u^0 &= \left[v_u + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha h^0 + \sin\alpha H^0)\right], \\ \operatorname{Re} H_d^0 &= \left[v_d + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\alpha h^0 + \cos\alpha H^0)\right]. \end{aligned} \tag{550}$$

Поэтому из (521) и (522) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H_u^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\beta H_Z + \cos\beta A^0), \\ \operatorname{Im} H_d^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\beta H_Z + \sin\beta A^0), \end{aligned} \tag{551}$$

где H_Z — безмассовое поле, поглощаемое Z^0. Теперь уже можно извлечь связи фермионов. Например, юкавская константа (541) в массовом базисе для третьего поколения

$$-y_t\left[\chi_{\bar{t}_L}\chi_{t_L}(\operatorname{Re} H_u^0 + i\operatorname{Im} H_u^0) + \chi_{t_L}^+\chi_{\bar{t}_L}^+(\operatorname{Re} H_u^0 - i\operatorname{Im} H_u^0)\right]. \tag{552}$$

При подстановке сюда $\operatorname{Re} H_u^0$ из (550) «v_u» часть дает дираковскую массу, а оставшаяся часть

$$-\frac{m_t}{\sqrt{2}v_u}(\chi_{\bar{t}_L}\chi_{t_L} + \chi_{t_L}^+\chi_{\bar{t}_L}^+)(\cos\alpha h^0 + \sin\alpha H^0) = -\left(\frac{gm_t}{2m_W}\right)\bar{t}t\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}h^0 + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}H^0\right), \tag{553}$$

где «$\bar{t}t$» — четырехкомпонентная дираковская комбинация. Соответствующее выражение в SM:

$$-\left(\frac{gm_t}{2m_W}\right)\bar{t}tH_{SM}, \tag{554}$$

где H_{SM} — хиггсовский бозон SM.

Аналогично связь с b-кварком

$$-\left(\frac{gm_b}{2m_W}\right)\bar{b}b\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}h^0 + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}H^0\right), \tag{555}$$

которую следует сравнить со связью в SM:

$$-\left(\frac{gm_b}{2m_W}\right)\bar{b}bH_{SM}. \tag{556}$$

Наконец, связь $t - A^0$ находится при подстановке (551) и (552):

$$-i\frac{m_t}{v_u}(\chi_{\bar{t}_L}\chi_{t_L} - \chi_{t_L}^+\chi_{\bar{t}_L}^+)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta A^0 = i\left(\frac{gm_t}{2m_W}\right)\operatorname{ctg}\beta\bar{t}\gamma^5 tA^0, \tag{557}$$

где использовано соотношение (391).

Аналогично $b - A^0$ связь

$$i\left(\frac{gm_b}{2m_W}\right)\operatorname{tg}\beta\bar{b}\gamma_5 bA^0. \tag{558}$$

Связь типа «γ^5» показывает, что A^0 — псевдоскалярный бозон ($CP = -1$), в то время как h^0 и H^0 — скаляры ($CP = +1$).

Снова интересен предел больших m_{A^0}. В этом случае α и β связаны соотношением $\alpha = \beta - \pi/2$, а это означает

$$\begin{aligned} \sin\alpha &\simeq -\cos\beta, \\ \cos\alpha &\simeq \sin\beta. \end{aligned} \tag{559}$$

Из (553) и (555) следует, что в этом пределе связи h^0 такие же, как у хиггса SM, а связи H^0 — как у A^0. Для малых m_{A^0} и больших $\operatorname{tg}\beta$, с другой стороны, связи могут значительно отличаться от связей SM: b-состояния усиливаются, а t-состояния — подавляются.

Связи хиггсовских бозонов с калибровочными бозонами определяются $SU(2)_L \times U(1)_Y$ калибровочной инвариантностью, т. е. члены (502) задаются выражением (503). Члены, содержащие W_μ^1, W_μ^2, $\operatorname{Re} H_u^0$ и $\operatorname{Re} H_d^0$ легко находятся:

$$\frac{g^2}{4}(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu})\left[(\operatorname{Re} H_u^0)^2 + (\operatorname{Re} H_d^0)^2\right]. \tag{560}$$

Подставляя сюда (550), v_u^2 и v_d^2 части генерируют W-бозонный (масс)^2 член посредством (505), в то время как $W - W - (h^0, H^0)$ связь:

$$\begin{aligned} &\frac{g^2}{4}(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu})\sqrt{2}\left[v_u(\cos\alpha h^0 + \sin\alpha H^0) + v_d(-\sin\alpha h^0 + \cos\alpha H^0)\right] = \\ &\qquad = \frac{g m_W}{2}(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu})\left[\sin(\beta-\alpha)h^0 + \cos(\beta-\alpha)H^0\right]. \end{aligned} \tag{561}$$

Аналогично, $Z - Z - (h^0, H^0)$ связь

$$\frac{g m_Z}{2\cos\theta_W} Z_\mu Z^\mu \left[\sin(\beta-\alpha)h^0 + \cos(\beta-\alpha)H^0\right]. \tag{562}$$

Эта связь напоминает связь хиггса с W и Z в SM, но модифицирована фактором $\sin(\beta-\alpha)$ для h^0 и фактором $\cos(\beta-\alpha)$ для H^0. В пределе больших $m_{A^0}^2$ получаем

$$\sin(\beta-\alpha) \simeq 1 \quad \text{и} \quad \cos(\beta-\alpha) \simeq 0, \tag{563}$$

т. е. h^0 имеет такую же связь с калибровочными бозонами, как в SM, а H^0 полностью «отщепляется» от них. В древесном приближении A^0 не связан с парами калибровочных бозонов. Полные ширины хиггсовских бозонов MSSM зависят от $\operatorname{tg}\beta$. h^0 распадается, главным образом, на фермион-антифермионные пары с шириной, сравнимой с шириной Хиггс-бозона SM. Однако H^0 и A^0 обычно уже, чем хиггс SM той же массы. Скорость рождения хиггсовских бозонов на LHC зависит от $\operatorname{tg}\beta$. Доминирующим механизмом рождения, как и в SM, является глюонное слияние, происходящее через кварковые (или скварковые) петли. В SM доминирует t-кварковая петля, в MSSM, если $\operatorname{tg}\beta$ и m_{A^0} не слишком велики, усилена связь $\bar{b}bh$, и становится существенной b-кварковая петля.

1.18. SUSY частицы в MSSM

В этом разделе обсудим физику различных SUSY частиц в MSSM. Как и в скалярном секторе, ситуация усложняется смешиванием. В частности, после нарушения $SU(2)_L \times U(1)_Y$ симметрии возникает смешивание между двумя (или больше) полями с одинаковым цветом, зарядом и спином.

1.18.1. Нейтралино. Обсудим сначала сектор, состоящий из нейтральных хиггсино $\tilde{H}_u^0$ и $\tilde{H}_d^0$ и нейтральных калибрино $\tilde{B}$ (бино) и $\tilde{W}_0$ (вино). Все они — L-типа спинорные поля. В отсутствие электрослабого нарушения, поля $\tilde{B}$ и $\tilde{W}_0$ имели бы массы, задаваемые «мягко» нарушающими SUSY членами (461):

$$-\frac{1}{2}M_1\tilde{B}\tilde{B} - \frac{1}{2}M_2\tilde{W}^0\tilde{W}^0 + \text{э.с.} \tag{564}$$

Однако билинейные комбинации одного из $(\tilde{B}, \tilde{W}^0)$ с одним из $(\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0)$ генерируются членом «$-\sqrt{2}g[\ldots]$» в (380), когда нейтральные скалярные хиггсовские поля приобретают ненулевые вакуумные средние. Такие билинейные члены будут, как и в хиггсовском секторе, появляться как ненулевые недиагональные элементы 4×4 массовой матрицы четырех полей $\tilde{B}$, $\tilde{W}^0$, $\tilde{H}_u^0$ и $\tilde{H}_d^0$, т. е. они будут смешиваться. После диагонализации массовой матрицы результирующие 4 нейтральные массовые состояния называют нейтралино и обозначают $\tilde{\chi}_i^0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. При этом считают, что массы этих состояний упорядочены: $m_{\tilde{\chi}_1^0} < m_{\tilde{\chi}_2^0} < m_{\tilde{\chi}_3^0} < m_{\tilde{\chi}_4^0}$. Рассмотрим, например, $SU(2)$-вклад в (386) от H_u супермультиплета при $\alpha = 3$, $T^3 = \tau^3/2$, $\lambda^3 = \tilde{W}^0$. Этот вклад

$$-\sqrt{2}g(H_u^{++} H_u^{0+})\frac{\tau_3}{2}\begin{pmatrix}\tilde{H}_u^+\\ \tilde{H}_u^0\end{pmatrix}\tilde{W}^0 + \text{э.с.} \tag{565}$$

Когда поле H_u^{0+} приобретает вакуумное среднее v_u (которое вещественно), выражение (565) содержит слагаемое

$$+\frac{g}{\sqrt{2}}v_u\tilde{H}_u^0\tilde{W}^0 + \text{э.с.}, \tag{566}$$

которое, используя (508) и (505), перепишем в виде

$$-\frac{1}{2}[-\sin\beta\sin\theta_W m_Z](\tilde{H}_u^0\tilde{W}^0 + \tilde{W}^0\tilde{H}_u^0) + \text{э.с.} \tag{567}$$

В калибровочном базисе собственных состояний

$$\tilde{G}^0 = \begin{pmatrix}\tilde{B}\\ \tilde{W}^0\\ \tilde{H}_d^0\\ \tilde{H}_u^0\end{pmatrix} \tag{568}$$

возникает смешивание между (2,4) и (4,2) компонентами. Подобным же образом $U(1)$-вклад от H_u супермультиплета после электрослабого нарушения симметрии приводит к смешиванию

$$-\frac{g'}{\sqrt{2}}v_u\tilde{H}_u^0\tilde{B} + \text{э.с.} = -\frac{1}{2}[\sin\beta\sin\theta_W m_Z](\tilde{H}_u^0\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{H}_u^0) + \text{э.с.}, \tag{569}$$

включающему (1,4) и (4,1) компоненты. Вдобавок к этому смешиванию, вызванному электрослабым нарушением симметрии, смешивание между $\tilde{H}_u^0$ и $\tilde{H}_d^0$ связано с SUSY-инвариантным «μ-членом» в выражении (396):

$$-\frac{1}{2}(-\mu)(\tilde{H}_u^0\tilde{H}_d^0 + \tilde{H}_d^0\tilde{H}_u^0) + \text{э.с.} \tag{570}$$

Собирая вместе массовые члены, содержащие поля $\tilde{G}^0$, получаем

$$-\frac{1}{2}\tilde{G}^{oT}M_{\tilde{G}^0}\tilde{G}^0 + \text{э.с.}, \tag{571}$$

здесь введена матрица

$$M_{\tilde{G}^0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -c_\beta s_W m_Z & s_\beta s_W m_Z \\ 0 & M_1 & c_\beta c_W m_Z & -s_\beta c_W m_Z \\ -c_\beta s_W m_Z & c_\beta c_W m_Z & 0 & -\mu \\ s_\beta s_W m_Z & -s_\beta c_W m_Z & -\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{572}$$

где $c_\beta = \cos\beta$, $s_\beta = \sin\beta$, $c_W = \cos\theta_W$ и $s_W = \sin\theta_W$.

Вообще говоря, параметры M_1, M_2 и μ могут иметь произвольные фазы. Однако условие объединения калибрино (475), подразумевающее выполнение (477) на электрослабом масштабе, позволяет выразить M_1 через M_2. Переопределение фаз $\tilde{B}$ и $\tilde{W}^0$ дает возможность считать как M_1, так и M_2 вещественными и положительными. Обычно μ выбирается вещественным (чтобы избежать больших CP-нарушающих эффектов), но при этом знак μ неизвестен. Таким образом, сектор нейтралино определяется тремя вещественными параметрами M_1, $\operatorname{tg}\beta$ и μ (а также, естественно m_Z и θ_W).

В интересном частном случае m_Z-зависимые члены в (572) представляют собой малые возмущения других элементов матрицы. Тогда состояния нейтралино $\tilde{\chi}_1^0$ и $\tilde{\chi}_2^0$ близки к слабым собственным состояниям бино и вино с массами M_1 и M_2. При этом хиггсино смешиваются элементами, содержащими μ и образующими комбинации

$$\tilde{H}_S^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{H}_d^0 + \tilde{H}_u^0), \quad \tilde{H}_A^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{H}_d^0 - \tilde{H}_u^0) \tag{573}$$

с массами $\sim |\mu|$.

Если нейтралино — легчайшая суперсимметричная частица (LSP) $\tilde{\chi}_1^0$, то она является заманчивым кандидатом на небарионную темную материю.

1.18.2. Чарджино. Зарядовые аналоги нейтралино называются чарджино: их два положительно заряженных, которые ассоциируются (до смешивания) с $(\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+)$ и два отрицательно заряженных, связанных с $(\tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-)$. Смешивание между $\tilde{H}_u^+$ и $\tilde{H}_d^-$ происходит за счет μ-члена в (396). Как и в случае нейтралино, смешивание между заряженными калибрино и хиггсино происходит за счет «$-\sqrt{2}g[\ldots]$» члена в (386) после электрослабого нарушения симметрии. Рассмотрим, например, H_u супермультиплетные члены в (386), содержащие поля $\tilde{W}_1$ и $\tilde{W}_2$ после приобретения скалярным хиггсом вакуумного среднего v_u. Эти члены:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}\left\{v_u\left[\tau^1\begin{pmatrix}\tilde{H}_u^+\\ \tilde{H}_u^0\end{pmatrix}\tilde{W}^1 + \tau^2\begin{pmatrix}\tilde{H}_u^+\\ \tilde{H}_u^0\end{pmatrix}\tilde{W}^2\right]\right\} + \text{э.с.} = -\frac{g}{\sqrt{2}}v_u\tilde{H}_u^+(\tilde{W}^1 - i\tilde{W}^2) + \text{э.с.} =$$
$$= -gv_u\tilde{H}_u^+\tilde{W}^- + \text{э.с.} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}s_\beta m_W(\tilde{H}_u^+\tilde{W}^- + \tilde{W}^-\tilde{H}_u^+) + \text{э.с.} \tag{574}$$

Соответствующие члены из H_d супермультиплета:

$$-gv_d\tilde{H}_d^-\tilde{W}^+ + \text{э.с.} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}c_\beta m_W(\tilde{H}_d^-\tilde{W}^+ + \tilde{W}^+\tilde{H}_d^-) + \text{э.с.} \tag{575}$$

Если определить базис калибровочных собственных состояний

$$\tilde{g}^+ = \begin{pmatrix}\tilde{W}^+\\ \tilde{H}_u^+\end{pmatrix} \tag{576}$$

для положительно заряженных состояний и аналогично

$$\tilde{g}^- = \begin{pmatrix} \tilde{W}^- \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix} \tag{577}$$

для отрицательно заряженных состояний, то массовые члены чарджино можно записать в виде

$$-\frac{1}{2}[\tilde{g}^{+T}X^T\tilde{g}^- + \tilde{g}^{-T}X\tilde{g}^+] + \text{э.с.}, \tag{578}$$

где матрица

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}s_\beta m_W \\ \sqrt{2}c_\beta m_W & \mu \end{pmatrix}. \tag{579}$$

Так как $X^T \neq X$ (кроме случая $\operatorname{tg}\beta = 1$), то для диагонализации нужны две различные 2×2 матрицы. Определим базисы собственных массовых состояний:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^+ &= V\tilde{g}^+, \quad \tilde{\chi}^+ = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1^+ \\ \tilde{\chi}_2^+ \end{pmatrix}, \\ \tilde{\chi}^- &= U\tilde{g}^-, \quad \tilde{\chi}^- = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1^- \\ \tilde{\chi}_2^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{580}$$

где U и V — унитарны. Тогда второе слагаемое в (578) можно представить в виде

$$-\frac{1}{2}\tilde{\chi}^{-T}U^*XV^{-1}\tilde{\chi}^+ \tag{581}$$

и потребовать, чтобы

$$U^*XV^{-1} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_1^\pm} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_2^\pm} \end{pmatrix}. \tag{582}$$

Как быть с первым членом в (578)? Он трансформируется в выражение

$$-\frac{1}{2}\tilde{\chi}^{+T}V^*X^TU^+\tilde{\chi}^-. \tag{583}$$

Но из-за того, что $V^*X^TU^+ = (U^*XV^{-1})^T$, выражение (583) тоже диагонально, с теми же самыми собственными значениями $m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$ и $m_{\tilde{\chi}_2^\pm}$.

Заметим, что при эрмитовом сопряжении выражения (582) получаем

$$VX^+U^T = \begin{pmatrix} m^*_{\tilde{\chi}_1^\pm} & 0 \\ 0 & m^*_{\tilde{\chi}_2^\pm} \end{pmatrix}. \tag{584}$$

Следовательно,

$$VX^+XV^{-1} = VX^+U^TU^*XV^{-1} = \begin{pmatrix} |m_{\tilde{\chi}_1^\pm}|^2 & 0 \\ 0 & |m_{\tilde{\chi}_1^\pm}|^2 \end{pmatrix}. \tag{585}$$

Видно, что положительно заряженные состояния $\tilde{\chi}^+$ диагонализуют X^+X. Аналогично

$$U^*XX^+U^T = U^*XV^{-1}VX^+U^T = \begin{pmatrix} |m_{\tilde{\chi}_1^\pm}|^2 & 0 \\ 0 & |m_{\tilde{\chi}_1^\pm}|^2 \end{pmatrix} \tag{586}$$

и отрицательно заряженные состояния $\tilde{\chi}^-$ диагонализуют XX^+.

Собственные значения X^+X (или XX^+) легко находятся:

$$\begin{pmatrix} |m_{\tilde{\chi}_1^\pm}|^2 \\ |m_{\tilde{\chi}_2^\pm}|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Big[(M_2^2+|\mu|^2+2m_W^2) \mp \big\{(M_2^2+|\mu|^2+2m_W^2)^2 - 4|\mu M_2 - m_W^2 \sin 2\beta|^2\big\}^{1/2}\Big]. \tag{587}$$

Стоит отметить, что эти собственные значения не являются квадратами собственных значений X. В качестве возможных проявлений рождения нейтралино и чарджино на адронных коллайдерах стоит упомянуть так называемый «трилептонный» сигнал:

$$pp \to \tilde{\chi}_1^\pm \tilde{\chi}_2^0 + X. \tag{588}$$

С последующими распадами

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1^\pm &\to l^\pm \nu \tilde{\chi}_1^0, \\ \tilde{\chi}_2^0 &\to l\bar{l}\tilde{\chi}_1^0. \end{aligned} \tag{589}$$

В конечном состоянии должно быть $2m_{\tilde{\chi}_1^0}$ недостающей энергии, три энергичных изолированных лептона и струя.

1.18.3. Глюино. Глюино $\tilde{g}$ — цветовой октетный фермион, поэтому он не может смешиваться с любыми другими частицами MSSM, даже если R-четность нарушена. Большинство моделей предполагают, что масса глюино существенно больше, чем массы нейтралино и чарджино. Сигнатурой рождения глюинных пар ($\tilde{g}\tilde{g}$) является дилептонный сигнал одного знака. Этот сигнал возникает при распаде глюино на адроны плюс чарджино, которое, в свою очередь, распадается на лептон $+\,\nu + \tilde{\chi}_1^0$. Так как глюино не чувствительно к электрическому заряду, лептон из каждого распада $\tilde{g}$ будет нести любой заряд с равной вероятностью. Следовательно, много событий будут содержать лептоны одного знака (плюс струя + недостающая энергия). Этот процесс имеет низкий фон в SM, так как в SM изолированные лептонные пары возникают от W^+W^-, $t\bar{t}$ или процессов Дрелла–Яна, дающих дилептоны противоположных знаков.

1.18.4. Скварки и слептоны. Скалярные партнеры фермионов SM образуют набор новых частиц MSSM. Так как существуют отдельные партнеры для каждого кирального состояния массивных фермионов, всего будет 21 новое поле (нейтрино здесь трактуются безмассовыми): четыре скварковых аромата и киральностей $\tilde{u}_L$, $\tilde{u}_R$, $\tilde{d}_L$, $\tilde{d}_R$ и три слептонных сорта (аромата) и киральностей $\tilde{\nu}_{eL}$, $\tilde{e}_L$, $\tilde{e}_R$ в первом семействе, то же следует повторить для других семейств. Все они являются комплексными скалярными полями и индексы L и R используются не для того, чтобы определить киральность, а для обозначения фермионов SM, с которыми эти поля партнерствуют.

В принципе, любые скаляры с одинаковыми электрическими зарядами, R-четностью и цветом могут смешиваться друг с другом (даже из разных семейств) из-за SUSY нарушающих параметров в выражениях (461), (463) и (467). Это приводило бы к 6×6 проблеме смешивания для u-типа скварковых полей ($\tilde{u}_L, \tilde{u}_R, \tilde{c}_L, \tilde{c}_R, \tilde{t}_L, \tilde{t}_R$) и для d-типа скварков и заряженных слептонов, а также к 3×3 смешиванию для снейтрино. Однако, как мы видели в разд. 1.16.2, феноменологические ограничения подразумевают, что смешивание между семействами SUSY состояний должно быть очень малым. Как и раньше, примем SUGRA-форму «мягких» параметров, задаваемых соотношениями (469) и (471). Это гарантирует подавление нежелательного смешивания между семействами.

Рассмотрим сначала «мягкие» нарушающие SUSY (масс)^2-параметры первого семейства. В модели (469) все они генерируются на больших (планковских?) масштабах. Ренорм-групповые уравнения эволюции до электрослабого масштаба того же типа, что и (480), но без X_t членов: соответствующими членами для первых двух семейств можно пренебречь из-за малости юкавских связей. Поэтому «мягкие» массы первого и второго семейства эволюционируют как чисто калибровочные взаимодействия, которые стремятся увеличить массы на малых масштабах. Их эволюцию можно параметризовать следующим образом

$$\begin{aligned} m^2_{\tilde{u}_L,\tilde{d}_L} &= m^2_{\tilde{c}_L,\tilde{s}_L} = m_0^2 + K_3 + K_2 + \frac{1}{9}K_1, \\ m^2_{\tilde{u}_R} &= m^2_{\tilde{c}_R} = m_0^2 + K_3 + \frac{16}{9}K_1, \\ m^2_{\tilde{d}_R} &= m^2_{\tilde{s}_R} = m_0^2 + K_3 + \frac{4}{9}K_1, \\ m^2_{\tilde{\nu}_{eL},\tilde{e}_L} &= m^2_{\tilde{\nu}_{\mu L},\tilde{\mu}_L} = m_0^2 + K_2 + K_1, \\ m^2_{\tilde{e}_R} &= m^2_{\tilde{\mu}_R} = m_0^2 + 4K_1. \end{aligned} \tag{590}$$

Здесь K_3, K_2 и K_1 — RG-вклады от $SU(3)$-, $SU(2)$- и $U(1)$-калибрино: все киральные супермультиплеты имеют с калибрино универсальную связь. Различные численные коэффициенты перед K_1 — это квадраты y для каждого поля (см. табл. 1), входящего в соответствующую петлю. Все слагаемые «K» — положительные и одного порядка величины с (масс)^2-параметром калибрино $m^2_{1/2}$, но K_3 значительно больше K_2, которое, в свою очередь, больше K_1. Большой «K_3» вклад, вероятно, модельно независим, и поэтому резонно ожидать, что для скварка (масс)^2-величина больше, чем для слептона.

Уравнения (590) дают «мягкие» (масс)^2-параметры для четырнадцати состояний первых двух семейств (мы пока откладываем обсуждение третьего семейства).

В дополнение к этим вкладам, однако, нужно учесть и другие члены, которые возникают в результате нарушения электрослабой симметрии. Для первых двух семейств наиболее важны вклады от SUSY инвариантных D-членов (388) типа (скварк)^2(хиггс)^2 и (слептон)^2(хиггс)^2. Возвращаясь к уравнению (387), $SU(2)$-вклад в величину

$$\begin{aligned} D^\alpha = g\Big\{(\tilde{u}_L^+\tilde{d}_L^+)\frac{\tau^\alpha}{2}\left(\tilde{u}_L\tilde{d}_L\right) + (\tilde{\nu}_{eL}^+\tilde{e}_L^+)\frac{\tau^\alpha}{2}\begin{pmatrix}\tilde{\nu}_{eL}\\ \tilde{e}_L\end{pmatrix} + \\ + (H_u^{++}H_u^{0+})\frac{\tau^\alpha}{2}\begin{pmatrix}H_u^+\\ H_u^0\end{pmatrix} + (H_d^{0+}H_d^{-+})\frac{\tau^\alpha}{2}\begin{pmatrix}H_d^0\\ H_d^-\end{pmatrix}\Big\} \to \\ \to g\Big\{(\tilde{u}_L^+\tilde{d}_L^+)\frac{\tau^\alpha}{2}\begin{pmatrix}\tilde{u}_L\\ \tilde{d}_L\end{pmatrix} + (\tilde{\nu}_{eL}^+\tilde{e}_L^+)\frac{\tau^\alpha}{2}\begin{pmatrix}\tilde{\nu}_{eL}+\\ \tilde{e}_L\end{pmatrix} - \frac{1}{2}v_u^2\delta_{\alpha 3} + \frac{1}{2}v_d^2\delta_{\alpha 3}\Big\} \end{aligned} \tag{591}$$

после нарушения симметрии. При подстановке в слагаемое лагранжиана $-(1/2)D^\alpha D^\alpha$ квадратичные по скалярным полям члены ((масс)^2-члены) возникают за счет перекрестных вкладов «$\tau^\alpha/2$» и «$\delta_{\alpha3}$». Эти перекрестные члены пропорциональны $\tau^3/2$, и поэтому расщепляют компоненты $T_3 = +1/2$ и $T_3 = -1/2$ слабого изоспина, но они диагональны в базисе слабых собственных состояний. Поэтому их вклад в $(\tilde{u}_L\tilde{d}_L)$(масс)^2 матрицу равен

$$+\frac{1}{2}g^2 2\frac{1}{2}(v_d^2 - v_u^2)T_3, \tag{592}$$

где $T_3 = \tau^3/2$. Аналогично, $U(1)$-вклад в D:

$$D_y = g'\Big\{\sum_f \frac{1}{2}\tilde{f}^+ y_{\tilde{f}} \tilde{f} - \frac{1}{2}(v_d^2 - v_u^2)\Big\}, \tag{593}$$

суммирование производится по всем сфермионам (скваркам и слептонам). Выражение (593) приводит к сфермионному (масс)^2-члену

$$+\frac{1}{2}g'^2 2\Big(-\frac{1}{2}y\Big)\frac{1}{2}(v_d^2 - v_u^2). \tag{594}$$

Так как $y/2 = Q - T^3$, где Q — электромагнитный заряд, то можно объединить соотношения (592) и (594) и получить полный (масс)^2-вклад для каждого сфермиона:

$$\Delta_{\tilde{f}} = \frac{1}{2}(v_d^2 - v_u^2)\big[(g^2 + g'^2)T^3 - g'^2 Q\big] = m_Z^2 \cos 2\beta [T^3 - \sin^2\theta_W Q], \tag{595}$$

где использовано выражение (505). Как отмечалось раньше, $\Delta_{\tilde{f}}$ диагональна в базисе слабых собственных состояний, и соответствующий вклад нужно добавить в правую часть (590). Интересно, что предсказывается расщепление между дублетными состояниями

$$-m_{\tilde{u}_L}^2 + m_{\tilde{d}_L}^2 = -m_{\tilde{\nu}_{eL}}^2 + m_{\tilde{e}_L}^2 = \cos 2\beta m_W^2 \tag{596}$$

и аналогично для второго семейства. В предположении о том, что $\operatorname{tg}\beta > 1$, «down» состояние тяжелее.

Сфермионные (масс)^2-члены также генерируются после нарушения симметрии SUSY инвариантными F-членами, т. е. членами лагранжиана вида

$$-\Big|\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\Big|^2 \tag{597}$$

для каждого скалярного поля ϕ_i. Напомним, что юкавские связи пропорциональны ассоциированным фермионным массам. Тогда на масштабе ожидаемых масс сфермионов основной вклад вносят юкавские связи третьего семейства. Поэтому с хорошей точностью можно записать

$$W \simeq y_t \tilde{t}_R^+(\tilde{t}_L H_u^0 - \tilde{b}_L H_u^+) - y_b \tilde{b}_R^+(\tilde{t}_L H_d^- - \tilde{b}_L H_d^0) - \\ - y_\tau \tilde{\tau}_R^+(\tilde{\nu}_{\tau L} H_d^- - \tilde{\tau}_L H_d^0) + \mu(H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0). \tag{598}$$

Тогда после приобретения полем H_u^0 вакуумного среднего v_u имеем

$$-\Big|\frac{\partial W}{\partial \tilde{t}_L^+}\Big|^2 = -y_t^2 \tilde{t}_L^+ \tilde{t}_L |H_u^0|^2 \to -y_t^2 v_u^2 \tilde{t}_L^+ \tilde{t}_L = -m_t^2 \tilde{t}_L^+ \tilde{t}_L. \tag{599}$$

Таким образом, L-типа топ-кварк (стоп) приобретает (масс)^2-член, равный (масс)^2 топ-кварка. Будет также идентичный член для R-типа «стоп» кварка, возникающий за счет $-|\partial W/\partial \tilde{t}_L|^2$. Аналогично, возникают (масс)^2-члены m_b^2 для $\tilde{b}_L$ и $\tilde{b}_R$ и m_τ^2 для $\tilde{\tau}_L$ и $\tilde{\tau}_R$.

Нам нужно рассмотреть и производные W по хиггсовским полям. Например,

$$-\Big|\frac{\partial W}{\partial H_u^0}\Big|^2 = -|y_t \tilde{t}_R^+ \tilde{t}_L - \mu H_d^0|^2 \to -|y_t \tilde{t}_R^+ \tilde{t}_L - \mu v_d|^2 \tag{600}$$

после нарушения симметрии. Это выражение содержит недиагональный билинейный член

$$\mu v_d y_t (\tilde{t}_R^+ \tilde{t}_L + \tilde{t}_L^+ \tilde{t}_R) = \mu m_t \operatorname{tg}\beta (\tilde{t}_R^+ \tilde{t}_L + \tilde{t}_L^+ \tilde{t}_R), \tag{601}$$

который смешивает R и L поля. Аналогично, производная $-|\partial W/\partial H_d^0|^2$ содержит смешивающие члены

$$\mu m_b \operatorname{tg}\beta(\tilde{b}_R^+\tilde{b}_L + \tilde{b}_L^+\tilde{b}_R) \tag{602}$$

и

$$\mu m_\tau \operatorname{tg}\beta(\tilde{\tau}_R^+\tilde{\tau}_L + \tilde{\tau}_L^+\tilde{\tau}_R). \tag{603}$$

Наконец, после приобретения хиггсовскими полями вакуумных средних, возникают билинейные члены за счет тройной скалярной связи (467). Предполагая условия (471) и оставляя только третье семейство, получаем из (467)

$$-A_0 y_t v_u(\tilde{t}_R^+\tilde{t}_L + \tilde{t}_L^+\tilde{t}_R) = -A_0 m_t(\tilde{t}_R^+\tilde{t}_L + \tilde{t}_L^+\tilde{t}_R) \tag{604}$$

вместе с подобными же $(\tilde{b}_L - \tilde{b}_R)$ и $(\tilde{\tau}_L - \tilde{\tau}_R)$ смешивающими членами.

Собирая все вместе, получаем (масс)^2-величины для скварков и слептонов первых двух семейств, задаваемые выражениями (590) и (595).

Для третьего семейства, обсудим сектора $\tilde{t}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{\tau}$ отдельно. Для топ-скварка (масс)^2-член

$$-(\tilde{t}_L^+\tilde{t}_R^+)M_{\tilde{t}}^2\begin{pmatrix}\tilde{t}_L\\ \tilde{t}_R\end{pmatrix}, \tag{605}$$

где

$$M_{\tilde{t}}^2 = \begin{pmatrix} m^2_{\tilde{t}_L,\tilde{b}_L} + m_t^2 + \Delta_{\tilde{u}_L} & m_t(A_0 - \mu\operatorname{ctg}\beta) \\ m_t(A_0 - \mu\operatorname{ctg}\beta) & m^2_{\tilde{t}_R} + m_t^2 + \Delta_{\tilde{u}_R}\end{pmatrix}, \tag{606}$$

причем

$$\Delta_{\tilde{u}_L} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)m_Z^2\cos 2\beta \tag{607}$$

и

$$\Delta_{\tilde{u}_R} = -\frac{2}{3}\sin^2\theta_W m_Z^2\cos 2\beta. \tag{608}$$

Здесь $m_{\tilde{t}_L,\tilde{b}_L}$ и $m^2_{\tilde{t}_R}$ находятся из выражений (480). В соответствующих уравнениях для первых двух семейств присутствует X_t-член, и он стремится уменьшить массы $\tilde{t}_L$ и $\tilde{t}_R$ на малых масштабах, однако член m_t^2 действует в противоположном направлении. Вещественную симметричную матрицу $M_{\tilde{t}}^2$ можно диагонализовать ортогональным преобразованием:

$$\begin{pmatrix}\tilde{t}_1\\ \tilde{t}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_{\tilde{t}} & \sin\theta_{\tilde{t}} \\ -\sin\theta_{\tilde{t}} & \cos\theta_{\tilde{t}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{t}_L\\ \tilde{t}_R\end{pmatrix}. \tag{609}$$

Из-за большой величины m_t в недиагональных членах (606) эффекты смешивания в стоп секторе будут существенными, и, вероятно, приведут к тому, что масса самого легкого стоп-кварка $m_{\tilde{t}_1}$ будет значительно меньше массы любого другого скварка. Конечно, эффекты смешивания не должны быть слишком большими, иначе $m^2_{\tilde{t}_1}$ может стать и отрицательным, а это означало бы (как и в электрослабом случае) спонтанное нарушение цветовой симметрии. Это требование ограничивает величину неизвестного параметра A_0, который не может быть гораздо больше $m_{\tilde{u}_L,\tilde{d}_L}$. На e^+e^--коллайдерах сечение рождения зависит от угла смешивания $\theta_{\tilde{t}}$: например, вклад Z-обмена обращается в ноль при $\cos^2\theta_{\tilde{t}} = (4/3)\sin^2\theta_W$. Однако, кварки $\tilde{t}_1$ на адронных коллайдерах могут рождаться парами, а для такого процесса зависимость

от угла смешивания несущественна. Какая из распадных мод $\tilde{t}_1$ доминирует, зависит от масс чарджино и слептонов. Например, если масса $m_{\tilde{t}_1}$ лежит ниже всех масс чарждино и слептонов, то доминирующий распад

$$\tilde{t}_1 \to c + \tilde{\chi}_1^0, \tag{610}$$

происходящий за счет петель (переход FCNC — с изменением аромата и осуществляемый нейтральными токами). Если же $m_{\tilde{t}_1} > m_{\tilde{\chi}^\pm}$, то основная мода распада

$$\tilde{t}_1 \to b + \tilde{\chi}^\pm, \tag{611}$$

причем $\tilde{\chi}^\pm$ распадается на $l\nu\tilde{\chi}_1^0$.

Вернемся к $\tilde{b}$ сектору, для него (масс)^2-матрица

$$M_{\tilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} m^2_{\tilde{t}_L,\tilde{b}_L} + m_b^2 + \Delta_{\tilde{d}_L} & m_b(A_0 - \mu\,\mathrm{tg}\,\beta) \\ m_b(A_0 - \mu\,\mathrm{tg}\,\beta) & m^2_{\tilde{b}_R} + m_b^2 + \Delta_{\tilde{d}_R} \end{pmatrix}, \tag{612}$$

где

$$\Delta_{\tilde{d}_L} = \Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\Big) m_Z^2 \cos 2\beta \tag{613}$$

и

$$\Delta_{\tilde{d}_R} = \frac{1}{3}\sin^2\theta_W m_Z^2 \cos 2\beta. \tag{614}$$

В этом случае члены X_t входят в уравнения эволюции массы $\tilde{b}_L$, но не для $\tilde{b}_R$, поэтому можно ожидать, что масса $\tilde{b}_R$ будет такой же, как и для $\tilde{d}_R$ и $\tilde{s}_R$, но при этом $m_{\tilde{b}_L}$ может быть меньше масс $m_{\tilde{d}_L}$ и $m_{\tilde{s}_L}$.

Аналогично, (масс)^2-матрица в $\tilde{\tau}$ секторе

$$M_{\tilde{\tau}}^2 = \begin{pmatrix} m^2_{\tilde{\nu}_{\tau L},\tilde{\tau}_L} + m_\tau^2 + \Delta_{\tilde{e}_L} & m_\tau(A_0 - \mu\,\mathrm{tg}\,\beta) \\ m_\tau(A_0 - \mu\,\mathrm{tg}\,\beta) & m^2_{\tilde{\tau}_R} + m_\tau^2 + \Delta_{\tilde{e}_R} \end{pmatrix}, \tag{615}$$

где

$$\Delta_{\tilde{e}_L} = \Big(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\Big) m_Z^2 \cos 2\beta \tag{616}$$

и

$$\Delta_{\tilde{e}_R} = \frac{1}{3}\sin^2\theta_W m_Z^2 \cos 2\beta. \tag{617}$$

Эффекты смешивания в $\tilde{b}$ и $\tilde{\tau}$ секторах зависят от того, насколько велик $\mathrm{tg}\,\beta$. Если $\mathrm{tg}\,\beta < 5$, то эффекты смешивания невелики, поэтому массы $\tilde{b}_R$, $\tilde{\tau}_R$ и $\tilde{\tau}_L$ будут приблизительно вырожденными с соответствующими состояниями в первых двух семействах, при этом $\tilde{b}_L$ будет легче, чем $\tilde{d}_L$ и $\tilde{s}_L$. При больших $\mathrm{tg}\,\beta$ будет, как и в стоп секторе, сильное смешивание. В этом случае $\tilde{b}_1$ и $\tilde{\tau}_1$ могут быть значительно легче, чем их аналоги в первых двух семействах. Нейтралино и чарджино будут в основном распадаться на тау и стау.

Поиск легких $\tilde{b}_1$, распадающихся на $b + \tilde{\chi}_1^0$, подобен поиску распада $\tilde{t}_1 \to c + \tilde{\chi}_1^0$.

1.19. Вместо заключения

Предполагая вырожденность между первыми двумя семействами сфермионов, имеется 25 масс неоткрытых состояний в MSSM: 7 скварков и слептонов в первых двух семействах, 7 в третьем семействе, 4 хиггсовских состояния, 4 нейтралино,

2 чарджино и 1 глюино. Детали феноменологии (сечения рождения, бренчинги распадов) зависят, в том числе, от соотношений масс этих 25 состояний. В MSSM входят около сотни параметров, характеризующих мягкое SUSY нарушение. Кажется, что это существенный недостаток теории. По-видимому нужно значительно сократить пространство параметров, и это удается в некоторых моделях (SUGRA, например). В SUGRA такими параметрами являются m_0, $m_{1/2}$, A_0, $\operatorname{tg}\beta$ и знак μ. Но даже в 3- или 4-мерном пространстве параметров весьма проблематично промоделировать экспериментальные проявления SUSY. Тем не менее, решающее слово остается за экспериментом. Будем надеяться, что мы узнаем (благодаря LHC), сделала ли природа выбор в пользу SUSY.

ГЛАВА 2

ТЕХНИЦВЕТ

2.1. Введение

В физике фундаментальных взаимодействий можно выделить следующие масштабы масс: а) $\Lambda_{\text{КХД}} \sim 100$ МэВ; б) планковский масштаб $M_{\text{Pl}} \sim (\sqrt{G_N})^{-1} \simeq 10^{19}$ ГэВ; в) слабый масштаб $v \simeq (\sqrt{2\sqrt{2}G_F})^{-1} \simeq 175$ ГэВ. Слабый масштаб был введен более 70-ти лет назад Э. Ферми для описания β-распада. В стандартной модели v идентифицируется с вакуумным средним фундаментального изодублета хиггсовского скалярного поля.

Стандартная модель весьма успешна при объяснении имеющихся экспериментальных данных. В том числе, она имеет несомненные успехи в применении к тем экспериментам, которые чувствительны к электрослабым петлевым поправкам. Сравнение экспериментальных данных с петлевыми поправками электрослабой теории позволяет получить верхнюю границу на массу хиггсовского бозона $m_H \leq 200$ ГэВ. Однако, кроме этого ограничения, мы очень мало знаем о «природе» хиггсовского бозона. Существует ли в природе хиггсовский бозон как фундаментальная частица? Очевидно, что стандартная модель не дает ответа на вопрос: какова природа спонтанного нарушения электрослабой симметрии (EWSB)? Ниже мы будем обсуждать механизм EWSB, аналогичный сильным взаимодействиям КХД и основанный на новой сильной динамике (NSD). Заметим, что этот механизм отнюдь не исключает существования SUSY. Очевидно, что SUSY — весьма элегантное расширение группы Лоренца, естественно обобщающееся на теорию струн — кандидата на квантовую теорию гравитации. Более того, SUSY содержит фундаментальные скалярные частицы. Действительно, если обратиться к фермионному содержанию минимальной суперсимметричной стандартной модели (MSSM), то можно заметить, что хиггсовские бозоны являются суперпартнерами новых векторoподобных лептонов, т. е. пары левых лептонных изодублетов: один с гиперзарядом $Y = 1$, а другой — $Y = -1$. Теории новой сильной динамики (теории техницвета) на электрослабом масштабе позволяют по-новому взглянуть на проблему спонтанного нарушения электрослабой теории.

2.2. Динамика техницвета

Идея техницвета (TC) введена Вайнбергом и Сасскиндом в 70-х годах прошлого века. Наиболее тяжелым фермионом в то время был b-кварк с массой ~ 5 ГэВ и ожидался t-кварк в районе масс ~ 15 ГэВ.

Предсказываемый стандартной моделью калибровочный сектор состоял из безмассовых фотона и глюона, тяжелых W- и Z-бозонов с массами в районе $M_W \sim 80$ ГэВ, $M_Z \sim 90$ ГэВ. Сектор же материи SM содержал только относительно легкие фермионы, которые можно было считать безмассовыми. Поэтому был необходим механизм, обеспечивающий массы только тяжелым калибровочным бозонам. Техницвет оказался естественным решением этой проблемы.

2.2.1. Аналогия ТС и КХД. С самого начала ТС рассматривалась как калибровочная теория, аналогичная КХД. Пусть ТС имеет калибровочную группу $G_T = SU(N_T)$, содержащую $N_T^2 - 1$ калибровочных бозонов (техниглюонов). Введем безмассовые киральные технекварки, участвующие в новых калибровочных взаимодействиях, Q_L^{ai} и Q_R^{ai}, где индекс a относится к ТС, а i — к аромату кварка. Предположим, что новые кварки принадлежат фундаментальному представлению $SU(N_T)$. Кроме того, считаем, что число ароматов новых кварков N_{Tf}. В этом случае теория ТС обладает глобальной симметрией $SU(N_{Tf})_L \times SU(N_{Tf})_R \times [U(1)_A] \times U(1)_Q$, причем $U(1)_A$ нарушена киральной аномалией и записана поэтому в квадратных скобках. Будем называть эту группу симметрии киральной группой ТС-теории. Очевидно, что ТС, как и КХД, обладает свойством конфайнмента, и имеет массовый масштаб Λ_T, который должен быть порядка слабого масштаба v. Физический спектр ТС-теории состоит из ТС-синглетов: технимезонов $(\overline{Q}Q)$ и технибарионов. Поскольку такие стабильные объекты не обнаружены в природе, полная теория должна описывать распады техникварков в легкие «наблюдаемые» лептоны и кварки. Таким образом, необходимо расширить теорию ТС до ЕТС (расширенного ТС), причем расширенная теория должна обеспечивать массами кварки и лептоны. Теория ЕТС будет рассмотрена в разд. 2.3.

Что касается ТС, то в полной аналогии с КХД, в ней возникают фермионные киральные конденсаты:

$$\langle \overline{Q}_{iL} Q_{jR} \rangle \simeq \Lambda_{\mathrm{TC}}^3 \delta_{ij}. \tag{1}$$

Это явление аналогично образованию конденсата куперовских пар в сверхпроводнике: техникварки приобретают массы $m_0 \sim \Lambda_T$. Технибарионы, состоящие из N_T техникварков, будут иметь массы $\sim N_T \Lambda_T$. Аналогично КХД, ТС будет содержать $N_{Tf}^2 - 1$ безмассовых голдстоуновских бозонов с константой связи $F_T \sim \Lambda_T$.

Опять-таки по аналогии с КХД, если рассматривается два аромата (up и down) безмассовых кварков, то глобальная киральная симметрия лагранжиана $SU(2)_L \times SU(2)_R \times [U(1)_A] \times U(1)_B$, где A обозначает аксиальное, а B — барионное число. В этом приближении киральная динамика КХД, известная как «киральная конституентная кварковая модель», основана на модели Намбу–Иона–Ласинио (NJL) (см. приложение 1). Пользуясь этой аналогией, можно описать динамическое нарушение киральной симметрии ТС. В этом подходе возникает параметр обрезания $M \sim m_\rho$, и мы можем связать f_π с динамически генерируемой «массовой щелью» в теории, т. е. конституентной кварковой массой КХД. Если конденсируется N_f фермионных ароматов, каждый из которых несет N_C цветов, то все кварки приобретают массу m_0 и создают общую постоянную распада f_π для $(N_f^2 - 1)$ голдстоуновских бозонов:

$$f_\pi^2 = \frac{N_C}{4\pi^2} m_0^2 \ln \frac{M^2}{m_0^2}. \tag{2}$$

В NJL-приближении можно получить и выражение для кваркового конденсата

$$\langle \overline{Q}_{iL} Q_{jR} \rangle = \delta_{ij} \frac{N_C}{8\pi^2} m_0 M^2. \tag{3}$$

ТС-конденсат диагонален в произвольном базисе техникварков Q_i, для которого киральная подгруппа $SU(N_{Tf})_L \times SU(N_{Tf})_R \times U(1)_Q$ является точной симметрией ($U(1)_A$ нарушена инстантонами, поэтому техни-η' — тяжелый мезон).

Калибровочная группа стандартной модели $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ будет калибровочной подгруппой точной ТС киральной подгруппы. В самом деле, поскольку мы предполагаем динамическое нарушение электрослабых симметрий, то $SU(2)_L \times U(1)_Y$

должна быть всегда подгруппой киральной группы. В минимальной модели, описанной ниже, КХД не является подгруппой киральной группы. В модели же Farhi–Susskind, как КХД, так и электрослабые калибровочные группы являются подгруппами киральной группы. Поскольку динамика ТС строится по аналогии с КХД, то мы можем использовать КХД для пересчета количественных параметров ТС-теории.

В КХД, как известно,

$$\begin{aligned} f_\pi &\sim \sqrt{N_C}\Lambda_{\text{КХД}}, \\ \langle \overline{Q}_i Q_i \rangle &\sim \delta_{ij} N_C \Lambda^3_{\text{КХД}}, \\ \text{т}_0 &\sim \Lambda_{\text{КХД}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти зависимости следуют из NJL-приближения. При обсуждении ТС-моделей будем использовать обозначение F_T для технипионной константы распада.

Напомним, что слабый масштаб $v = 2^{-3/4} G_F^{-1/2} = 175$ ГэВ и связан с вакуумным средним хиггсовского поля: $v = v_0/\sqrt{2}$, где $v_0 = 246$ ГэВ. Следовательно, в спонтанно нарушенной фазе стандартной модели хиггсовское поле можно параметризовать в виде:

$$H = \exp\Big(\frac{i\pi^a\tau^a}{v_0}\Big)\begin{pmatrix} \dfrac{v_0}{\sqrt{2}} + \dfrac{h_0}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда из Хиггс-бозонного кинетического члена в лагранжиане ковариантные производные

$$D_\mu H^+ D^\mu H \to \frac{g_2}{2} v_0 W_\mu^+ \partial_\mu \pi^- + \frac{g_2}{2} v_0 W_\mu^- \partial^\mu \pi^+ + v_0 \Big(\frac{g}{2} W_\mu^0 + \frac{g_1}{2} B_\mu\Big)\partial^\mu \pi^0 + \ldots \tag{6}$$

В КХД пионная константа распада определяется соотношением

$$\langle 0 | j_\mu^{a5} | \pi^b \rangle = i f_\pi p_\mu \delta_{ab}, \quad f_\pi = 93 \text{ МэВ}, \tag{7}$$

где $j_\mu^{a5} = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma^5(\tau^a/2)\psi$ и $\psi = (u,d)$.

Аналогично константу распада технипиона $\tilde{\pi}$ определим через вакуумный матричный элемент техникваркового аксиального тока

$$\langle 0 | \tilde{j}_\mu^{a5} | \tilde{\pi}^b \rangle = i F_T p_\mu \delta_{ab}, \quad F_T \sim v, \tag{8}$$

где $\tilde{j}_\mu^{a5} = \overline{Q}\gamma_\mu\gamma^5(\tau_a/2)Q$, $Q = (T, B)$ — технитварки. Если учесть электрослабые калибровочные взаимодействия, то техникварковый кинетический член

$$\overline{Q}_L i D Q_L + \overline{Q}_R i D Q_R \to \frac{F_T^2}{4}\,\mathrm{tr}\big((D_\mu U)^+(D_\mu U)\big). \tag{9}$$

Из соотношений (8,9) получаем эффективный лагранжиан, описывающий продольную связь $(W^\pm, Z)$ с $(\pi^\pm, \pi^0)$:

$$\frac{g_2}{2} F_T W_\mu^+ \partial^\mu \pi^- + \frac{g_2}{2} F_T W_\mu^- \partial^\mu \pi^+ + F_T\Big(\frac{g_2}{2} W_0 + \frac{g_1}{2} B_\mu\Big)\partial^\mu \pi^0. \tag{10}$$

Сравнивая (6) и (10), видим, что хиггсовское вакуумное среднее $v_0 = F_T$, если имеется один дублет технипионов. Если же N_D дублетов переносят слабые заряды, то соотношение (9) содержит N_D членов. F_T остается той же самой, но слабый масштаб становится равным $v_0 = \sqrt{N_D}F_T$.

Рассмотрим ТС калибровочную группу $SU(N_T)$ с N_D электрослабыми левыми дублетами и $2N_D$ синглетами правых техникварков в фундаментальном представлении. Сильная $SU(N_T)$ калибровочная группа будет формировать киральный конденсат,

связывая левые и правые фермионы. При этом возникает $(2N_D)^2 - 1$ голдстоуновских бозонов (технипионы π_T и синглет η'_T) с одинаковой константой распада F_T. Поэтому оценим F_T с помощью аналогичной величины f_π в КХД и скейлинговых свойств:

$$\begin{aligned} F_T &\sim \sqrt{\frac{N_T}{3}}\left(\frac{\Lambda_T}{\Lambda_{\text{КХД}}}\right) f_\pi; \\ v_0 = \sqrt{N_D} F_T &\sim \sqrt{\frac{N_D N_T}{3}}\left(\frac{\Lambda_T}{\Lambda_{\text{КХД}}}\right) f_\pi. \end{aligned} \tag{11}$$

Как было отмечено выше, v_0^2 получает вклады от N_D копий электрослабого конденсата. В ТС-моделях величина v_0 считается «входным параметром», определяемым константой G_F. Величина же Λ_T, а также N_T и N_D могут изменяться. Поэтому

$$F_T \sim v_0 \sqrt{\frac{1}{N_D}}, \quad \Lambda_T = \Lambda_{\text{КХД}} \frac{v_0\sqrt{3}}{f_\pi \sqrt{N_D N_T}}; \quad v_0 = 246 \text{ ГэВ}. \tag{12}$$

Определив подобным образом скейлинговые свойства основных величин, обратимся к обсуждению основных ТС-моделей.

2.2.2. Минимальная ТС-модель. В минимальной ТС-модели, введенной Вайнбергом и Сасскиндом, калибровочная группа — $SU(N_T) \times SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. В дополнение к обычным фермионам стандартной модели, учитывается по крайней мере один дублет синглетных по цвету технифермионов (T, B). Они формируют два киральных слабых дублета $(T, B)_L$ и $(T, B)_R$, поэтому киральная группа симметрии $SU(2)_L \times SU(2)_R \times [U(1)_A] \times U(1)_B$. Левый слабый дублет $(T, B)_L$ будет иметь $I = 1/2$ электрослабую $SU(2)_L$ калибровочную связь, а $(T, B)_R$ образуют пару синглетов. Калибровочные аномалии ТС и стандартной модели исчезают, если выбрать «векторподобное» заполнение слабого гиперзаряда:

$$\begin{aligned} Q_L^a &= \begin{pmatrix} T \\ B \end{pmatrix}_L^a, \quad (Y = 0); \\ Q_R^a &= (T_R, B_R)^a, \quad \frac{Y}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку «a» — ТС-индекс, имеется N_T ТС-копий этих объектов.

Можно обобщить модель, включив произвольное число ароматов, $N_D > 1$ дублетов синглетных по цвету технифермионов. При этом техникварки имеют электрические заряды $+1/2$ для T и $-1/2$ для B.

Если предположить, что ТС калибровочная константа задается более общей теорией (например, GUT или теорией струн) с условием объединения

$$\alpha_T(M_{\text{GUT}}) = \alpha_3(M_{\text{GUT}}), \tag{14}$$

то с помощью ренорм-группы получим в однопетлевом приближении ТС-масштаб Λ_T:

$$\frac{\Lambda_T}{\Lambda_{\text{КХД}}} = \exp\left[\frac{2\pi(b_0' - b_0)}{b_0 b_0' \alpha_3(M_{\text{GUT}})}\right]. \tag{15}$$

В этом выражении

$$b_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \quad b_0' = \frac{11 N_T}{3} - \frac{4}{3} N_D, \tag{16}$$

b_0 и b_0' — однопетлевые коэффициенты β-функции КХД и ТС. Если выбрать для оценки значения $N_T = 4$, $n_f = 6$, $N_D = 4$ и $\alpha_3^{-1}(M_{\text{GUT}}) \simeq 30$, то $\Lambda_T/\Lambda_{\text{КХД}} \simeq 8{,}2 \cdot 10^2$. При $\Lambda_{\text{КХД}} \simeq 200$ МэВ получаем $\Lambda_T \simeq 165$ ГэВ и $F_T \simeq 95$ ГэВ. Тогда предсказываемый

слабый масштаб $v_{\rm weak} \simeq 190$ ГэВ, что близко к ожидаемому значению в 175 ГэВ. Таким образом, минимальная ТС-модель объясняет электрослабую иерархию $v_0/M_{\rm Pl} \sim \sim 10^{-17}$ генерацией ТС массового масштаба $\Lambda_T \sim 10^2 \div 10^3$ ГэВ.

2.2.3. Спектроскопия минимальной ТС-модели. Очевидно, что спектр минимальной ТС-модели будет напоминать спектр КХД. Как видно из соотношения (11), техникварки приобретают конституэнтные массы $m_{TQ} \sim m_0 v_0 \sqrt{3}/f_\pi \sqrt{N_T N_D}$, где $m_0 \sim m_N/3 \sim 300$ МэВ — масса конституэнтного кварка в КХД. Для минимальной модели с $N_T = 1$, $N_D = 1$ масса техникварка $m_{TQ} \sim 690$ ГэВ. Поэтому спектр «барионов», состоящих из $QQQQ$, будет иметь масштаб масс $\sim 3/\sqrt{N_D}$ ТэВ. Пока мы не рассматриваем расширения техницвета (ЕТС), т. е. легчайший из этих барионов должен быть стабильным. В теории расширенного техницвета техникварки распадаются $Q \to q + X$, $Q \to l + X$, т. е. технибарионы нестабильны и распадаются на легкие кварки и лептоны. Например, конечное состояние может содержать 12 t- или b-кварков. Кроме этого замечательного проявления формирования технибарионов, при очень высоких энергиях ($E \gg 10$ ТэВ) возможно образование техниструй.

Обратимся теперь к мезонному спектру минимальной ТС-модели. Как и в случае КХД, спектр мезонов определяется киральной группой модели. При $N_D = 1$ киральная группа $SU(2)_L \times SU(2)_R \times [U(1)_A] \times U(1)_V$ (исключив калибровочные взаимодействия), т. е. имеется три безмассовых изовекторных псевдоскалярных намбу–голдстоуновских бозона $\pi_T^\pm$, π_T^0, которые называются технипионами. Константа распада технипионов $F_T = v_0/\sqrt{N_D} = 246/\sqrt{N_D}$ ГэВ, т. е. в моделях с одним слабым дублетом левых техникварков пионная константа и v_0 совпадают. Если включить калибровочные взаимодействия в $SU(2)_L \times U(1)_Y$-подгруппу киральной группы, то технипионы становятся продольными слабыми калибровочными бозонами $W_L^\pm$ и Z_L. При $N_D = 1$ единственный намбу–голдстоуновский бозон, соответствующий спонтанному нарушению некалибровочной $U(1)_A$-подгруппы киральной группы, — изосинглетный техни-η', η_T. Это аналог η'-мезона в КХД. Мезон η'_T приобретает массу за счет ТС-инстантонов.

$U(1)_A$-симметрия нарушена аксиальной аномалией, т. е. треугольной диаграммой с испусканием двух техниглюонов. Аномалия подавлена в пределе больших N_T, оценка массы техни-η' для $N_T = 4$ и $N_D = 1$: $m_{\eta' TC} \simeq \dfrac{3\sqrt{6}}{2N_T}\sqrt{\dfrac{3}{N_T N_D}}\dfrac{v_0}{f_\pi} m'_\eta \simeq 2$ ТэВ.

Что касается распадных мод техни-η', то основными являются $\eta'_T \to ZZ, \gamma Z, \gamma\gamma$ и $\eta'_T \to W^+W^-Z, ZZZ$ — аналогично многопионным и фотонным распадам η' в КХД. Однако η'_T может также распадаться на два глюона или $t\bar{t}$-пару. Эти распадные моды определяются деталями связей обычных кварков и лептонов, и это есть предмет изучения ЕТС-моделей, рассматриваемых ниже. Здесь же приведем оценки ширин распада

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\eta'_T \to t\bar{t}) &\sim \left(\frac{3}{N_T}\right)\frac{107\lambda^2}{\sqrt{N_D}} \text{ МэВ};\\
\Gamma(\eta'_T \to gg) &\sim \left(\frac{3}{N_T}\right)\frac{56}{\sqrt{N_D}} \text{ МэВ};\\
\Gamma(\eta'_T \to W^+W^-) &\sim \left(\frac{3}{N_T}\right)\frac{26}{\sqrt{N_D}} \text{ МэВ},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где параметр λ описывает ЕТС-связь η'_T с t-кварком.

Теперь рассмотрим случай растущего числа технидублетов. Для $N_D > 1$ сначала для простоты исключим калибровочные взаимодействия стандартной модели. Тогда

наша $SU(N_T)$-теория имеет глобальную киральную группу $SU(2N_D)_L \times SU(2N_D)_R \times$ $\times \times [U(1)_A] \times U(1)$. Это приводит к $(2N_D)^2 - 1$ намбу–голдстоуновским бозонам π_T^a в присоединенном представлении $SU(2N_D)$ и синглету η'_T. Это аналоги псевдоскалярного октета π, K, η в КХД и синглета η'. Поскольку техникварки не несут КХД-цвета, намбу–голдстоуновские бозоны будут бесцветными.

Если включить калибровочные взаимодействия, то $SU(2)_L \times U(1)_Y$ становится калибровочной подгруппой полной киральной группы $SU(2N_D)_L \times SU(2N_D)_R \times$ $\times$ $[U(1)_A] \times U(1)$. При восстановлении электрослабых взаимодействий линейные комбинации намбу–голдстоуновских бозонов (NGB) придают массы W и Z. Таким образом, из NGB формируется несколько классов объектов. Некоторые из оставшихся π_T переносят электрослабые заряды и образуют линейные представления $SU(2)_L$. Эти NGB соответствуют генераторам $SU(2N_D)_L \times SU(2N_D)_R$, которые не коммутируют с $SU(2)_L \times U(1)$-подгруппой. Они являются аналогами K-мезонов в $SU(3)$, которые образуют линейные изодублеты. Кроме того, имеются обобщения состояния η в КХД, являющиеся изосинглетами. Эти объекты соответствуют генераторам, которые коммутируют с $SU(2)_L \times U(1)_Y$, но не приобретают масс за счет калибровочных связей.

Для классификации технипионов полезно использовать обозначения прямого матричного произведения. Сначала пренебрежем $U(1)_Y$. Тогда модель содержит $SU(2N_D)$ векторную подгруппу киральной группы. Эта группа имеет $4N_D^2 - 1$ генераторов. Мы можем представить все N_D дублетов в виде вектор-столбца, т. е. фундаментального представления $SU(2N_D)$. С другой стороны, горизонтальная подгруппа ароматов, действующая на слабые дублеты, — $SU(N_D)$. Следовательно, можно классифицировать генераторы, ассоциированные с NGB, согласно их трансформационным свойствам относительно прямого произведения $SU(2)_L$ и $SU(N_D)$.

1) Три генератора $SU(2)_L$ записываются как прямое произведение $\tau^a \otimes I_d$, где I_d — d-мерная единичная матрица, действующая на левые дублеты. Поэтому три NGB, соответствующие генераторам $\tau^a \otimes I_d$, становятся $W_L^{\pm}$ и Z_L.

2) Имеется $3N_D^2 - 3$ матриц вида $\tau^a \otimes \lambda^A$, являющиеся $N_D^2 - 1$ генераторами $SU(N_D)$. Так как эти матрицы не коммутируют с $\tau^a \otimes I_d$ $SU(2)_L$-зарядами, то $3N_D^2 - 3$ NGB несут $SU(2)_L$-заряд. Эти заряженные NGB приобретают массу при «включении» калибровочных взаимодействий. Ситуация напоминает расщепление масс $\pi^{\pm}$ по отношению к π^0 за счет связи с электромагнетизмом.

3) Матрицы типа $I_2 \otimes \lambda^A$ коммутируют с $SU(2)_L$, поэтому имеется $N_D^2 - 1$ состояний, стерильных относительно преобразований из $SU(2)_L$. Эти NGB остаются безмассовыми, и их можно назвать техниаксионами.

4) Наконец, элемент $I_2 \otimes I_d$ соответствует η'_T.

Для случая $N_D = 2$ обсужденное выше разложение представлено на рис. 1.

Подобный анализ с учетом $U(1)_Y$ добавляет немного информации. NGB, несущие заряд относительно $U(1)_Y$, задаются генераторами, не коммутирующими с $Y \otimes I_d$. Это электрически заряженные технипионы, следовательно, проще исследовать свойства относительно преобразований $U(1)_{EM}$. Техниаксионы же нейтральны относительно $U(1)_Y$, т. е. стерильны относительно всех калибровочных преобразований.

Для оценки масс заряженных NGB снова воспользуемся КХД как «аналоговым компьютером» и изменим разности квадратов масс $\pi^{\pm}$- и π^0-мезонов. Тогда разность квадратов NGB, несущих слабый заряд, $m_{\pi_T}^2 \sim \alpha_2 \Lambda_T^2$ или $m_{\pi_T} \sim 6$ ГэВ. К сожалению, (для минимальной ТС-модели) заряженные скаляры с такими массами исключены экспериментально.

Электрически нейтральные NGB остаются безмассовыми. В частности, на пертурбативном уровне остаются безмассовыми техниаксионы, поскольку они соответствуют остаточной глобальной симметрии (спонтанно нарушенной).

$$\begin{pmatrix} \tau^a & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \tau^a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} T_1 \\ B_1 \\ T_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad \pi^+,\ \pi^-,\ \pi^0 = W_L^+,\ W_L^-,\ Z_L$$

$$\begin{pmatrix} \tau^a & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & -\tau^a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \tau^a \\ \cdots & & \cdots \\ \tau^a & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \vdots & i\tau^a \\ \cdots & & \cdots \\ -i\tau^a & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad 9\ \text{NGB}$$

$$\begin{pmatrix} I & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & -I \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \vdots & I \\ \cdots & & \cdots \\ I & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \vdots & iI \\ \cdots & & \cdots \\ -iI & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad 3\ \text{техниаксиона}$$

Рис. 1

В ТС-модели существуют изовекторные и изосинглетные s-волновые векторные мезоны, аналоги $\rho(770)$ и $\omega(782)$ в КХД, обозначаемые $\rho_T^{\pm}$, ρ_T^0 и ω_T^0. Векторные мезоны особенно важны с феноменологической точки зрения, поскольку они распадаются на слабые калибровочные бозоны и технипионы (например, $\rho_T \to WW$ по аналогии с $\rho \to \pi\pi$). Векторные мезоны могли бы проявляться в виде резонансных структур в процессах типа $pp, e^+e^- \to W^+W^-$. Массы векторных мезонов можно оценить с помощью ТС-скейлинга: $m_\rho \sim m_{\omega TC} \sim m_\rho(F_T/f_\pi) \sim m_\rho(v_0/f_\pi)\sqrt{3/N_TN_D}$. Эта оценка для $N_T = 4$ дает $m_{\rho,\omega TC} \sim 1{,}8/\sqrt{N_D}$ ТэВ. Следуя анализу распадов векторных мезонов в КХД, введем безразмерные феноменологические константы распадов $f_{\rho TC}$ и $f_{\omega TC}$:

$$\begin{aligned} \langle \rho_T^a | j_\mu^b | 0 \rangle &= \varepsilon_\mu \delta^{ab} \frac{m_{\rho TC}^2}{f_{\rho TC}}, \\ \langle \omega_T | j_\mu^0 | 0 \rangle &= \varepsilon_\mu \frac{m_{\omega TC}^2}{f_{\omega TC}}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $j_\mu^0 = \overline{Q}\gamma_\mu Q/\sqrt{2}$, $j_\mu^{0,a} = \overline{Q}\gamma_\mu(\tau^a/2)Q$ и Q — техникварковый дублет.

В КХД довольно трудно извлечь f_ω из-за $\omega - \phi$ смешивания, поэтому обычно предполагается нонетная симметрия: $f_\rho = f_\omega$. Тогда константы распада можно определить из парциальной ширины $\Gamma(\rho^0 \to e^+e^-) = 4\pi\alpha m_\rho/3f_\rho^2$. Отсюда $f_\rho \simeq f_\omega \simeq 5{,}0$.

Определим, какому ТС-скейлингу удовлетворяют f_ρ и f_ω. Заметим, что матричные элементы токов (18) содержат синглетную комбинацию техникварков, и поэтому, по аналогии с КХД, должны быть пропорциональны $\sim \sqrt{N_T/3}(\Lambda_T/\Lambda_{\text{КХД}})^2$. Однако для фиксированного v_0 эти матричные элементы $\sim (v_0/f_\pi)^2\sqrt{3/N_TN_D^2}$, поэтому величина $m_{\rho TC}/f_{\rho TC} \sim \sqrt{3/N_TN_D^2}$. Поскольку $m_{\rho TC} \sim \sqrt{3/N_TN_D}$, то

$$f_{\rho TC} \sim \sqrt{\frac{3}{N_T}} f_\rho \sim 4{,}3 \quad \text{для} \quad N_T = 4. \tag{19}$$

В ТС-модели моды распада $\rho_T^{\pm} \to W_L^{\pm}Z_L$; $\rho_T^0 \to W_L^+W_L^-, 2Z_L$; $\omega_T \to W_L^+Z_LW_L^-$, $\omega_T \to Z\gamma, ZZ, WW$. Скейлинг, аналогичный КХД, дает для ширин

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho_T^0 \to W^+W^- + 2Z) &\sim \left(\frac{3k_1}{N_T}\right)\frac{m_{\rho_T}}{m_\rho}\Gamma(\rho \to \pi^+\pi^-) \sim \left(\frac{3}{N_T}\right)^{3/2}\frac{280}{\sqrt{N_D}}\ \text{ГэВ}, \\ \Gamma(\rho_T^{\pm} \to W^{\pm}Z) &\sim \left(\frac{3k_1}{N_T}\right)\frac{m_{\rho_T}}{m_\rho}\Gamma(\rho \to \pi^+\pi^-) \sim \left(\frac{3}{N_T}\right)^{3/2}\frac{280}{\sqrt{N_D}}\ \text{ГэВ}, \\ \Gamma(\omega_T \to W_L^+Z_LW_L^-) &\sim k_2\left(\frac{3}{N_T}\right)^{5/2}\frac{m_{\omega_T}}{m_\omega}\Gamma(\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0) \sim \frac{35}{\sqrt{N_D}}\ \text{ГэВ}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $k_1 \simeq 1{,}2$, $k_2 \simeq 4$.

Партнерами по четности ρ_T и ω_T являются p-волновые аксиально-векторные мезоны a_{1T} и f_{1T}. Вновь пользуясь КХД-скейлингом, получим оценки масс $m_{a_{1T}} \simeq \simeq m_{f_{1T}} \sim m_{a_1,f_1}(1200)(v_0/f_\pi)\sqrt{3/N_T N_D} \sim 2{,}9/\sqrt{N_D}$ ТэВ. Спектр будет также включать p-волновых партнеров π_T и η_T: изотриплетные и изосинглетные мультиплеты 0^+-мезонов — аналогов $a_0^\pm$, a_0^0 и f_0 в КХД. Их массы $m_{a_{0T}} \simeq m_{f_{0T}} \sim m_{a_0,f_0}(980) \times \times (v/f_\pi)\sqrt{3/N_T N_D} \sim 2{,}2/\sqrt{N_D}$ТэВ.

В табл. 1 представлена спектроскопия и распады основных компонент минимальной ТС-модели.

Таблица 1

Состояние	$\boldsymbol{I(J^{PC})}$	**Масса (ТэВ)**	**Ширина распада (ГэВ)**
$\pi_T^\pm, \pi_T^0 \to W_L^\pm, Z_L$	$1(0^{-+})$	$M_W,\ M_Z$	$\Gamma_W,\ \Gamma_Z$
η_T^0	$0(0^{-+})$	$\sim rm_\eta \sim 0{,}4$	$\Gamma_{t\bar t} \sim 8 \div 64$, $\Gamma_{gg} \sim 0{,}3 \div 3{,}0$
$\rho_T^\pm,\ \rho_T^0$	$1(1^{--})$	$\sim qm_\rho/s \sim 1{,}2$	$\Gamma_{\rho_T}(WW) \sim \Gamma_\rho(\pi\pi)/sq^2 \sim 350$
ω_T^0	$0(1^{--})$	$\sim qm_\omega/s \sim 1{,}2$	$\Gamma_{\omega_T}(WWZ) \sim \Gamma_\omega(\pi\pi\pi)/sq^2 \sim 80$
$a_{0T}^\pm,\ a_{0T}^0$	$1(0^{++})$	$rm_{a_0} \sim 1{,}5$	$\eta_T W^\pm$, $\eta_T Z^0$, $\Gamma \sim \Gamma_{a_0}/s \sim 100$
$f_{0T}^0 \sim \sigma_T$	$0(0^{++})$	$qf_0/s \sim 2$	$\Gamma \sim \Gamma_{f_0}/s \sim 1000$
$a_{1T}^\pm,\ a_{1T}^0$	$1(1^{++})$	$qm_{a_1}/s \sim 2$	$\Gamma(WW) \sim \Gamma_{a_1}/s \sim 700$
f_{1T}	$0(1^{++})$	$qm_{f_1}/s \sim 2$	$\Gamma(4W) \sim \Gamma_{f_1}/s \sim 100$

Данные в табл. 1 приведены для случая $N_D = 1$, $N_T = 4$; $q = \sqrt{3/N_T} \simeq 0{,}86$, $r = \Lambda_T/\Lambda_{\text{КХД}} \simeq 1{,}5 \cdot 10^3$; $s = f_\pi/F_T \simeq 5{,}7 \cdot 10^{-4}$.

2.3. Модель Farhi–Susskind (FS)

Минимальная модель не является единственной конструкцией ТС-теории. Рассмотрим более сложную модель, включающую «кварковый» сектор цветового триплета техникварков и «лептонный» сектор синглетных по цвету технифермионов. Модель FS можно рассматривать как расширение минимальной модели, имитирующее одно поколение кварков и лептонов:

$$Q_L = \begin{pmatrix} T \\ B \end{pmatrix}_L^i, \quad Y = y\begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}_L, \quad Y = -3y,$$
$$Q_R = (T_R^i, B_R^i, N_R, L_R), \quad Y = (y+1, y-1, -3y+1, -3y-1), \tag{21}$$

где цветовой индекс $i = 1, 2, 3$ для техникварков. Представление (21) — свободно от аномалий для произвольного выбора параметра y. При стандартном выборе $y = 1/3$ техникварки и технилептоны имеют идентичные электрические заряды с кварками и лептонами. В FS-модели техникварки и технилептоны связаны обычным образом с калибровочной группой $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

В этой модели каждый Q-мультиплет несет и $SU(N_{\text{TC}})$ квантовые числа в N_{TC}-представлении сильной ТС калибровочной группы. Заметим, что существование правого технинейтрино N_R необходимо для сокращения аномалии ТС калибровочных взаимодействий. Таким образом, $SU(N_{\text{TC}})$ — калибровочная горизонтальная симметрия поколений.

В отличие от минимальной модели с $N_D = 1$, в которой все три NGB поглощаются продольными модами электрослабых калибровочных бозонов, в FS-модели низкоэнергетический спектр содержит много NGB. Их квантовые числа можно установить

в пределе исчезающих связей с группой $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. В этом случае глобальной киральной группой будет $SU(8)_L \times SU(8)_R \times U(1)_A \times U(1)$. На масштабе Λ_{TC} TC калибровочные связи становятся сильными, и это приводит к формированию конденсата:

$$\langle \overline{T}_{Li} T_{Ri} \rangle = \langle \overline{B}_{Li} B_{Ri} \rangle = \langle \overline{N}_L N_R \rangle = \langle \overline{E}_L E_R \rangle \sim \Lambda^3_{\text{TC}}, \tag{22}$$

где введен несуммируемый цветовой индекс $i = 1, 2, 3$. Таким образом, киральная группа симметрии оказывается нарушенной до $SU(8) \times U(1)$ векторной симметрии. При этом возникает $63 + 1$ NGB. С точки зрения киральных конденсатов в (22), можно считать, что существуют четыре составных электрослабых дублета. Ситуация напоминает 4-хиггсовскую дублетную модель, в которой каждый Хиггс-бозон получает общее вакуумное среднее F_T. Электрослабый масштаб $v_0^2 = 4F_T^2$, т.е. $F_T = 123$ ГэВ. Одна из комбинаций NGB становится продольными компонентами W и Z, ортогональная же к ней комбинация, как мы увидим ниже, остается в спектре.

2.3.1. Спектроскопия FS-модели. Обсудим более подробно состав (8×8) NGB модели FS. Как и можно было ожидать, увеличение числа технифермионов расширяет число NGB-состояний. Их свойства суммированы в табл. 2.

Таблица 2

Состояние	**$I[J^P]$, цвет, $[Q]$**	**Масса (ГэВ)**
$\pi_T^- \sim (\overline{T}_i B^i + \overline{N} E)$	$1[0^-, 1^-]0[-1]$	M_W
$\pi_T^0 \sim (\overline{T}_i T^i - \overline{B}_i B^i + \overline{N} N - \overline{E} E)$	$1[0^-, 1^-]0[0]$	M_Z
$\eta'_T \sim (\overline{T}_i T^i + \overline{B}_i B^i + \overline{N} N + \overline{E} E)$	$1[0^-, 1^-]0[0]$	$\sim 10^3$
$P^+ \sim (\overline{B}_i T^i - 3\overline{E} N)$	$1[0^-, 1^-]0[1]$	$\sim 100(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$
$P^0 \sim (\overline{T}_i T^i - \overline{B}_i B^i - 3(\overline{N} N - \overline{E} E))$	$1[0^-, 1^-]0[0]$	~ 100[ETC]
$P^{0'} \sim (\overline{T}_i T^i - \overline{B}_i B^i - 3(\overline{N} N + \overline{E} E))$	$0[0^-, 1^-]1[0]$	~ 100[ETC]
$P_3^1 \sim \overline{E} T$	$1[0^-]3[5/3]$	$\sim 160(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$
$P_3^0 \sim \overline{N} T - \overline{E} B$	$1[0^-]3[2/3]$	$\sim 160(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$
$P_3^{-1} \sim \overline{N} B$	$1[0^-]3[-1/3]$	$\sim 160(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$
$P'_3 \sim \overline{N} T + \overline{E} B$	$0[0^-]3[2/3]$	$\sim 160(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$
$P_8^+ \sim \overline{B} T$	$1[0^-]8[1]$	$\sim 240(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$
$P_8^0 \sim \overline{T} T - \overline{B} B$	$1[0^-]8[0]$	$\sim 240(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$
$P_8^{0'} \sim \overline{T} T + \overline{B} B$	$0[0^-]8[0]$	$\sim 240(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$

Начнем с восьми синглетных по цвету состояний. Три линейных комбинации — безмассовые, и они становятся продольными $W^\pm$ и Z^0:

$$\overline{T}_i B^i + \overline{N} E \sim \pi^-, \quad \overline{B}_i T^i + \overline{E} N \sim \pi^+, \quad \overline{T}_i T^i - \overline{B}_i B^i + \overline{N} N - \overline{E} E \sim \pi_L^0. \tag{23}$$

Из оставшихся пяти ортогональных цветовых синглетов два имеют отличный от нуля электрический заряд:

$$\overline{T}_i B^i - 3\overline{N} E \sim P^-, \quad \overline{B}_i T^i - 3\overline{E} N \sim P^+ \tag{24}$$

и три электрически нейтральны:

$$\begin{gathered} \overline{T}_i T^i - \overline{B}_i B^i - 3(\overline{N} N - \overline{E} E) \sim P^0, \\ \overline{T}_i T^i + \overline{B}_i B^i - 3(\overline{N} N + \overline{E} E) \sim P^{0'}, \\ \overline{T}_i T^i + \overline{B}_i B^i + \overline{N} N + \overline{E} E \sim \eta'_T. \end{gathered} \tag{25}$$

NGB, нейтральные относительно калибровочных преобразований, получают массу за счет инстантонов; η'_T получает массу за счет ТС-инстантонов, и ожидается, как и в минимальной модели, достаточно тяжелым. Его массу можно оценить следующим образом: $m_{\eta'_{\text{TC}}} \sim (\sqrt{6}/N_T)\sqrt{3/N_D N_T}(v_0/f_\pi)m'_\eta \sim 700$ ГэВ для $N_T = 4$ ($N_D = 4$ в FS-модели). Состояние $P^{0'}$ получает массу ~ 1 ГэВ за счет КХД-инстантонов, а также гораздо больший вклад за счет ЕТС-эффектов (см. ниже).

NGB с электрослабыми калибровочными зарядами P_0^Q приобретают массы вследствие калибровочных взаимодействий, аналогично электромагнитному расщеплению масс π^+ и π^0 в КХД: $\delta m_\pi^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 \simeq (35 \text{ МэВ})^2$. В киральном пределе ($m_u = m_d = 0$) $m_{\pi^0}^2 = 0$, т. е. δm_π^2 соответствует электромагнитному вкладу в массы $\pi^\pm$. Снова пользуясь скейлингом, оценим вклад электрослабых взаимодействий в массу технипиона: $m_{P_0^\pm}^2 \sim F_T^2 \delta m_\pi^2 / f_\pi^2 \sin\theta_W$. Численно $m_{P_0^\pm} \sim 100(4/N_{\text{TC}})^{1/2}$ ГэВ.

Массы P_0^0 и P'_0 возникают только за счет ЕТС-взаимодействий.

Спектр FS-модели включает также технипионы с ненулевым цветовым зарядом: технилептокварк NGB $P_3 \sim \overline{L}Q$ и цветовой октет NGB: $P_8 \sim \overline{Q}(\lambda^A/2)Q$.

Триплетные по цвету технипионы (лептокварки) распадаются следующим образом: $P_3 \sim q\bar{l}$ (если $y \neq 1/3$, то эти объекты стабильны). Октетные по цвету технилептоны распадаются на $\overline{q}q$ в конечном состоянии: $P_8 \to \overline{q}q + \ldots$

Как и в случае минимальной модели, в FS-модели имеются s-волновые векторные ($J = 1$) состояния $\rho_T(V_T)$. Оценка масс этих состояний:

$$M(\rho_T, V_T) \sim 700\left(\frac{4}{N_{\text{TC}}}\right)^{1/2} \text{ ГэВ}. \tag{26}$$

FS-модель содержит и p-волновые партнеры по четности NGB: техни-a_0 и техни-f_0, а также аксиально-векторные мезоны a_{1T} и f_{1T}. Оценки их масс:

$$\begin{aligned} M(a_{1T}, f_{1T}) &\sim 1700\left(\frac{4}{N_{\text{TC}}}\right)^{1/2} \text{ ГэВ}, \\ M(a_{0T}, f_{0T}) &\sim 1300\left(\frac{4}{N_{\text{TC}}}\right)^{1/2} \text{ ГэВ}. \end{aligned} \tag{27}$$

2.4. Расширенный техницвет (ETC)

2.4.1. Общая структура ETC. Реалистическая модель техницвета должна рассматривать проблему ароматов. Иными словами, так или иначе включать механизм генерации масс кварков и лептонов, смешивания и CP-нарушения. Это подразумевает связь обычных кварков и лептонов стандартной модели с техфермионным конденсатом, нарушающую электрослабую симметрию. Кроме того, в реалистической ТС-модели должен быть механизм нарушения технибарионного квантового числа: техникварки должны быть нестабильными, поскольку стабильные технибарионы создают космологические проблемы.

Чтобы удовлетворить этим требованиям, можно расширить техницветные калибровочные взаимодействия, включив дополнительные калибровочные бозоны, связанные как с обычными, так и с техницветными фермионами. Расширенные взаимодействия являются частью большой калибровочной группы, которая нарушается до техницветной подгруппы при энергиях, на которых связь техницвета становится сильной.

2.4.2. Калибровочная группа G_{ETC}. Новые взаимодействия в ETC должны учитывать возможности переходов технифермионов $Q_{L,R}$ в обычные кварки и лептоны $\psi_{L,R}$. Иначе говоря, нужны токи типа $\overline{Q}_{L,R}\gamma_\mu\psi_{L,R}$, связанные с новыми ETC калибровочными бозонами. В «полной» теории следует допустить существование большой калибровочной группы G_{ETC}, которая содержит все желаемые токи $\overline{Q}Q$, $\overline{Q}\psi$ и $\overline{\psi}\psi$. Проще всего включить группу $SU(N_{\text{TC}})$ в группу $SU(N_{\text{ETC}})$ с $N_{\text{ETC}} > N_{\text{TC}}$. Очевидно, что N_{ETC} должно быть достаточно большим, чтобы включать представления, содержащие как ψ, так и Q.

Для примера рассмотрим, как бы это включение могло «работать» в минимальной модели. Минимальная модель содержит один слабый дублет технифермионов ($N_D = 1$), поэтому типичный выбор для группы техницвета $N_{\text{TC}} = 4$. ETC должен связывать технифермионы всех 12-ти левых электрослабых дублетов обычных кварков и лептонов с 12-тью синглетами. Тогда мы можем рассматривать обычные фермионы одного поколения относительно $SU(2)_L$ состоящими из 3 дублетов кварков и одного дублета лептонов. Аналогично формируются дублеты и относительно действия глобальной группы $SU(2)_R$. Таким образом, возникает ETC-схема с калибровочной группой $G_{\text{ETC}} = SU(16) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$. Как $SU(N_{\text{TC}})$, так и $SU(3)_C$ включены в $SU(16)$. Очевидно и определение гиперзаряда в этой группе: $Y/2 = I_{3R} + (B - L)/2$, $(B - L)$ — диагональный оператор $SU(16)$. Фермионы формируют два фундаментальных 16-плета. Один из них:

$$(Q_c, Q_k, Q_m, Q_y, \psi_r^1, \psi_g^1, \psi_b^1, \psi_r^2, \psi_g^2, \psi_b^2, \psi_r^3, \psi_g^3, \psi_b^3, \psi_{lep}^1, \psi_{lep}^2, \psi_{lep}^3)_L, \tag{28}$$

где c, k, m, y — техницвета, r, g, b — цвета. Это дублет относительно электрослабой группы $SU(2)_L$ и синглет относительно $SU(2)_R$. Техницветовой конденсат при этом будет нарушать как $SU(2)_L$, так и $SU(2)_R$. Что касается FS-модели, аналогичное ETC-расширение может привести к гигантской калибровочной группе, в которой все кварки, лептоны и техникварки принадлежат одному мультиплету. Такой группой могла бы быть $SU(56)$. Очевидно, что возможностей слишком много, и мы опишем лишь некоторые модели ETC.

Стартуя при высоких энергиях с теории, основанной на калибровочной группе G_{ETC}, при низких энергиях мы хотели бы получить калибровочные группы техницвета и стандартной модели. Группа G_{ETC} имеет генераторы T^a, образующие алгебру Ли:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T_c. \tag{29}$$

Группа техницвета G_{TC} должна быть подгруппой G_{ETC}, поскольку ψ не несут техницвета, а Q — несут. Тогда G_{ETC} на некотором масштабе Λ_{ETC} должна нарушаться до подгруппы G_{TC}:

$$G_{\text{ETC}} \to G_{\text{TC}} \times \ldots, \tag{30}$$

где точки обозначают другие группы, включая группу симметрии стандартной модели. При таком нарушении симметрии техницветные калибровочные бозоны (их генераторы обозначают $\tilde{T}^a$) остаются безмассовыми, а ETC калибровочные бозоны приобретают массы $\sim \Lambda_{\text{ETC}}$.

2.4.3. Низкоэнергетические «реликтовые» ETC-взаимодействия. Хотя единственными элементами первоначальной ETC калибровочной группы, «выживающими» при низких энергиях, являются генераторы техницветной и калибровочной группы стандартной модели, можно обнаружить и эффекты нарушенных ETC-генераторов. На масштабах энергий $\mu \leq \Lambda_{\text{ETC}}$ обмен тяжелыми ETC-бозонами, соответствующими нарушенным генераторам, вызывает три типа эффективных контактных

взаимодействий между обычными фермионами и технифермионами:

$$\overline{\alpha}_{ab}\frac{\overline{Q}\gamma_\mu\overline{T}^a Q\overline{Q}\gamma_\mu\overline{T}^b Q}{\Lambda^2_{\text{ETC}}}+\overline{\beta}_{ab}\frac{\overline{Q}\gamma_\mu\overline{T}^a\psi\overline{\psi}\gamma^\mu\overline{T}^b Q}{\Lambda^2_{\text{ETC}}}+\overline{\gamma}_{ab}\frac{\overline{\psi}\gamma_\mu\overline{T}^a\psi\overline{\psi}\gamma^\mu\overline{T}^b\psi}{\Lambda^2_{\text{ETC}}}. \tag{31}$$

В этом выражении α, β, γ — коэффициенты, связанные с индексами генераторов, и их структура зависит от конкретной модели ETC. При этом в $\overline{T}^a$ включены и киральные факторы $(1\pm\gamma_5)/2$. Воспользуемся преобразованием Фирца для приведения (31) к произведению скалярных и псевдоскалярных плотностей

$$\alpha_{ab}\frac{\overline{Q}T^aQ\overline{Q}T^bQ}{\Lambda^2_{\text{ETC}}}+\beta_{ab}\frac{\overline{Q}_LT^aQ_R\overline{\psi}_RT^b\psi_L}{\Lambda^2_{\text{ETC}}}+\gamma_{ab}\frac{\overline{\psi}_LT^a\psi_R\overline{\psi}_RT^b\psi_L}{\Lambda^2_{\text{ETC}}}+\ldots \tag{32}$$

Отметим, что после преобразования Фирца нужно включить в число генераторов единичную матрицу. Для этого достаточно увеличить число индексов генератора, положив $1=T^0$.

Следствием общего вида слагаемых (31), (32) будут физические эффекты ETC, выходящие за рамки генерации кварковых и лептонных масс, а также их смешиваний. ETC взаимодействия (как например α-член) могут увеличивать массы некоторых NGB (техниаксионов) до конечных ненулевых значений. Это положительный момент. Негативный же момент состоит в том, что γ-член вызывает 4-фермионные контактные взаимодействия между обычными фермионами с одинаковыми калибровочными зарядами стандартной модели. Это приводит к появлению при низких энергиях нейтральных токов с изменением аромата (FCNC). В частности, к угрожающе большой разности масс между K_L и K_S. При этом также происходит нарушение лептонного числа и усиление вероятности распада $\mu\to e+\gamma$. При построении конкретных моделей ETC необходимо подавить эти потенциально опасные эффекты.

2.4.4. α-члены и массы технипионов. Четырехтехнифермионные члены (с коэффициентами α) способны решить уже упомянутую выше проблему масс NGB. Петли, содержащие вставки с α-членами, индуцируют массы NGB (рис. 2). Этот механизм способен увеличивать массы нежелательно легких NGB до значений, совместимых с экспериментальными данными.

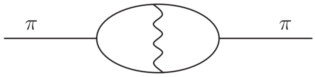


Рис. 2

Чтобы пояснить этот механизм генерации масс NGB, воспользуемся моделью Намбу–Иона–Ласинио (NJL) для техникваркового конденсата, заменив техникварковые билинейные комбинации в (32) соответствующими киральными полями:

$$\begin{aligned}\overline{Q}_{aR}Q^{\dot b}_L&\to cN_{\text{TC}}\Lambda^3_{\text{TC}}\Sigma^{\dot b}_a;\\ \Sigma^{\dot b}_a&\equiv\exp(i\pi^c\tilde{T}^c/F_T)^{\dot b}_a,\end{aligned} \tag{33}$$

где индексы с точкой относятся к $SU(2)_L$, без точки — к $SU(2)_R$; $\tilde{T}^a$ — генераторы подгруппы техницвета группы G_{ETC}. Тогда за счет диаграммы рис. 2 в эффективном лагранжиане возникает слагаемое с NGB-взаимодействием

$$\sim\frac{\alpha_{ab}c^2N^2_{\text{TC}}\Lambda^6_{\text{TC}}}{\Lambda^2_{\text{ETC}}}\,\text{tr}(\Sigma T^a\Sigma^+T^b). \tag{34}$$

Разлагая (34) по степеням $\pi^a\tilde{T}^a$, получим слагаемое с индуцированной массой технипиона:

$$\sim-\frac{\alpha_{ab}c^2N^2_{\text{TC}}\Lambda^6_{\text{TC}}}{\Lambda^2_{\text{ETC}}F^2_T}\,\text{tr}\big([\pi^c\tilde{T}^c,T^a][T^b,\pi^d\tilde{T}^d]\big). \tag{35}$$

Таким образом, технипионы, ассоциированные с техницветовыми генераторами $\tilde{T}^a$, коммутируют с ETC, т. е. для которых

$$[\tilde{T}^a, T^b] = 0, \tag{36}$$

будут за счет ETC-взаимодействий иметь нулевой вклад в массу. Технипионы же, связанные с некоммутирующими генераторами, получают ненулевой вклад в массу $\sim N_{\rm TC}\Lambda^2_{\rm TC}/\Lambda_{\rm ETC}$ вследствие ETC-взаимодействий.

Ситуация напоминает КХД: T^a аналогичны оператору электрического заряда, а $\tilde{T}^a$ — генераторам изоспина. Нейтральный пион в КХД связан с генератором I_3, коммутирующим с электрическим зарядом $Q = I_3 + Y/2$. Следовательно, нейтральный пион не получает вклада в массу за счет электромагнетизма. Заряженные пионы, связанные с генераторами $I_1 \pm iI_2$, не коммутирующими с Q, наоборот, получают ненулевой электромагнитный вклад в их массы.

Среди NGB, возникающих в минимальной или FS-модели, техниаксионы способны приобретать массы лишь за счет ETC-взаимодействий. В ETC оценка массы техниаксиона

$$M^2_{\text{аксион}} \simeq \frac{1}{N_{\rm TC}}(\text{несколько ГэВ})^2. \tag{37}$$

Как будет видно ниже, электрически заряженные NGB получают массы за счет ETC, но этот вклад оказывается малым по сравнению с электромагнитным вкладом. Аналогично, цветные состояния P_3 и P_8 FS-модели формируют массы в КХД.

2.4.5. β-члены и массы лептонов и кварков. Слагаемые в (32) с коэффициентами β_{ab}, «ответственны» за формирование масс и углов смешивания обычных кварков и лептонов. Техницвет конденсирует технифермионы $\langle\overline{Q}Q\rangle \sim N_{\rm TC}\Lambda^3_{\rm TC}$. Естественный масштаб ETC-индуцированных кварковых и лептонных масс

$$m_{q,l} \sim \beta\frac{N_{\rm TC}\Lambda^3_{\rm TC}}{\Lambda^2_{\rm ETC}}. \tag{38}$$

Если выбрать $m_q \sim m_{\rm charm} \sim 1$ ГэВ и $\Lambda_{TC} \simeq 100$ ГэВ, то для $\beta \sim 1$ $\Lambda_{\rm ETC} \leq 10^3$ ГэВ. Таким образом, значения масс обычных кварков и лептонов дают верхнюю границу на величину $\Lambda_{\rm ETC}$.

Эффекты высших порядков от β-членов имеют наблюдаемые следствия. Важной величиной для построения «реалистических» ETC-моделей, является отношение

$$R_b = \frac{\Gamma(Z \to b\bar{b})}{\Gamma(Z \to \text{адроны})}. \tag{39}$$

В классической ETC-модели масса t-кварка генерится в результате обмена ETC калибровочным бозоном (электрослабым синглетом) массы $M_{\rm ETC} \sim g_{\rm ETC}\Lambda_{\rm ETC}$. При энергиях, ниже $M_{\rm ETC}$, обмен ETC калибровочным бозоном можно аппроксимировать локальными 4-фермионными операторами. При этом m_t возникает за счет операторной связи левых и правых токов:

$$-\frac{g^2_{\rm ETC}}{M^2_{\rm ETC}}(\overline{\psi}^i_L\gamma^\mu T^{i\omega}_L)(\overline{U}^\omega_R\gamma_\mu t_R) + \text{э.с.}, \tag{40}$$

где $T = (U, D)$ — технифермионы; i, k — слабые и техницветные индексы.

Предполагая существование единственного слабого дублета технифермионов, получаем

$$m_t = \frac{g^2_{\rm ETC}}{M^2_{\rm ETC}}\langle\overline{U}U\rangle \simeq \frac{\Lambda^3_{\rm TC}}{\Lambda^2_{\rm ETC}}. \tag{41}$$

ETC-бозон, генерирующий m_t за счет взаимодействий (40), в свою очередь, индуцируется оператором

$$-\frac{g_{\text{ETC}}^2}{M_{\text{ETC}}^2}(\overline{\psi}^i_L\gamma^\mu T_L^{i\omega})(\overline{T}^i_L\gamma^\mu\psi_L^{i\omega}) + \text{э.с.} \tag{42}$$

Этот оператор, как видно из рис. 3, изменяет вершину Zbb:

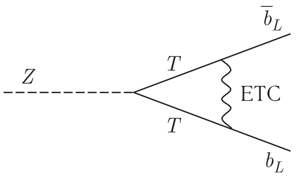


Рис. 3

Этот процесс изменяет древесное значение вершины взаимодействия Z-бозона с левыми b-кварками:

$$g_L = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}, \tag{43}$$

внося поправку

$$\delta g_L^{\text{ETC}} = -\frac{\xi^2}{2}\frac{\Lambda_{\text{TC}}}{\Lambda_{\text{ETC}}^2}\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}(I_3) = \frac{1}{4}\xi^2\frac{m_t}{\Lambda_{\text{TC}}}\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}. \tag{44}$$

В этом выражении ξ — параметр смешивания углов между W, Z и ETC калибровочным бозоном. Сдвиг в g_L изменяет величину R_b в (39), причем

$$\frac{\delta R_b}{R_b} \simeq -5\,\% \cdot \xi^2\left(\frac{m_t}{175\ \text{ГэВ}}\right). \tag{45}$$

Такой большой сдвиг мог бы быть обнаружен в электрослабых данных. Экспериментальное значение $R_b = 0{,}2179 \pm 0{,}0012$ находится в согласии с предсказаниями стандартной модели.

2.4.6. γ-члены и нейтральные токи с изменением аромата (FCNC). Ограничения, связанные с ненаблюдаемостью FCNC, дают возможность исключения в классических ETC-моделях генерации больших фермионных масс. Поскольку для обеспечения наблюдаемых масс фермионов, ETC должен быть по-разному связан с фермионами, имеющими одинаковые калибровочные заряды стандартной модели (например, с e, μ, τ), то это автоматически приводит к FCNC. Возникают взаимодействия типа

$$\frac{(\overline{s}\gamma^5 d)(\overline{s}\gamma^5 d)}{\Lambda_{\text{ETC}}^2} + \frac{(\overline{\mu}\gamma^5 e)(\overline{e}\gamma^5 e)}{\Lambda_{\text{ETC}}^2} + \ldots, \tag{46}$$

которые, в принципе, могли бы быть наблюдаемыми. Например, первое слагаемое в (46) вызывает $\Delta S = 2$ FCNC и дает вклад в хорошо измеряемую разность масс K_L- и K_S-мезонов. Матричный элемент оператора перехода между K^0 и $\overline{K}^0$

$$\frac{\delta m^2}{m_K^2} \sim \gamma\frac{f_K^2 m_K^2}{\Lambda_{\text{ETC}}^2} \leq 10^{-14}, \tag{47}$$

где для реалистичных моделей $\gamma \sim \sin^2\theta_C \sim 10^{-2}$. Тогда из (47) получаем ограничение

$$\Lambda_{\text{ETC}} \geq 10^3\ \text{ТэВ}. \tag{48}$$

Что касается второго слагаемого в (46), то оно индуцирует процессы с нарушением лептонного аромата: $\mu \to e\bar{e}e, e\gamma$. Если выбрать экспериментальные ограничения на сечения этих процессов, получим несколько более слабое, чем в (48), ограничение $\Lambda_{\text{ETC}} \geq 10^1$ ТэВ. Если использовать ограничение (47) в (38), то для $\alpha \sim \beta \sim \gamma$, $\Lambda_{\text{TC}} \leq 1$ ТэВ, $\beta \leq 10$, $N_{\text{TC}} \leq 10$ можно получить

$$m_{q,l} \leq N_{\text{TC}} \frac{\Lambda_{\text{TC}}^3}{\Lambda_{\text{ETC}}^2} \leq 100 \text{ МэВ}. \tag{49}$$

Очевидно, что на классическом уровне ЕТС возникают проблемы уже с массой очарованного кварка. Лекарство для лечения этой «болезни» будет найдено в модели «бегущего» техницвета. Мы пока оставим эту проблему и обратимся к некоторым моделям ЕТС.

2.5. Некоторые модели ЕТС

2.5.1. Техни-ГИМ (TC GIM). Как мы уже отмечали выше, одна из существенных проблем ЕТС — найти способ подавления FCNC, возникающих за счет γ-членов. Хотелось бы найти механизм, в котором $\gamma \ll \beta$. Одна из возможностей — включить хорошо известный механизм ГИМ в ЕТС-сектор (TC GIM). Попытаемся построить модель так, чтобы коэффициенты β были порядка единицы (чтобы массы фермионов были как можно больше), а ГИМ-сокращение давало коэффициенты $\gamma \ll \beta$, подавляя тем самым нежелательные FCNC с $\Delta S = 2$. Оказывается ГИМ-механизм способен привести в (46) к фактору подавления $\sim \Lambda_{\text{TC}}^2/\Lambda_{\text{ETC}}^2$. Тогда нижняя граница на $\Lambda_{\text{ETC}} > 10$ ТэВ, а это допускает генерацию кварковых масс на уровне ~ 10 ГэВ. Это решает проблему c- и b-кварков, но остается проблема с массой t-кварка.

Для «запуска» механизма ГИМ достаточно ввести для каждого фермионного семейства с одинаковым слабым гиперзарядом разные ЕТС калибровочные группы. Таким образом, будет отдельная ЕТС калибровочная группа для каждого левого электрослабого дублета и правых up- и down-типов синглетов. Слабая $SU(2)_L$ коммутирует со всеми этими группами. ЕТС-группы нарушены таким образом, что приближенно сохраняются глобальные симметрии. Они нарушены лишь членами, необходимыми для генерации масс кварков и лептонов. Это означает, что $(\overline{\psi}\psi)^2$-операторы должны быть приближенно инвариантными относительно этих глобальных симметрий, поэтому операторы с $\Delta S = 2$ должны отсутствовать. Отличительной чертой моделей типа TC GIM является присутствие лептокварка NGB. Лептокварки обычно распадаются на кварк и лептон одного поколения. В модели TC GIM лептокварки могут нести лептонные и кварковые числа любого поколения. Это означает, что существующие пределы на распады лептокварков, а также первое и второе поколение фермионов можно использовать в TC GIM моделях.

2.5.2. Некоммутативные ЕТС-модели. Другой подход к построению ЕТС-моделей основан на предположении о том, что ЕТС и слабые калибровочные группы не коммутируют. Тогда тяжелый t-кварк должен получать свою массу за счет ЕТС-динамики при низких энергиях. Если ЕТС-бозоны, «участвующие» в формировании m_t, несут слабые заряды, то можно включить слабую группу $SU(2)_{\text{heavy}}$ (относительно которой $(t,b)_L$ является дублетом) в ЕТС-группу. Точнее, в подгруппу ЕТС, которая нарушена при малых энергиях. Чтобы иметь малые массы, легкие кварки и лептоны не должны иметь заряда относительно низкоэнергетической ЕТС-группы. Следовательно, слабая $SU(2)_{\text{light}}$-группа для легких кварков и лептонов должна отличаться

от $SU(2)_{\text{heavy}}$. Результирующая схема нарушения симметрии:

$$\begin{gathered}\text{ETC} \times SU(2)_{\text{light}} \times U(1)' \to (f),\\ \text{TC} \times SU(2)_{\text{heavy}} \times SU(2)_{\text{light}} \times U(1)_Y \to (u),\\ \text{TC} \times SU(2)_W \times U(1)_Y \to (v_0),\\ \text{TC} \times U(1)_{EM},\end{gathered} \tag{50}$$

где f, u и $v_0 = 246$ ГэВ — вакуумные средние параметров порядка для трех различных способов нарушения симметрии. Отметим, поскольку мы интересуемся физикой поколения t-кварка, то лишь t_L, b_L и t_R должны нетривиально преобразовываться относительно ETC. Чтобы добиться сокращения аномалий, $(t,b)_L$ и (ν_τ,τ) должны быть выбраны дублетами относительно $SU(2)_{\text{heavy}}$ и синглетами по $SU(2)_{\text{light}}$.

Сущесвует две простейших возможности для $SU(2)_{\text{heavy}} \times SU(2)_{\text{light}}$ трансформационных свойств параметров порядка, смешивающих и нарушающих расширенные электрослабые калибровочные группы:

$$\begin{gathered}\langle\phi\rangle \sim (2,1)_{1/2}, \quad \langle\sigma\rangle \sim (2,2)_0 \text{ — случай heavy;}\\ \langle\phi\rangle \sim (1,2)_{1/2}, \quad \langle\sigma\rangle \sim (2,2)_0 \text{ — случай light.}\end{gathered} \tag{51}$$

Параметр порядка $\langle\phi\rangle$ нарушает $SU(2)_L$, а $\langle\sigma\rangle$ смешивает $SU(2)_{\text{heavy}}$ и $SU(2)_{\text{light}}$. В случае «heavy» технифермионный конденсат обеспечивает генерацию масс третьему поколению кварков и лептонов, а также он «ответственен» за объемное нарушение электрослабой симметрии.

В случае «light» ситуация противоположная: физика, обеспечивающая массу третьему поколению, не приводит к объемному нарушению электрослабой симметрии.

Спектр некоммутативных ETC-моделей включает дополнительный набор W- и Z-бозонов, который влияет на физику слабых взаимодействий уже при имеющихся энергиях. Например, смешивание двух наборов слабых калибровочных бозонов изменяет Zff-связь. Кроме того, однопетлевая диаграмма, содержащая обмен бозоном, генерирующим массу t-кварка, изменяет величину связи b_L с Z-бозоном в (44).

Если модификация электрослабых наблюдаемых происходит только за счет дополнительных электрослабых и ETC-бозонов некоммутативной ETC, то тяжелые W- и Z-бозоны должны иметь массу $\simeq 2{,}4$ ТэВ в случае «light» и $\simeq 3{,}3$ ТэВ-а в случае «heavy».

2.6. «Бегущий» техницвет (WTC)

Как мы уже видели выше, модели ETC имеют трудности в объяснении наблюдаемых масс тяжелых кварков и лептонов. Даже очарованный кварк оказывается слишком тяжелым при построении моделей, подавляющих FCNC. Обратимся к интригующей динамической возможности разрешения этой проблемы. Для этого рассмотрим TC радиационные поправки к операторам ETC, генерирующим массы кварков и лептонов. Эти операторы появляются на масштабах $\mu < \Lambda_{\text{ETC}}$ в β-членах в выражениях (31), (32). Поскольку $\Lambda_{\text{ETC}} \gg \Lambda_{\text{TC}}$, эти операторы перенормируются TC-взаимодействиями:

$$\langle\overline{Q}Q\rangle_{\text{ETC}} = \exp\Bigl(\int\limits_{\Lambda_{\text{TC}}}^{\Lambda_{\text{ETC}}} d\ln(\mu)\gamma_m(\alpha(\mu))\Bigr)\langle\overline{Q}Q\rangle_{\text{TC}}, \tag{52}$$

где γ_m — оператор аномальной размерности. Если TC подобен КХД, то константа связи техницвета обладает свойством асимптотической свободы и на масштабах,

превышающих TC, уменьшается логарифмически: $\alpha(\mu) \sim 1/\ln(\mu)$. С аномальной размерностью $\gamma_m \sim \alpha(\mu)$ радиационная поправки пропорциональна $\exp[\gamma_m \ln(\ln(\mu))] \sim$ $\sim (\ln(\Lambda_{\rm ETC}/\Lambda_{\rm TC}))^{\gamma_m}$. Следовательно, радиационные поправки содержат, подобно КХД-поправкам, степени логарифмов.

Если же $\alpha(\mu)$ приблизительно постоянна, т. е. теория TC содержит конформную фиксированную точку $\alpha(\mu) = \alpha^* \neq 0$ (причем $\beta(\alpha^*) = 0$), то радиационные поправки становятся степенными, пропорциональными $\exp[\gamma_m(\alpha^*)\ln(\mu)] \sim (\Lambda_{\rm ETC}/\Lambda_{\rm TC})^{\gamma_m(\alpha^*)}$. Подобное поведение усиливает α- и β-члены ETC, содержащие билинейные комбинации технифермионов, но не изменяет потенциально опасных γ-членов, включающих только фермионы стандартной модели. Таким способом обеспечивается ETC-генерация фермионных и NGB-масс без усиления скорости процессов FCNC. Теория TC с приблизительно постоянной константой связи $\alpha(\mu) = \alpha^*$ в интервале $\Lambda_{\rm TC} \le \mu \le \Lambda_{\rm ETC}$ называется теорией «бегущего» техницвета (WTC).

2.6.1. Подход Швингера–Дайсона к WTC. Для WTC достаточно иметь на масштабах $\Lambda_{\rm TC} \le \mu \le \Lambda_{\rm ETC}$ приближенную фиксированную точку $\beta(\alpha^*) \ll 1$ при $\alpha^* \sim \alpha_C$ вблизи $\Lambda_{\rm TC}$. Здесь через $\alpha_{\rm C}$ обозначена критическая константа связи для образования кирального конденсата. Анализ уравнений Швингера–Дайсона для щели в теории показывает, что радиационная поправка к (52) может усиливать техникварковый билинейный оператор на фактор $\sim \Lambda_{\rm ETC}/\Lambda_{\rm TC}$. Решение уравнения Швингера–Дайсона с фиксированной связью дает вблизи критического значения константы связи $\alpha^* \sim \alpha_C$ порождает большую аномальную размерность $\simeq 1$. Этот результат справедлив как для кирально нарушенной фазы, так и симметричной фазы. Поэтому он способен разрешить трудности TC-теории в кирально нарушенной фазе вблизи α_C.

В евклидовой версии уравнения Швингера–Дайсона для собственной энергии фермиона (в калибровке Ландау) получаем

$$\Sigma(p^2) = 3C_2(R)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\alpha((k-p)^2)}{(k-p)^2}\frac{\Sigma(k^2)}{Z(k^2)k^2 + \Sigma^2(k^2)}. \tag{53}$$

Если предположить $Z(k^2) \simeq 1$ и линеаризовать уравнение (53), пренебрегая слагаемым $\Sigma^2(k^2)$ в знаменателе, то для $\alpha(\mu) \simeq \alpha_C$ получим два решения:

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\mu)\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)^{b_\pm}, \quad b_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{\alpha(\mu)}{\alpha_{\rm C}}\right)^{1/2}\right), \tag{54}$$

где критическая константа связи $\alpha_{\rm C} = \pi/3{\rm C}_2(R)$ и $C_2(R)$ — квадратичный оператор Казимира комплексного технифермионного представления R ($C_2 = (N^2-1)/(2N)$ для фундаментального представления).

Теоретиковозмущенческая аномальная размерность оператора $\overline{Q}Q$:

$$\gamma_m = 1 - \left(1 - \frac{\alpha(\mu)}{\alpha_c}\right)^{1/2} \sim \frac{2C_2(R)\alpha(\mu)}{2\pi}. \tag{55}$$

Следовательно, решение с b_- соответствует изменению массового члена, имеющему нединамическую природу. Решение же с b_+ связано с высокоимпульсным хвостом динамически генерируемой массы. Заметим, что в критической точке $\alpha(\mu) = \alpha_C$ оба решения совпадают, и это довольно общее свойство. В самом деле, если предположить, что $\alpha(\mu) = \alpha^* > \alpha_C$ для $0 \le \mu \le \Lambda^*$, то существует решение с динамическим нарушением симметрии:

$$\Sigma(0) \sim \Lambda^* \exp\left(-\pi/\sqrt{\alpha^*\alpha_C - 1}\right). \tag{56}$$

В интервале энергий $\Lambda_{\text{TC}} \le \mu \le \Lambda_{\text{ETC}}$ большое значение $\alpha(\mu) \simeq \alpha^*$ соответствует аномальной размерности $\simeq 1$, при этом поправочный фактор для технифермионной билинейной комбинации (52) порядка $\Lambda_{\text{ETC}}/\Lambda_{\text{TC}}$. Как влияет WTC на массы обычных фермионов? В классической теории ETC, как мы видели, масштаб фермионных масс $\sim \Lambda_{\text{TC}}^3/\Lambda_{\text{ETC}}^2$. Поскольку $\Lambda_{\text{TC}} \simeq 1$ ТэВ, феноменологическое ограничение $\Lambda_{\text{ETC}} > 100$ ТэВ подразумевает $m_{q,l} \le 100$ МэВ. WTC вносит за счет техникварковой билинейности (52) фактор усиления $\sim \Lambda_{\text{ETC}}/\Lambda_{\text{TC}}$, поэтому

$$\text{т}_{q,l} \sim \frac{\Lambda_{\text{TC}}^2}{\Lambda_{\text{ETC}}} \sim 1\ \text{ГэВ}. \tag{57}$$

Эта величина достаточно большая для странных, очарованных кварков и τ-лептона. И как быть с t-кварком? Если динамика TC подобна динамике КХД, то величина Λ_{ETC}, необходимая для подгонки массы t-кварка:

$$\Lambda_{\text{ETC}} \sim 1\ \text{ТэВ}\left(\frac{175\ \text{ГэВ}}{m_t}\right)^{1/2}. \tag{58}$$

Для измеряемой массы t-кварка получаем $\Lambda_{\text{ETC}} = \Lambda_{\text{TC}}$. Это означает, что сам по себе ETC, даже в присутствии WTC, вносит лишь долю в формирование наблюдаемого значения m_t. Мы обсудим альтернативные механизмы генерации масс t- и b-кварков в разд. 2.8. Какова причина малости β-функции и к каким следствиям это может привести? Рассмотрим однопетлевую β-функцию $SU(N)_{\text{TC}}$ калибровочной теории с N_f техникварками в фундаментальном N_{TC} представлении:

$$\beta_{\text{TC}} = -\frac{g_{\text{TC}}^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}N_{\text{TC}} - \frac{8}{3}N_f\right) + \ldots \tag{59}$$

Ясно, что для $\alpha_{\text{TC}}(\mu) = g_{\text{TC}}^2/(4\pi)$ требуется много «активных» технифермионов в интервале энергий от Λ_{TC} до Λ_{ETC}. При этом они не обязательно должны быть электрослабыми дублетами — они могут быть синглетами или векторoподобными дублетами по отношению к $SU(2)_L$. Вообще говоря, после нарушения ETC, фермионы низкоэнергетической теории можно разделить в семейства, несущие: а) только TC; б) (TC) $\times$ (цвет); в) (TC) $\times$ (аромат) и т. д. Технифермионы в различных представлениях, как будет рассмотрено в разд. 2.6.2, способны конденсироваться на различных масштабах.

Независимо от оттого, вызван ли WTC присутствием многих фермионов в фундаментальном или в высших TC-представлениях, сектор нарушения киральной симметрии оказывается гораздо шире, чем в минимальных TC-моделях.

Очевидно, что влияние «бегущей» динамики на массы NGB однозначное: усиление конденсата увеличивает массы NGB. Выше мы получали оценку $m_P^2 \simeq \langle\overline{Q}Q\rangle^2/\Lambda_{\text{ETC}}^2 F_T^2 \sim \sim N_{\text{TC}}^2\Lambda_{\text{TC}}^6/\Lambda_{\text{ETC}}^2 F_T^2$. Эта величина, в принципе, может быть «угрожающе» малой. С учетом усиления пары билинейных техникварковых операторов:

$$m_P^2 \sim \frac{N_{\text{TC}}^2\Lambda_{\text{TC}}^4}{F_T^2} \sim N_{\text{TC}}^2\Lambda_{\text{TC}}^2, \tag{60}$$

т. е. NGB исключаются из наблюдения на уже имеющихся ускорителях, однако они могут быть потенциально наблюдаемыми на LHC.

Вообще говоря, теория WTC является хорошим примером киральной динамики в пределе больших N_{flavor}. Присутствие инфракрасно фиксированных точек калибровочной константы связи является общим свойством теорий с большим числом ароматов.

2.6.2. ТС-теории со многими масштабами. Идея ТС-теории состоит в том, что различные сектора теории вносят разные вклады в электрослабый масштаб $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots$ Сектор теории с наименьшим v_i называют низкомасштабным ТС-сектором. Именно этот сектор, как ожидается, формирует феноменологию на современных ускорителях. Как мы видели выше, низкомасштабный сектор должен существовать в WTC-теории.

В этом подразделе обсудим идею низкомасштабного ТС с точки зрения ЕТС и рассмотрим его феноменологические следствия.

Мотивы введения низкомасштабного ТС связаны с WTC, обсуждаемой выше. Действительно, пусть мы строим «бегущую» модель, включая технифермионы в высших ТС-представлениях. На масштабе ТС в такой теории формируются киральные конденсаты. Однако не все они формируются на одном масштабе: высшие представления будут конденсироваться при больших энергиях, поскольку их связь определяется оператором Казимира $C_2(R)$. При этом различие в величинах конденсатов может быть большим.

В большинстве феноменологически интересных случаев низкомасштабный ТС-сектор теории с наименьшим v_i включает достаточно легкие состояния, которые могли бы наблюдаться при имеющихся энергиях. В частности, таким сектором могли бы быть заряженные технипионы $P^{\pm}$ с массами, меньшими массы t-кварка. Поскольку основной канал распада t-кварка в стандартной модели $t \to W + b$, то необходимо подавить распад $t \to P_T + b$. Одна из возможностей — считать массу $m_{P_T} > 160$ ГэВ. Другая — подавить $t\bar{b}P_T$-вершину. Конкретные механизмы подавления будут рассмотрены в разд. 2.8. Мы же обратимся к спектроскопии низкомасштабной ТС. Спектр этой модели включает легкие NGB (технипионы) и техни-векторные мезоны. Например, для $F_T \sim 60$ ГэВ оценки масс $M_{P_T} \sim 100$ ГэВ и $M_{\rho_T} \sim 200$ ГэВ. Технипионы могли бы рождаться резонансным образом за счет техни-ρ-векторной доминантности. Техниvекторные мезоны, по аналогии с минимальной моделью, являются изотриплетом и цветовым синглетом.

При этом изоспин не нарушен, т. е. ρ_T и ω_T вырождены по массе, как и для $I = 1$ мультиплета технипионов. Усиление технипионных масс вследствие «бегущей» природы теории приводит к тому, что каналы распада $\rho_T \to P_T P_T$ и $\omega_T \to P_T P_T P_T$ оказываются закрытыми. Поэтому доминируют каналы распада $\rho_T \to W_L P_T$ и $Z_L P_T$, где W_L и Z_L — продольные слабые калибровочные бозоны.

Поскольку константа связи технипиона с фермионами, подобно скалярам, пропорциональна массе, то важными распадными модами будут

$$\begin{gathered} P_T^0 \to b\bar{b}, \\ P_T^+ \to c\bar{b} \quad \text{или} \quad c\bar{s}, \tau^+\nu_\tau. \end{gathered} \tag{61}$$

Очевидно, что для экспериментального поиска эффектов низкомасштабного ТС весьма важно регистрировать струи тяжелых кварков.

2.7. Суперсимметричный и бозонный техницвет

2.7.1. SUSY и ТС. Вскоре после возникновения идеи техницвета появилась суперсимметричная теория техницвета. Она объединила наиболее привлекательные черты SUSY и ТС. Замечательно, что «объединенная» теория оказалась способной повысить масштаб ЕТС и подавить опасные γ-члены.

В обычной КХД мы знаем, что киральный конденсат $\langle\bar{q}q\rangle \neq 0$ формируется на масштабах, при которых калибровочная константа связи становится ≥ 1. В супер-

симметричной КХД кварк q обладает суперпартнером $\tilde{q}$. Суперзаряд Q генерирует преобразование этих полей:

$$\{Q, \tilde{q}^{+}q + q^{+}\tilde{q}\} = \overline{q}q. \quad (62)$$

Следовательно, существование фермионного конденсата $\langle\overline{q}q\rangle \neq 0$ подразумевает

$$Q|0\rangle \neq 0. \quad (63)$$

Это означает, что SUSY нарушена. Поле $\tilde{q}^{+}q + q^{+}\tilde{q}$ становится безмассовым голдстоуновским фермионом — голдстино. Таким образом, нарушение SUSY и динамическое нарушение электрослабой симметрии связаны фермионным конденсатом.

2.7.2. Скаляры и техницвет: бозонный техницвет. Мотивом введения фундаментальных скаляров в теорию ТС является поиск альтернатив ЕТС. Большинство ограничений и проблем ЕТС можно разрешить, если предполагать общие массы и константы связи фундаментального скалярного сектора. Будем рассматривать теории, в которых дополнительные поля, связывающие ТС-конденсаты с обычными кварками и лептонами, являются фундаментальными скалярами. Можно рассматривать эти скаляры как проявление SUSY, где их массы определяются фермионными киральными симметриями. В принципе, эти скаляры могли бы быть и связанными состояниями сильно связанной теории при высоких энергиях. Будем классифицировать модели по слабому заряду и ТС-зарядам скалярных состояний.

1) *Слабый дублет техни-синглетных скаляров.* Начнем рассмотрение с ТС-моделей, спектр которых содержит один или более слабых дублета ТС-синглетных скаляров. В минимальной модели такого типа к калибровочными и фермионным секторам стандартной модели добавляется $SU(N)$ ТС-сектор с двумя техниароматами, преобразующийся относительно $SU(2)_W$ как левый дублет $\Upsilon_L = (p_L, m_L)$ и два правых синглета p_R и m_R. Слабые гиперзаряды этих состояний $Y(\Upsilon_L) = 0$, $Y(p_R) = 1/2$ и $Y(m_R) = -1/2$. Как технифермионы, так и обычные фермионы, связаны со слабым скалярным дублетом $\phi = (\phi^{+}\phi^{0})^{T}$, имеющим квантовые числа хиггсовского дублета стандартной модели. В отличие от хиггсовского дублета стандартной модели, ϕ имеет нетахионную массу ($M_{\phi}^{2} > 0$), т. е. не является первичным источником электрослабого нарушения симметрии.

Скаляры имеют следующие юкавские связи с технифермионами:

$$L_{\phi T} = \overline{\Upsilon}_L\tilde{\phi}\lambda_{+}p_R + \overline{\Upsilon}_L\phi\lambda_{-}m_R + \text{э.с.} \quad (64)$$

Когда технифермионы образуют конденсаты, эти связи индуцируют вакуумное среднее $\langle\phi\rangle = f' \simeq 4\pi\lambda_T f^3/M_{\phi}^2$. Поскольку скаляры связаны как с обычными фермионами, так и с технифермионами, обычные фермионы приобретают массы за счет диаграммы, представленной на рис. 4.

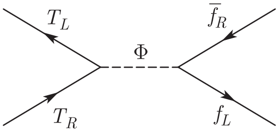


Рис. 4

Оценка масс фермионов

$$m_f \simeq \lambda_f h \frac{4\pi f^3}{M_{\phi}^2}, \quad (65)$$

где h — величина константы связи скаляров с обычными фермионами. Матрицы констант связи λ_f пропорциональны массовым матрицам, они и вызывают нарушение симметрии ароматов. Кварковая симметрия ароматов нарушена так же, как в стандартной модели — кварки смешиваются посредством СКМ-матрицы.

В электрослабый масштаб v_0 дают вклад как технипионная константа распада, так и вакуумное среднее скалярного поля: $v_0^2 = f^2 + f'^2$. При этом происходит

смешивание технипионов и изотриплетных компонент ϕ. Одна линейная комбинация становится продольной компонентной W и Z, ортогональная же комбинация, как изотриплет физических скаляров, остается в низкоэнергетической теории.

Феноменологические следствия TC-моделей со слабым дублетом скаляров находятся в согласии с экспериментальными данными. Эти модели не дают неприемлемо большого вклада ни в $K^0 - \overline{K}^0$ и $B^0 - \overline{B}^0$ смешивание, ни в электрослабые S и T параметры.

Суперсимметризованные модели со слабым дублетом техни-синглетных скаляров содержат все поля минимальной суперсимметричной стандартной модели (MSSM), а также набор $SU(N)_{\text{TC}}$ калибровочных бозонов и их суперпартнеров и синглетных по цвету технифермионных суперполей, преобразующихся относительно $SU(N)_{\text{TC}} \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ следующим образом:

$$T_{U_R} \equiv (N_{\text{TC}}, 1, 1/2), \quad T_{D_R} \equiv (N_{\text{TC}}, 1, -1/2), \quad T_L \equiv (N_{\text{TC}}, 1, 0). \tag{66}$$

Суперпотенциал содержит часть W_{MSSM} от MSSM, а также W_{HTC}-часть, возникающую за счет юкавских связей двух хиггсовских суперполей H_U и H_D с технифермионными суперполями T:

$$W_{HTC} = g_U H_U T_{U_R} T_L + g_D H_D T_{D_R} T_L. \tag{67}$$

В пертурбативном вакууме хиггсовские поля имеют положительные квадраты масс. Слагаемые суперпотенциала W_{HTC} содержат линейные по хиггсовским полям члены. При конденсации технифермионов хиггсовские поля приобретают вакуумные средние

$$\langle H_U \rangle = \frac{g_U \langle T_{U_R} T_{U_L} \rangle}{m_{H_U}^2}, \quad \langle H_D \rangle = \frac{g_D \langle T_{D_R} T_{D_L} \rangle}{m_{H_D}^2}. \tag{68}$$

Для $\langle TT \rangle \sim (600\ \text{ГэВ})^3$, $g_U \sim 1$ и $m_{H_U} \sim 1$ ТэВ получаем $\langle H_U \rangle \sim 100$ ГэВ. Такое значение $\langle H_U \rangle$ приводит к реалистическому значению массы t-кварка. Если $m_{H_D} > m_{H_U}$, то для необходимого расщепления масс b- и t-кварка вакуумное среднее H_D должно быть гораздо меньше H_U.

Суперсимметризованные TC-модели «минимизируют» проблемы FCNC, присущие SUSY и TC-моделям. На древесном уровне скалярный обмен между кварками и лептонами не приводит к процессам с FCNC.

2) *Слабый синглет техницветных скаляров.* Эти модели ориентированы на разрешение проблемы иерархий масс между различными поколениями фермионов. В ранних вариантах подобного типа моделей обмен техницветными слабыми синглетными скалярами приводил к четерехфермионным взаимодействиям между тремя технифермионами и одним фермионом. При этом обычные фермионы смешиваются с технибарионами и становятся массивными. К сожалению, эта модель предсказывает неприемлемо большие эффекты FCNC. Более естественной выглядит модель, в которой обмен техницветными слабыми синглетными скалярами вызывает четырехфермионные взаимодействия между парами фермионов и технифермионов. Малые элементы CKM-матрицы, связанные с третьим поколением кварков, возникают за счет того, что t_L и b_L массовые состояния оказываются выстроенными. Однако скаляр имеет связь как с t_R, так и с b_R, отношение масс b- и t-кварков должно регулироваться юкавскими константами. Рассмотрим пример такой теории несколько более подробно.

Пусть теория имеет калибровочную группу $SU(N_{\text{TC}}) \times SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, содержит три семейства кварковых и лептонных суперполей и два набора (T_1, T_2) синглетных по цвету технифермионных суперполей, аналогично (66). Хиггсовский сектор состоит из векторoподобной пары триплетных по цвету хиггсовских полей,

преобразующихся относительно калибровочной группы как $\omega^C \equiv (N_{\text{TC}}, \overline{3}, 1, -1/6)$, $\omega \equiv (N_{\text{TC}}, 3, 1, 1/6)$, и вектороподобной пары синглетных по цвету полей $\xi^C \equiv \equiv (N_{\text{TC}}, 1, 1, 1/2)$ и $\xi \equiv (N_{\text{TC}}, 1, 1, -1/2)$. В этой модели на древесном уровне получает массу только одно из двух поколений кварков. Обмены же калибрино и сфермионом (рис. 5) «ответственны» за формирование масс фермионов первого поколения.

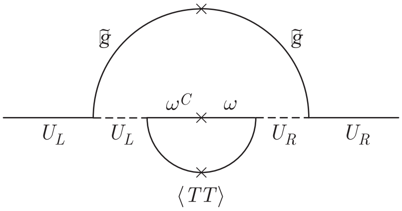


Рис. 5

SUSY-нарушающие массы могут быть в интервале $1 \div 10$ ТэВ, при этом нет необходимости в вырожденности масс скварка и слептона. Для $N_{\text{TC}} = 3$ добавление пары технивекторных, синглетных по цвету хиггсовских суперполей индуцирует четырехфермионные взаимодействия типа $T_L T_L T_{U_R} T_{D_R}$. При образовании технифермионного конденсата технифермионы получают большие массы, полезно увеличивая массы технипионов.

3) *Слабый дублет техницветных скаляров.* Эти модели способны не только объяснить иерархию масс поколений, но и иерархию масс внутри поколения. Такого типа модели содержат калибровочный и фермионный сектора стандартной модели, а также минимальный ТС-сектор. Таким образом, имеется асимптотически свободная $SU(N_{\text{TC}})$ калибровочная группа, имеющая режим сильной связи на масштабе ~ 1 ТэВ, и один дублет технифермионов, преобразующихся относительно группы $SU(N_{\text{TC}}) \times SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ как $\Psi_L \equiv (P_L, N_L) = (N_{\text{TC}}, 1, 2)_0$, $P_R \equiv (N_{\text{TC}}, 1, 1)_{+1}$ и $N_R \equiv (N_{\text{TC}}, 1, 1)_{-1}$. Большая масса t-кварка генерируется скалярным мультиплетом χ^t, преобразующимся относительно калибровочной группы как $(\overline{N}_{\text{TC}}, 3, 2)_{4/3}$. Его юкавские связи:

$$L_t = C_q \overline{q}_L^3 N_R \chi^t + C_t \overline{\Psi}_L t_R i\sigma_2 \chi^{t+} + \text{э.с.}, \tag{69}$$

где $q_L^3 \equiv (t_L, b_L)^+$ — левое слабое собственное состояние $(t - b)$ кваркового дублета, а юкавские константы связи C_q и C_t считаются положительными. Ниже масштаба конденсации технифермионов скалярный обмен генерирует массу t-кварка. Поскольку гиперзаряд χ^t позволяет ему связываться с t_R, но не с b_R, модель описывает только массу t-кварка. Если другие фермионные массы возникают за счет физических процессов на масштабах, выше ТС-масштаба, то представляется естественным, что t-кварк — наиболее тяжелый фермион.

2.8. Конденсация t-кварка и топцвет

Большая масса t-кварка предполагает новую динамику, которая могла бы быть связанной с электрослабым нарушением симметрии. В ранних работах на эту тему предпринимались попытки связать EWSB с образованием конденсата t-кварков, а хиггсовский бозон считать связанным состоянием $t\overline{t}$. С этой точки зрения, в отличие от теорий ТС, W, Z и t-кварк являются массивными частицами «первого порядка». Все же другие кварки и лептоны a priori считаются безмассовыми.

В этом разделе сначала будут рассмотрены сценарии t-конденсации, а затем — более реалистичные модели, включающие t-конденсацию и расширенную динамику.

2.8.1. t-конденсация в NJL-приближении. NJL-модель (см. приложение 2) для конденсации t-кварков следует рассматривать как приближение для «новой сильной» динамики. Таким новым калибровочным взаимодействием мог бы быть «топцвет»,

который мы описываем в следующем подразделе. Чисто технически, стандартную модель всегда можно представить как NJL-модель для любого фермиона, выбирая при этом различные операторы высших размерностей и соответствующие энергетические масштабы. Например, объединяя $d = 8$ операторы с $d = 6$ NJL-взаимодействием и выбрав коэффициенты этих операторов абсурдно большими, скажем $\sim 10^6$, получим, что Хиггс-бозон состоит из электрона и позитрона! В подходе топцвета такие коэффициенты не могут быть произвольными, они $\sim O(1)$.

Новое фундаментальное взаимодействие, связанное с высокоэнергетическим масштабом M (включающим t-кварк), имеет четырехфермионный потенциал взаимодействия:

$$V \sim -\frac{g^2}{M^2}(\overline{\psi}^a_L t_{R_a})(\bar{t}_{R_b}\psi^b)^i + \ldots, \tag{70}$$

где (a, b) — цветовые индексы, i — $SU(2)_L$-индекс. Для любого g^2 это взаимодействие считается притягивающим и способным образовать связанное бозонное состояние $H \sim \overline{\psi}_L t_R$. Для достаточно больших (суперкритических) $g^2 > g_C^2$ взаимодействие (70) приводит к образованию низкоэнергетического конденсата $\langle H \rangle \sim \langle \bar{t}t \rangle$. Этот конденсат имеет требуемые $I = 1/2$ и $Y = -1$ квантовые числа конденсата хиггсовского бозона стандартной модели, обеспечивая обычное нарушение $SU(2) \times$ $\times\, U(1) \to U(1)$. Для значений $g^2 > g_C^2$ в теории имеет место спонтанное нарушение симметрии. Связанные с этим нарушением намбу–голдстоуновские моды становятся продольными компонентами W и Z. При этом NG константа распада $f_\pi = v$:

$$f_\pi^2 = v^2 = \frac{N_C}{16\pi^2} m_t^2 \left(\log \frac{M^2}{m_t^2} + k \right). \tag{71}$$

В этом выражении m_t — масса t-кварка, являющаяся динамической щелью теории, k — постоянная $\sim O(1)$.

Если выбрать параметр обрезания $M \sim 1$ ТэВ, $k \simeq 1$, то предсказываемая масса t-кварка окажется слишком большой: $m_t \simeq 600$ ГэВ. С другой стороны, при очень больших значениях $M \sim 10^{15}$ ГэВ и $k \simeq 1$ масса $m_t \simeq 160$ ГэВ. К сожалению, в пределе очень больших $M \gg v$ модель требует «тонкой настройки параметров» (fine-tuning). Действительно, для массы составного хиггсовского бозона в модели NJL имеем

$$m_H^2 = \frac{M^2}{g^2} - \frac{2N_C}{(4\pi)^2}(M^2 - \mu^2). \tag{72}$$

Если взять $\mu \to v$, то для того, чтобы получить $M \gg v \sim m_H$ константу связи NJL-теории следует подобрать следующим образом:

$$\frac{g^2 N_C}{8\pi} = 1 + O\left(\frac{v^2}{M^2} \right). \tag{73}$$

Это подразумевает исключительную близость к критическому значению $g_C^2 = 8\pi^2/N_C$. Если $M \sim 10^{15}$ ГэВ, то константа связи должна быть подогнанной с точностью $\sim (1 : 10^{-30})$ к критическому значению. Критическая связь соответствует, как и при фазовом переходе второго рода в физике конденсированного состояния, масштабно-инвариантному пределу низкоэнергетической теории.

В пределе $M \gg v$ для улучшения предсказаний масс t-кварка и хиггсовских масс можно воспользоваться ренормгрупповыми методами. Для t-кварка эффект заметен уже в однопетлевом ренормгрупповом уравнении:

$$16\pi^2 \frac{\partial g_t}{\partial \ln \mu} = \left(N_C + \frac{3}{2} \right) g_t^3 - (N_C^2 - 1) g_t g_{\text{КХД}}^2 \tag{74}$$

с граничным условием

$$\frac{1}{g_t^2} \to \frac{N_C}{(4\pi^2)} \ln \frac{M^2}{\mu^2}, \quad \mu \to M. \tag{75}$$

Граничное условие (75) означает, что если хиггсовский дублет является чистым $\bar{t}t$ связанным состоянием, то юкавские связи хиггса с t-кварком должны иметь полюс Ландау на масштабе M.

Низкоэнергетическое значение g_t, являющееся решением уравнения (74) с нулевой правой частью, — фиксированная инфракрасная точка. Это значение зависит от ультрафиолетового масштаба M лишь логарифмически $\ln(\ln(M))$. В стандартной модели низкоэнергетическая инфракрасная фиксированная точка соответствует массе $m_t \simeq 220$ ГэВ при $M \sim 10^{15}$ ГэВ. Этот результат, однако, зависит от состава полей в высокоэнергетической теории и постулируемой динамики.

Ключевой проблемой конденсации t-кварка является предположение о том, что новая динамика появляется на очень больших масштабах. При этом приемлемое значение массы t-кварка можно получить лишь с помощью большого числа параметров. Другое предположение — новая динамика лежит в ТэВ-й области. В этой связи рассмотрим класс моделей топцвета (topcolor), способных разрешить отмеченные выше проблемы.

2.8.2. Топцвет. При обсуждении t-конденсации мы уже отмечали, что выражение (70) можно рассматривать как эффективное описание более фундаментальной теории. Попытаемся представить, что это за теория. Применяя к (70) преобразование Фирца, получим

$$-\frac{g^2}{M^2}(\overline{\psi}^a_L t_{R_a})(\bar{t}_{R_b}\psi^b)^i = \frac{g^2}{M^2}\Big(\overline{\psi}_{iL}\gamma_\mu \frac{\lambda^A}{2}\psi^i_L\Big)\Big(\bar{t}_R\gamma^\mu \frac{\lambda^A}{2}t_R\Big) + O(1/N_C), \tag{76}$$

где $N_C = 3$ — число цветов. Такая форма взаимодействий индуцируется обменом октетным по цвету массивным векторным бозоном и предполагает существование новой калибровочной теории с определенными свойствами: а) она должна содержать спонтанное нарушение симметрии на масштабе M; б) на масштабе M эта теория должна быть сильно связанной, чтобы обеспечить существование Хиггс-бозона как связанного состояния; в) теория должна включать, аналогично КХД, цветовые степени свободы t-кварка.

Итак, соответствующая модель включает КХД в некоторую «большую» группу G, чувствительную к структуре ароматов стандартной модели.

Представляется «экономичным» включение КХД в минимальную калибровочную группу $SU(3)_1 \times SU(3)_2$. Группа $SU(3)_2$ действует на первое и второе поколения кварков, а первая группа $SU(3)_1$ действует на третье поколение.

Топцветовой техницвет (ТС2) постулирует, что большая масса t-кварка возникает как комбинация двух причин: 1) малой фундаментальной компоненты $\varepsilon m_t \ll m_t$, генерируемой ЕТС или фундаментальным Хиггс-бозоном; 2) большой динамической массовой компоненты $(1-\varepsilon)m_t \simeq m_t$, генерируемой динамикой топцвета на масштабе $M \sim 1$ ТэВ и связанной с третьим поколением. Как ожидается, ЕТС-компонента должна быть порядка массы t-кварка, т. е. εm_t-член должен быть порядка m_b. Следовательно, величина $\varepsilon \leq 0{,}1$. После нарушения симметрии в такой теории имеется 3 NGB из ТС-сектора и 3 NGB сектора конденсации t-кварка. Одна линейная комбинация NGB становится продольными $W_L^\pm$ и Z_L. Ортогональная же к ней комбинация проявляет себя в спектре как изовекторный мультиплет $\tilde{\pi}^a$. В результате интерференции между динамической и ЕТС-массами t-кварка эти состояния приобретают массу, причем $m_{\tilde{\pi}^a} \sim \varepsilon$. Эти состояния называют топ-пионами. Для $\varepsilon \leq 0{,}05 \div 0{,}10$

массы топ-пионов $\simeq 200$ ГэВ. Массы топ-пионов, меньшие ≤ 165 ГэВ, подавлены отсутствием распада $t \to \tilde{\pi}^+ + b$.

Поскольку топцвет и низкомасштабный ТС дополняют друг друга, их естественно объединить в рамках схемы ТС2. Весьма удачно, что одна «часть» модели позволяет разрешить трудности другой «части». Например, поскольку t-кварк связан слабо с ЕТС в ТС2-моделях, то удается избежать проблем с распадом $t \to P^+ + b$ в низкомасштабной ТС.

2.8.3. Калибровочные группы и механизм «опрокидывания». В моделях топцвета новая динамика проявляется во взаимодействиях типа $\bar{t}t\bar{t}t$, $\bar{t}t\bar{b}b$ и $\bar{b}b\bar{b}b$. Эта динамика призвана обеспечить конденсацию t-кварка $\langle\bar{t}t\rangle \neq 0$ и подавить образование конденсата b-кварков $\langle\bar{b}b\rangle \simeq 0$. Это достигается за счет «опрокидывания» вакуума. Суть этого механизма состоит во введении дополнительного $U(1)'$-взаимодействия, которое является притягивающим в $\bar{t}t$-канале и отталкивающим в $\bar{b}b$-канале. Этого можно добиться вложением слабого гиперзаряда $U(1)_Y \to U(1)_{Y_1} \times U(1)_{Y_2}$.

Классический топцвет с $U(1)'$-механизмом «опрокидывания» основан на следующей структуре калибровочной группы при высоких энергиях:

$$SU(3)_1 \times SU(3)_2 \times U(1)_{Y_1} \times U(1)_{Y_2} \times SU(2)_L \to SU(3)_{\text{КХД}} \times U(1)_{EM}, \qquad (77)$$

где $SU(3)_1 \times U(1)_{Y_1}$ ($SU(3)_2 \times U(1)_{Y_2}$) связывают третье (первое и второе) поколения. Группы $U(1)_{Y_i}$ — просто перемасштабированные версии электрослабой группы $U(1)_Y$. Фермионы имеют относительно групп $SU(3)_1$, $SU(3)_2$, $U(1)_{Y_1}$, $U(1)_{Y_2}$ следующие квантовые числа:

$$\begin{gathered}
(t,b)_L \sim (3,1,1/3,0); \quad (t,b)_R \sim (3,1,(4/3,-2/3),0);\\
(\nu_\tau,\tau)_L \sim (1,1,-1,0); \quad \tau_R \sim (1,1,-2,0);\\
(u,d)_L,(c,s)_L \sim (1,3,0,1/3); \quad (u,d)_R,(c,s)_R \sim (1,3,0,(4/3,-2/3));\\
(\nu,l)_L (l=e,\mu) \sim (1,1,0,-1); \quad l_R \sim (1,1,0,-2).
\end{gathered} \qquad (78)$$

Расширенные цветовые взаимодействия должны быть нарушенными до диагональной подгруппы, которую следует идентифицировать с КХД. Будем предполагать, что нарушение сопровождается эффективным скалярным полем:

$$\Phi \sim (3,\bar{3},y,-y). \qquad (79)$$

Действительно, когда Φ на масштабе ~ 1 ТэВ (до того как топцвет начнет проявлять свойства конфайнмента) формирует вакуумное среднее, то симметрия нарушается до $SU(3)_C \times U(1)_Y$. Тем не менее, $SU(3)_1$-взаимодействия предполагаются достаточно сильными для образования киральных конденсатов. Вакуум «опрокидывается» за счет $U(1)_{Y_1}$-связи, позволяющей образование $\langle\bar{t}t\rangle$-конденсата, однако запрещающих образование $\langle\bar{b}b\rangle$-конденсата вследствие других $U(1)_{Y_i}$-связей.

Нарушение симметрии приводит к формированию масс трех топ-пионных состояний. Если масштаб топцвета ~ 1 ТэВ, то топ-пионная константа распада $f_\pi = 60$ ГэВ, сильная константа связи $g_{tb\pi} \simeq m_t/\sqrt{2} f_\pi \sim 2{,}5$. В случае $m_{\tilde{\pi}} > m_t + m_b$, и топ-пионы могли бы наблюдаться в распаде $\tilde{\pi}^+ \to t + \bar{b}$.

Определим константы связи (калибровочные поля) относительно $SU(3)_1 \times SU(3)_2$ через h_1 и h_2 ($A^A_{1\mu}$ и $A^A_{2\mu}$), а относительно $U(1)_{Y_1} \times U(1)_{Y_2}$ — через q_1 и q_2 ($B_{1\mu}$ и $B_{2\mu}$). Фермионные $U(1)_{Y_i}$-связи $\sim q_i(Y_i/2)$, где Y_1, Y_2 — заряды фермионов относительно $U(1)_{Y_1}$ и $U(1)_{Y_2}$. Техниконденсат на масштабе $M > 240$ ГэВ нарушает $SU(3)_1 \times SU(3)_2 \times U(1)_{Y_1} \times U(1)_{Y_2} \to SU(3)_{\text{КХД}} \times U(1)_Y$ или даже $SU(3)_1 \times SU(3)_2 \times U(1)_{Y_1} \times U(1)_{Y_2} \to SU(3)_{\text{КХД}} \times U(1)_{EM}$. В любом из этих сценариев остаточная

глобальная симметрия подразумевает существование вырожденного массивного цветового октета топглюонов B_μ^A и тяжелого синглета Z'_μ. Глюон A_μ^A и топглюон B_μ^A ($U(1)_Y$-поле стандартной модели B_μ и $U(1)$-поле Z'_μ) определяются ортогональным вращением с углом смешивания θ (θ'):

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\theta &= \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{1}{g_3^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}; \\ \operatorname{ctg}\theta' &= \frac{q_1}{q_2}; \quad \frac{1}{g_1^2} = \frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}, \end{aligned} \tag{80}$$

где g_3 (g_1) — КХД ($U(1)_Y$) константа связи на масштабе M_{TC}.

Массы вырожденного октета топглюонов и Z': $M_B \simeq g_3 M/\sin\theta\cos\theta$, $M'_Z \simeq g_1 M/\sin\theta'\cos\theta'$. Таким образом, для любых кварков, несущих триплетные квантовые числа как относительно $SU(3)_1$, так и относительно $SU(3)_2$, получаются обычные КХД-взаимодействия. Интегрирование же по тяжелым Z'- и B-бозонам приводит к низкоэнергетическому четырехфермионному взаимодействию. Эффективное топцветное взаимодействие, осуществляемое B-бозоном, наиболее интенсивное для третьего поколения:

$$L'_{\text{топ}} = -\frac{2\pi k}{M_B^2}\Big(\bar t\gamma_\mu\frac{\lambda^A}{2}t + \bar b\gamma_\mu\frac{\lambda^A}{2}b\Big)\Big(\bar t\gamma^\mu\frac{\lambda^A}{2}t + \bar b\gamma^\mu\frac{\lambda^A}{2}b\Big), \tag{81}$$

где $k = g_3^2\operatorname{ctg}\theta/(4\pi)$.

Это взаимодействие в синглетных по цвету каналах является притягивающим и инвариантно относительно цветной $SU(3)$ и $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \times U(1)$ групп, где $SU(2)_R$ — custodial симметрия электрослабых взаимодействий. Кроме того, имеется $U(1)_{Y_1}$-взаимодействие, нарушающее custodial $SU(2)_R$:

$$L_{Y_1} = -\frac{2\pi k_1}{M_{Z'}^2}\Big(\frac{1}{6}\bar\psi_L\gamma_\mu\psi_L + \frac{2}{3}\bar t_R\gamma_\mu t_R - \frac{1}{3}\bar b_R\gamma_\mu b_R - \frac{1}{2}\bar l_L\gamma_\mu l_L - \bar\tau_R\gamma_\mu\tau_R\Big)^2, \tag{82}$$

где $k_1 = g_1^2\operatorname{ctg}\theta'/(4\pi)$.

В лагранжиане (82) $\psi_L = (t,b)_L$, $l_L = (\nu_\tau,\tau)_L$, а величина $k_1 \sim O(1)$. При достаточно «больших» k в (81) возможно образование низкоэнергетического конденсата $\langle\bar tt + \bar bb\rangle$, нарушающего группу симметрии $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y \to U(1) \times SU(2)_C$, где $SU(2)_C$ — глобальная custodial симметрия.

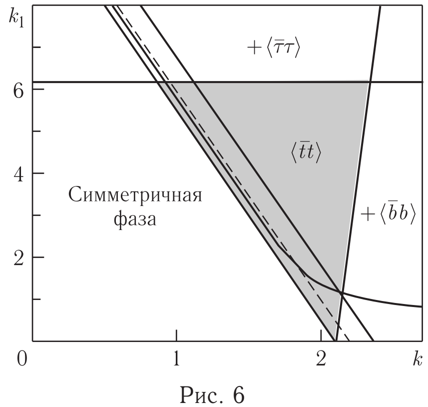


Рис. 6

Фазовая диаграмма модели представлена на рис. 6.

Критические условия

$$k + \frac{2k_1}{9N_C} > k_{\text{crit}}, \quad k_{\text{crit}} > k - \frac{k_1}{9N_C} \tag{83}$$

определяют разрешенную область в k_1k-плоскости, ограниченную двумя жирными прямыми линиями, пересекающимися при $k_1 = 0$, $k = k_{\text{crit}}$. Слева от этих линий лежит симметричная фаза, между ними — область $\langle\bar tt\rangle$-конденсата, справа — область $\langle\bar tt\rangle$- и $\langle\bar bb\rangle$-конденсатов. Горизонтальная линия обозначает границу, выше которой $U(1)_{Y_1}$-взаимодействие становится настолько сильным, что возникает $\langle\bar\tau\tau\rangle$-конденсат.

2.8.4. Массовые матрицы, СКМ и CP-нарушение в модели топцвета. Очевидно, что топцвет, трактуя взаимодействия третьего поколения иначе, чем для первых двух поколений, нарушает ГИМ-симметрию. Конечно, юкавские хиггсовские связи стандартной модели тоже нарушают ГИМ, и это мотивирует рассмотрение в техницвете моделей типа ЕТС. В контексте топцвета проблема фермионных масс требует изменения структуры фермионной массовой матрицы. Третье поколение фермионов имеет отличное от первых двух поколений топцветовое назначение. Структура массовой матрицы, в частности, смешивание легких кварков и лептонов с третьим поколением, зависят от способа нарушения топцвета.

Будем считать, что электрослабое нарушение в ТС2 осуществляется фундаментальным хиггсовским бозоном H. Иначе говоря, техникварковый билинейный оператор имеет вакуумное среднее $\sim v_{\text{weak}}$. Подобным же образом будем рассматривать эффективное поле Φ, нарушающее топцвет. Определим топцветовые заряды этих полей относительно группы $SU(3)_1 \times SU(3)_2 \times U(1)_{Y_1} \times U(1)_{Y_2} \times SU(2)_L$:

$$\Phi \sim (3, \overline{3}, 1/3, -1/3, 0); \quad H \sim (1, 1, 0, -1, 1/2). \tag{84}$$

Обозначим через $\Sigma = \exp(i\pi^a T^a / f_\pi)$ — нелинейное киральное поле, состоящее из топпионов. Тогда эффективный лагранжиан, характеризующий связи с фермионами и генерирующий массовые члены в секторе u-кварка

$$\begin{aligned} L_M = m_0 \overline{T}_L \Sigma P T_R + c_{33} \overline{T}_L t_R H \frac{\det \Phi^+}{M_0^3} + c_{32} \overline{T}_L C_R H \frac{\Phi}{M_0} + c_{31} \overline{T}_L U_R H \frac{\Phi}{M_0} + \\ + c_{23} \overline{C}_L t_R H \Phi^+ \frac{\det \Phi^+}{M_0^4} + c_{22} \overline{C}_L C_R H + c_{21} \overline{C}_L U_R H + c_{13} \overline{U}_L t_R H \Phi^+ \frac{\det \Phi^+}{M_0^4} + \\ + c_{12} \overline{U}_L C_R H + c_{11} \overline{U}_L U_R H + \text{э.с.} \end{aligned} \tag{85}$$

В этом лагранжиане $T = (t, b)$, $C = (c, s)$, $U = (u, d)$. Масса m_0 — динамическая топцветовая масса. Определитель

$$\det \Phi = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \Phi_{il} \Phi_{jm} \Phi_{kn}, \tag{86}$$

где в поле Φ_{rs} первый (второй) индекс относится к $SU(3)_1$ ($SU(3)_2$). Поля Φ связывают цветовые индексы третьего и первого двух поколений: d-кварковые и лептонные массовые матрицы формируются аналогичными (85) связями. Чтобы понять структуру возникающих матриц, предположим, что $\Phi / M_0 \sim O(\varepsilon)$, а поле H приобретает вакуумное среднее v. Тогда массовая матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} v & c_{12} v & \sim 0 \\ c_{21} v & c_{22} v & \sim 0 \\ c_{31} O(\varepsilon) v & c_{32} O(\varepsilon) v & m_0 + O(\varepsilon^3) v \end{pmatrix}. \tag{87}$$

Это треугольная матрица (с точностью до члена c_{12}). Если ее переписать в виде $U_L D U_R^+$, где U_L и U_R — унитарные матрицы, а D — положительная диагональная матрица, то можно найти ограничения на U_L или U_R. Действительно, элементы $U_L^{3,i}$ и $U_L^{i,3}$ обращаются в ноль для $i \neq 3$, но U_R оказываются неограниченными. Аналогично в секторе d-кварка $D_L^{i,3} = D_L^{3,i} \neq 0$ для $i \neq 3$, но D_R — не ограничены. Ситуация оказывается обратной, когда противоположный угол элементов оказывается малым. Этого можно достичь, выбирая $H \sim (1, 1, -1, 0, 1/2)$. Полная матрица СКМ, как обычно, задается в виде $K = U_L D_L^+$.

Треугольность матрицы подразумевает, что либо матрица U_L имеет большие недиагональные элементы, либо U_R имеет малые недиагональные элементы (будем обозначать этот случай $(U:10)$). В отсутствие стандартной треугольности $(U:11)$, в случае точной симметрии ароматов $(U:00)$. Эти обозначения имеют глубокую динамическую причину. Например, мы можем считать, что СКМ-матрица $K = U_L D_L^+$ генерируется чистыми U_L-вращениями, без вкладов от D_L $(U:10, D:01)$ или $(U:10, D:00)$.

Ограничение кварковой матрицы матрицами вращения, приводящее к треугольной структуре, имеет важные феноменологические следствия. Например, процесс перехода $B^0 \to \overline{B}^0$ может быть связан с обменом топпионом.

За счет топпионной диаграммы, дающей вклад в $B^0 - \overline{B}^0$ смешивание, возникает довольно большой вклад в $\delta m^2/m^2$. Этот вклад превышает на два порядка экспериментальное ограничение, полученное с использованием «обычных» СКМ-углов, содержащихся в $(D:11)$ решении. Однако, из соображений киральности, диаграмма рис. 7 пропорциональна произведению $D_{L,3,1}D^+_{R,3,1}$. Следовательно, можно подавить большой эффект, допуская одно из трех решений $(D:10)$, $(D:01)$, $(D:00)$ и запрещая $(D:11)$.

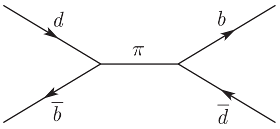


Рис. 7

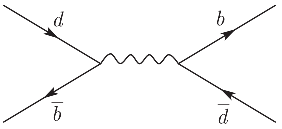


Рис. 8

Однако, помимо обмена топпионом, диаграмма, представленная на рис. 7, содержит и обмен топглюоном (рис. 8). Вклад диаграммы рис. 8 пропорционален $|D_L^{3,1}|^2 + |D_R^{3,1}|^2$, поэтому допустимо лишь симметричное решение $(D:00)$, т.е. недиагональные массовые матричные элементы, смешивающие $(1,3)$-компоненты в секторе d-кварка, малы. Этот же механизм подавляет распад $b \to s\gamma$.

Таким образом, СКМ матричные элементы, смешивающие третье поколение, определяются матрицей U_L, т. е. необходимо $(U:10)$ или $(U:11)$ решение. Эти же эффекты проявляются в $D^0 - \overline{D}^0$ смешивании, где топпионные диаграммы $\sim U_L U_R^+$, а диаграмма с топглюоном $\sim |U_L|^2 + |U_R|^2$. Это означает, что r$D^0 - \overline{D}^0$ смешивание превышает предсказания стандартной модели на два порядка величины и близко к современному экспериментальному пределу. Величина $D^0 - \overline{D}^0$ смешивания является хорошим тестом для модели топцвета. Если окажется, что величина $D^0 - \overline{D}^0$ смешивания соответствует предсказанию стандартной модели, то это создаст серьезные проблемы топцвету.

2.9. Топ «see-saw» механизм

Электрослабая динамическая фермионная масса, связанная с генерацией v посредством соотношения (71), составляет ~ 600 ГэВ, если характерный масштаб топцвета выбрать ~ 1 ТэВ. Если бы величина массы t-кварка была столь большой, наша проблема оказалась бы решенной, и спонтанной нарушение электрослабой симметрии (EWSB) естественно было бы связано с образованием $\bar{t}t$-конденсата.

Возможно, однако, построить модель, в которой $I = 1/2$ t-кварковый массовый член (ассоциированный с EWSB) оказывается ~ 600 ГэВ, а затем использовать механизм «see-saw» для подгонки физической массы t-кварка к значению $m_t = 175$ ГэВ.

Топ «see-saw» механизм реализуется путем введения пары изосинглетных векто-роподобных кварков χ_L и χ_R, имеющих аналогично t_R, значение $Y = 4/3$. В этой модели имеется связанное состояние хиггсовского бозона $\overline{t}_L\chi_R$ с массой в районе одного ТэВ-а. Такая большая масса хиггса, казалось бы, a priori исключается ограничениями на S и T параметры (см. приложение 1). Первоначальный вариант топ see-saw модели, предложенный в 1998 году, находился в плохом согласии с $S-T$ ограничениями. Дальнейшее развитие этой модели, рассмотренное ниже, привело к согласию с имеющимися экспериментальными данными.

2.9.1. Минимальная модель. В минимальной топ see-saw схеме спонтанное нарушение электрослабой симметрии происходит путем конденсации левого t-кварка с новым правым, синглетным относительно слабых взаимодействий, кварком, который будем обозначать как χ. Кварк χ_R имеет гиперзаряд $Y = 4/3$, т. е. он неотличим от t_R. Динамика, приводящая к конденсации, как мы увидим ниже, — топцвет. Фермионный массовый масштаб конденсата слабого изоспина $I = 1/2$ составляет $\sim 0{,}6$ ТэВ. Этот масштаб соответствует формированию связанного состояния слабого дублета хиггсовского поля $H \sim (\overline{\chi}_R t_L, \overline{\chi}_R b_L)$. В лидирующем порядке по $1/N_C$ возникает, согласно (71), вакуумное среднее $v \simeq 175$ ГэВ, а t-кварк приобретает динамическую массу μ. Кварки $\chi(I = 0, Y = 4/3)$ имеют дираковскую массовую матрицу M_χ и массовый член m_0, смешивающий t_R и χ_L. Таким образом, полная фермионная массовая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \overline{t}_L \\ \chi_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ m_0 & M_\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_R \\ \chi_R \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Диагонализация массовой матрицы:

$$\mathsf{M} = U_L^+(\phi_L) M_D U_R(\phi_R) \tag{89}$$

приводит к собственным значениям

$$\mathsf{M}_D = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \tag{90}$$

где

$$m_1^2 = \frac{1}{2}\left[m_0^2 + M_\chi^2 + \mu^2 - \sqrt{(m_0^2 + M_\chi^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2 m_0^2}\right] \simeq \frac{m_0^2\mu^2}{M_\chi^2 + m_0^2 + \mu^2} + O\left(\frac{m_0^4\mu^4}{M_\chi^6}\right) \tag{91}$$

и

$$m_2^2 = \frac{1}{2}\left[m_0^2 + M_\chi^2 + \mu^2 + \sqrt{(m_0^2 + M_\chi^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2 m_0^2}\right] \simeq M_\chi^2 + m_0^2 + \mu^2 + O\left(\frac{m_0^2\mu^2}{M_\chi^2}\right). \tag{92}$$

В выражениях (91), (92) обозначены пределы больших M_χ. Фермионная массовая матрица включает «обычный see-saw» механизм, обеспечивая t-кварку массу $\sim m_0\mu/M_\chi \ll \mu = 600$ ГэВ. Диагонализация фермионной массовой матрицы не изменяет вакуумного среднего ($v \simeq 175$ ГэВ) составного хиггсовского дублета. Действительно, соотношение (71) в этом случае переписывается в виде

$$v^2 = f_\pi^2 = \frac{N_C}{16\pi^2} \frac{m_t^2}{\sin^2\phi_L}\left(\log\frac{M^2}{\overline{M}^2} + k\right), \tag{93}$$

где m_t — физическая масса t-кварка, ϕ_L — угол смешивания, диагонализующий массовую матрицу. Выражение (93) отличается от (71) на фактор усиления $1/\sin^2\phi_L$, и это есть следствие see-saw механизма. Топ see-saw рассматривает дублет $\psi_L = (t_L, b_L)$ как источник слабого $I = 1/2$ квантового числа составного хиггсовского бозона, т. е. причину EWSB вакуумного конденсата.

Как топцвет формирует μ-массовый член? Рассмотрим включение КХД в калибровочные группы $SU(3)_1 \times SU(3)_2$, причем соответствующие константы связи будем обозначать как h_1 и h_2. Эти группы симметрии на масштабе M нарушены до $SU(3)_{\text{КХД}}$. Элементарные фермионы дополняют следующие представления полной калибровочной группы $SU(3)_1 \times SU(3)_2 \times SU(2)_W \times U(1)_Y$:

$$\psi_L : (3,1,2,+1/3); \quad \chi_R : (3,1,1,+4/3); \quad t_R, \chi_L : (1,3,1,+4/3). \tag{94}$$

Однако этот набор фермионов не полон: представления, обозначенные через $[SU(3)_1]^3$, $[SU(3)_2]^3$ и $U(1)_Y[SU(3)_{1,2}]^2$, имеют калибровочные аномалии. Эти аномалии будут сокращаться фермионами, связанными либо с динамическим нарушением $SU(3)_1 \times \times SU(3)_2$, либо с генерацией массы b-кварка. Схематично это выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cc} SU(3)_1 & SU(3)_2 \\ \hline \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \\ (\chi_R) \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_R \\ (\chi_L) \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$

Динамика EWSB и генерации массы t-кварка не будет зависеть от деталей представлений дополнительных фермионов. Введем скалярное хиггсовское поле Φ, преобразующееся как $(\overline{3}, 3, 1, 0)$ и имеющее диагональные вакуумные средние $\langle\Phi^i_j\rangle = \nu\delta^i_j$. Это поле можно рассматривать как «реликт» компактификаций дополнительного измерения. Топцвет нарушен до КХД:

$$SU(3)_1 \times SU(3)_2 \to SU(3)_{\text{КХД}}. \tag{95}$$

При этом возникают безмассовые глюоны и колороны массы M (цветовой октет массивных калибровочных бозонов)

$$M^2 = (h_1^2 + h_2^2)\nu^2. \tag{96}$$

Поле Φ можно использовать для введения связи фермионов $\chi_{L,R}$ типа $-\xi\overline{\chi}_R\Phi\chi_L + {}$ + э.с. $\to -M_\chi\overline{\chi}\chi$. Последнее выражение есть не что иное, как электрослабый синглетный массовый член. Величина ξ может быть пертурбативной константой связи, т. е. $\nu \gg \xi\nu = M_\chi$. Наконец, поскольку как t_R, так и χ_L несут одинаковые топцветовые и $U(1)_Y$ квантовые числа, то следует учесть и массовый член вида $m_0\overline{\chi}_L t_R$ + э.с.

Лагранжиан модели на масштабах, меньших массы колорона M, обладает $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)$-инвариантностью:

$$L_0 = L_{\text{кинетич.}} - (M_\chi\overline{\chi}_L\chi_R + m_0\overline{\chi}_L t_R + \text{э.с.}) + L_{\text{int}}. \tag{97}$$

Лагранжиан L_{int} содержит остаточные топцветовые взаимодействия за счет обмена массивными колоронами:

$$L_{\text{int}} = -\frac{h_1^2}{M^2}\left(\overline{\psi}_L\gamma^\mu\frac{M^A}{2}\psi_L\right)\left(\overline{\chi}_R\gamma_\mu\frac{M^A}{2}\chi_R\right) + LL + RR, \tag{98}$$

где LL (RR) относятся к чисто левым (правым) ток-токовым взаимодействиям. Применяя преобразование Фирца в лидирующем порядке по $1/N_C$, получим

$$L_{\text{int}} = \frac{h_1^2}{M^2}(\overline{\psi}_L\chi_R)(\overline{\chi}_R\psi_L). \tag{99}$$

Используя следующие переопределения, удобно перейти к массовому базису:

$$\begin{aligned} \chi_R &\to \cos\phi_R\chi_R - \sin\phi_R t_R; \\ t_R &\to \cos\phi_R t_R + \sin\phi_R\chi_R, \end{aligned} \tag{100}$$

где

$$\operatorname{tg}\phi_R = \frac{m_0}{m_\chi}. \tag{101}$$

В этом базисе NJL-лагранжиан

$$L_0 = L_{\text{кинетич.}} - \overline{M}\overline{\chi}_R\chi_L + \text{э.с.} + \frac{h_1^2}{M^2}\big[\overline{\psi}_L(\cos\phi_R\chi_R - \sin\phi_R t_R)\big]\big[(\cos\phi_R\overline{\chi}_R - \sin\phi_R\overline{t}_R)\psi_L\big], \tag{102}$$

где

$$\overline{M} = \sqrt{M_\chi^2 + m_0^2}. \tag{103}$$

На этой стадии для нахождения величины μ следует сделать выбор: использовать ренормгруппу или уравнения для щели. Более рационально изучать уравнения для щели, так как именно они дают возможность, в отличие от ренормгруппы, исследовать предел $\overline{M} > M$.

Предполагая два динамических массовых члена

$$-\mu_1\overline{t}_L\chi_R - \mu_2\overline{t}_L t_R \tag{104}$$

можно записать связанную систему уравнений для μ_1:

$$\begin{aligned} \mu_1 = {} & \frac{h_1^2N}{8\pi^2M^2}\mu_1\cos^2\phi_R\left(M^2 - \overline{M}^2\ln\left(\frac{M^2+\overline{M}^2}{\overline{M}^2}\right)\right) + \\ & + \frac{h_1^2N}{8\pi^2M^2}\mu_1\cos^2\phi_R\left(-\mu_1^2\ln\left(\frac{M^2+\overline{M}^2}{\overline{M}^2}\right) + \frac{\mu_1^2M^2}{M^2+\overline{M}^2} - \mu_2^2\ln\left(\frac{M^2+\overline{M}^2}{\overline{M}^2}\right)\right) + \\ & + \frac{h_1^2N}{8\pi^2M^2}\cos\phi_R\sin\phi_R\left(M^2 - \mu_1^2\ln\left(\frac{M^2+\overline{M}^2}{\overline{M}^2}\right) - \mu_2^2\ln\left(\frac{M^2}{m_t^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{105}$$

Аналогичные уравнения записываются и для μ_2. Если сделать замены $\mu_1 = \mu\cos\phi_R$ и $\mu_2 = \mu\sin\phi_R$, то два уравнения для щели сводятся к одному уравнению:

$$\begin{aligned} \mu = {} & \frac{h_1^2N}{8\pi^2M^2}\mu\left(M^2 - \overline{M}^2\cos^2\phi_R\ln\left(\frac{M^2+\overline{M}^2}{\overline{M}^2}\right) - \right. \\ & \left. - \mu^2\ln\left(\frac{M^2+\overline{M}^2}{\overline{M}^2}\right) + \frac{\mu^2M^2}{M^2+\overline{M}^2} - \mu^2\sin^4\phi_R\ln\left(\frac{M^2(M^2+\overline{M}^2)}{m_t^2\overline{M}^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{106}$$

Уравнение для щели (106) показывает, что в пределе больших $\overline{M}$ нужно потребовать суперкритической связи. Более того, для фиксированной суперкритической связи $h_1^2/(4\pi)$, с ростом $\overline{M}$ переход в конденсатное состояние выглядит как фазовый переход 2-го рода.

Уравнение (106) воспроизводит t-конденсацию в пределе $\overline{M} \to \infty$, M — фиксировано:

$$\mu = \frac{h_1^2 N}{8\pi^2 M^2}\mu\left(M^2(1-\cos^2\phi_R) - \mu^2\sin^2\phi_R \ln\left(\frac{M^2}{m_t^2}\right)\right). \tag{107}$$

Переопределяя $\tilde{g} = h_1 \sin\phi_R$ и $m_t = \mu\sin\phi_R$, получим

$$m_t = \frac{\tilde{g}^2 N}{8\pi^2 M^2}\mu\left(M^2 - m_t^2 \ln\left(\frac{M^2}{m_t^2}\right)\right). \tag{108}$$

Это соотношение представляет собой уравнение щели для t-конденсации. Очевидно, что используя произвол в выборе $\sin\phi_R$, можно получить массу любого фермиона, меньшую, чем 600 ГэВ. В частности, за счет see-saw механизма получить необходимое значение m_t.

2.9.2. Включение b-кварка. Введем дополнительные фермионные поля ω_L, ω_R и b_R, имеющие следующие квантовые числа:

$$b_R, \omega_L : (1,3,1,-2/3), \quad \omega_R : (3,1,1,-2/3). \tag{109}$$

Будем также предполагать, по аналогии с χ и t массовыми членами, массовые члены $\overline{\omega}_L\omega_R$ и $\overline{\omega}_L b_R$:

$$L_0 \supset -(M_\omega \overline{\omega}_L\omega_R + m_\omega \overline{\omega}_L b_R + \text{э.с.}). \tag{110}$$

b-кварк можно включить двумя способами:

1)

$$\begin{array}{cc} SU(3)_1 & SU(3)_2 \\ \hline \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L & I = 1/2 \\ \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix}_R & I = 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_R & I = 0 \\ \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix}_L & I = 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Наоборот, можно определить поля χ и ω так, чтобы они составляли изодублет, т. е. приписать

$$b_R : (1,3,1,-2/3); \quad (\chi,\omega)_R : (3,1,2,1/3), \quad (\chi,\omega)_L : (3,1,2,1/3). \tag{111}$$

2)

$$\begin{array}{cc} SU(3)_1 & SU(3)_2 \\ \hline \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L & I = 1/2 \\ \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix}_R & I = 1/2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_R & I = 0 \\ \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix}_L & I = 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Эта модель предполагает достаточно простой способ подавления массы b-кварка по сравнению с массой t-кварка. Действительно, возможно подавление образования $\overline{\omega}_L b_R$-конденсата, если выбрать $\overline{M}_\omega = \sqrt{\mu_{\omega\omega}^2 + \mu_{\omega b}^2} \sim M$. В этом пределе масса b-кварка отсутствует. Если же считать, что $\mu_{\omega\omega} \le M$ и $\mu_{\omega b}/\mu_{\omega\omega} \ll 1$, то и в присутствии $\overline{\omega}_L b_R$-конденсата возникает приемлемое значения массы b-кварка.

2.10. Заключение

Как ожидается, следующее десятилетие будет связано с замечательными открытиями в физике элементарных частиц. LHC, а также ILC способны дать ответ на вопрос о происхождении масс частиц. В этой главе была рассмотрена возможность возникновения масс частиц за счет новой сильной динамики на ТэВ-м масштабе энергий. Как мы видели, динамическое нарушение симметрии, возникающее в моделях техницвета и топцвета, позволяет естественным образом объяснить существование электрослабого масштаба. Более того, наиболее «продвинутые» модели успешно объясняют масштаб фермионных масс и смешиваний, а также проблему CP-нарушения. Техницвет возник во времена, когда уже были обнаружены тяжелые W- и Z-бозоны, а известные фермионы, как оказалось, — имели малые массы. Поэтому естественным кажется считать (в первом приближении) все фермионы безмассовыми, а техницвет рассматривать как теорию, аналогичную КХД, в которой электрослабый масштаб формируется так же, как $\Lambda_{\text{КХД}}$. Очевидно, что техницвет требует новой калибровочной группы и дополнительных фермионов — техникварков. Техницвет, однако, оказался неполной теорией. Для описания масс легких фермионов потребовалось ввести расширенный техницвет (ETC). Из анализа редких распадов оказалось, что ETC имеет серьезные проблемы уже с очарованным кварком. Для учета тяжелых фермионов потребовалось введение «бегущего» и многомасштабного техницвета.

В конце 90-х годов прошлого века к тяжелым W- и Z-бозонам добавился очень тяжелый t-кварк. Для объяснения большой массы t-кварка была выдвинута идея топцвета. Наиболее развитые теории, как, например, TC2, предсказывают большое число новых частиц, которые могли бы быть наблюдаемыми на LHC. В TC2 t-кварк можно рассматривать в качестве первого техникварка. В схеме «топ seesaw» происходит конденсация t-кварка, появляются вектороподобные фермионы, при смешивании которых формируется физическая масса t-кварка.

Таким образом, модели спонтанного нарушения электрослабой симметрии, основанные на сильной динамике, согласуются со всеми известными экспериментальными ограничениями и имеют «право на жизнь». Есть обоснованные надежды, что ответ на вопрос «Выбрала ли Природа именно такой способ EWSB?» будет получен на LHC.

Приложение 1. Однопетлевые косвенные радиационные поправки

Для учета радиационных поправок запишем массы W- и Z-бозонов в виде

$$M_W^2 = \frac{1}{2} v_W^2 g_2^2, \quad M_Z^2 = \frac{1}{2} v_Z^2 (g_1^2 + g_2^2), \tag{1}$$

где $v_W(v_Z)$ — хиггсовское вакуумное среднее, как оно «видится» $W(Z)$-бозоном. На древесном уровне $v_W^2 = v_Z^2 = v_{\text{weak}}^2 = v^2$, и мы хотели бы включить радиационные поправки, расщепляющие эти величины и приводящие к эволюции по q^2. Радиационные поправки к спонтанно нарушенной стандартной модели проявляются в зависимости от q^2 четырех величин: $g_1^2(q^2)$, $g_2^2(q^2)$ и $v_W^2(q^2)$, $v_Z^2(q^2)$. Для бегущих констант связи хорошим приближением является $\alpha(M_Z) \simeq \alpha(M_W)$.

Обратимся теперь к v_W и v_Z. Сначала исключим константы связи, переопределив поля: $\tilde{A}_\mu^a = g_2 A_\mu^a$ и $\tilde{B}_\mu = g_1 B_\mu$. Петлевые поправки для корреляционных функций (или обратных пропагаторов) любых двух калибровочных полей можно записать в виде

$$\langle 0 | T(\tilde{A}_\mu^A(0) \tilde{A}_\mu^B(x)) | 0 \rangle = g_{\mu\nu} \Pi_{AB} - q_\mu q_\nu \Pi_{AB}^T, \tag{2}$$

индекс T означает поперечность. Определим v_W и v_Z следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v_Z^2 &= \frac{1}{2} v_{\text{weak}}^2 - \Pi_{3B} = \frac{1}{2} v_{\text{weak}}^2 - \Pi_{3Q} + \Pi_{33}, \\ \frac{1}{2} v_W^2 &= \frac{1}{2} v_{\text{weak}}^2 + \Pi_{WW} - \Pi_{3Q}. \end{aligned} \tag{3}$$

Константы связи

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{g_{2nn}^2} - \Pi_{33}^T - \Pi_{3B}^T = \frac{1}{g_{2nn}^2} - \Pi_{3Q}^T, \\ \frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{g_{1nn}^2} - \Pi_{BB}^T - \Pi_{3B}^T = \frac{1}{g_{1nn}^2} + \Pi_{3Q}^T - \Pi_{QQ}^T, \end{aligned} \tag{4}$$

где g_{inn} — неренормированная константа связи. Доминирующий вклад в v_W^2 и v_Z^2 при $q^2 = 0$ в стандартной модели возникает за счет третьего поколения и Хиггс-бозона:

$$v_W^2 - v_Z^2 = \frac{N_C}{32\pi^2} \left((m_t^2 + m_b^2) - \frac{2 m_t^2 m_b^2}{(m_t^2 - m_b^2)} \log\left(\frac{m_t^2}{m_b^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{M_W^2 m_H^2}{m_H^2 - M_W^2} \ln\left(\frac{m_H^2}{M_W^2}\right) - \frac{M_Z^2 m_H^2}{m_H^2 - M_Z^2} \ln\left(\frac{m_H^2}{M_Z^2}\right) \right). \tag{5}$$

Параметр ρ Велтмана:

$$\rho = \frac{v_W^2}{v_Z^2} = 1 + \frac{N_C}{32 v_0^2 \pi^2} \left((m_t^2 + m_b^2) - \frac{2 m_t^2 m_b^2}{(m_t^2 - m_b^2)} \log\left(\frac{m_t^2}{m_b^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{M_W^2 m_H^2}{m_H^2 - M_W^2} \ln\left(\frac{m_H^2}{M_W^2}\right) - \frac{M_Z^2 m_H^2}{m_H^2 - M_Z^2} \ln\left(\frac{m_H^2}{M_Z^2}\right) \right). \tag{6}$$

Вообще говоря, v_W^2 и v_Z^2 имеют слабую q^2-зависимость. Возможные эффекты новой физики на масштабе $|q| \sim 1$ ТэВ могли бы внести дополнительную, по сравнению со стандартной моделью, q^2-зависимость. В этом отношении квадраты констант связи g_1^2 и g_2^2 гораздо менее чувствительны к эффектам новой физики. Интересно поискать

такие переменные, в которых новая физика проявляла бы себя наиболее заметным образом. Разложим v_W^2 и v_Z^2 в ряды Тейлора по степеням q^2:

$$\begin{aligned} v_W^2(q^2) &= v^2 + \sigma q^2 + \tau v_r^2 + \omega q^2, \\ v_Z^2(q^2) &= v^2 + \sigma q^2 - r v_r^2 - \omega q^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Параметр v^2 — это среднее ($I = 0$) из двух констант распада, оно содержит «физику» нарушения симметрии. Слагаемое $\tau(I = 1)$ характеризует расщепление при нулевом импульсе (ρ-параметр). Параметры же σ и ω характеризуют вклады ($I = 0$) и ($I = 1$) в q^2-эволюцию эффективной низкоэнергетической теории.

В литературе существуют и другие параметризации. Peskin и Takenchi ввели следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S &= 16\pi\left[\frac{\partial}{\partial q^2}\Pi_{33}\bigg|_{q^2=0} - \frac{\partial}{\partial q^2}\Pi_{3Q}\bigg|_{q^2=0}\right], \\ T &= \frac{4\pi}{\sin^2\theta\cos^2\theta M_Z^2}\left[\Pi_{WW}\big|_{q^2=0} - \Pi_{33}\big|_{q^2=0}\right], \\ U &= 16\pi\left[\frac{\partial}{\partial q^2}\Pi_{WW}\bigg|_{q^2=0} - \frac{\partial}{\partial q^2}\Pi_{33}\bigg|_{q^2=0}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Если вспомнить определения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_Z^2 &= \frac{1}{2}v_{\text{weak}}^2 + \Pi_{33} - \Pi_{3Q}^T, \\ \frac{1}{2}v_W^2 &= \frac{1}{2}v_{\text{weak}}^2 + \Pi_{WW} - \Pi_{3Q}^T, \end{aligned} \tag{9}$$

то получим

$$\sigma = \frac{2S+U}{16\pi}, \quad \omega = \frac{U}{16\pi}, \quad \tau = \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta M_Z^2 T}{4\pi v_r^2} = \frac{\alpha}{2}T. \tag{10}$$

Из определения параметра S находим

$$S = \frac{N_C}{6\pi}\left[1 - Y\log\left(\frac{m_b^2}{m_t^2}\right)\right]. \tag{11}$$

Параметр T задается с помощью разложения ρ-параметра или разностью между v_W^2 и v_Z^2 при нулевом импульсе

$$\begin{aligned} T = \frac{N_C}{4\pi\sin^2\theta\cos^2\theta M_Z^2}\Bigg((m_t^2 + m_b^2) - \frac{2m_t^2 m_b^2}{(m_t^2 - m_b^2)}\log\left(\frac{m_t^2}{m_b^2}\right) + \\ + \frac{M_W^2 m_H^2}{m_H^2 - M_W^2}\ln\left(\frac{m_H^2}{M_W^2}\right) - \frac{M_Z^2 m_H^2}{m_H^2 - M_Z^2}\ln\left(\frac{m_H^2}{M_Z^2}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично

$$U = \frac{N_C}{6\pi}\left[-\frac{5m_t^4 - 22m_t^2 m_b^2 + 5m_b^4}{3(m_t^2 - m_b^2)^2} + + \frac{m_t^6 - 3m_t^4 m_b^2 - 3m_t^2 m_b^4 + m_b^6}{(m_t^2 - m_b^2)^3}\log\left(\frac{m_t^2}{m_b^2}\right)\right]. \tag{13}$$

Объединяя величины, определяемые в различных экспериментах: $G_F = 1/(2\sqrt{2}v^{(0)})$, $M_Z^2 = (1/2)(g_1^2(M_Z^2) + g_2^2(M_Z^2))v^2(M_Z^2)$, $M_W^2 = (1/2)g_2^2(M_W^2)v^2(M_W^2)$, $\sin^2\theta_{Z-\text{pole}} = g_1(M_Z^2)/(g_1(M_Z^2) + g_2(M_Z^2))$ и массу t-кварка, получим эллипсоидальную область в ST-плоскости. Эффекты новой физики лежат вне этой области.

Приложение 2. Модель Намбу–Иона–Ласинио (NJL)

Много полезного, касающегося динамического нарушения симметрии, можно извлечь из теории сверхпроводимости БКШ.

Действительно, эта теория включает динамическое спаривание фермионов, приводящее, в присутствии сильного притягивающего взаимодействия, к перестройке вакуума. Поэтому весьма естественно, что идеи БКШ привнесены в физику элементарных частиц и используются для описания генерации масс в сильных взаимодействиях. В физике элементарных частиц это явление известно как механизм нарушения киральной симметрии. Простейшей моделью, описывающей нарушение киральной симметрии, является модель NJL.

Рассмотрим четырехфермионное взаимодействие с вершиной $G = g^2/\Lambda^2$. Теория на большом масштабе Λ описывается лагранжианом

$$L_\Lambda = \overline{\psi}_L^a i\partial\!\!\!/ \psi_L^a + \overline{\psi}_R^a i\partial\!\!\!/ \psi_R^a + G(\overline{\psi}_L^a \psi_{Ra})(\overline{\psi}_R^b \psi_{Lb}), \tag{1}$$

где (a, b) — глобальные $SU(N)$ «цветовые» индексы. Заметим, что четырехфермионный характер взаимодействия проявляется после преобразований Фирца обменного потенциала:

$$\frac{1}{2} g^2 \left(\overline{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^A}{2} \psi\right) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 - \Lambda^2} \left(\overline{\psi} \gamma_\nu \frac{\lambda^A}{2} \psi\right). \tag{2}$$

Видно, что $G = g^2/\Lambda^2$ при $q^2 = 0$.

Будем считать выражение (1) эффективным лагранжианом на масштабе Λ, т. е. константа связи g — ренормированная эффективная константа связи на этом масштабе.

Перепишем (1), введя аксиальное поле H:

$$L = L_{\text{кинет.}} + (g\overline{\psi}_L \psi_R H + \text{э.с.}) - \Lambda^2 H^+ H. \tag{3}$$

Если проинтегрировать по полю H, то воспроизведем четырехфермионную вершину с константой $G = g^2/\Lambda^2$. Очевидно, что $G > 0$ подразумевает притягивающее взаимодействие. Поэтому выражение (3) — эффективный лагранжиан на масштабе Λ. Чтобы получить эффективный лагранжиан на масштабе $\mu < \Lambda$, следует проинтегрировать по компонентам фермионного поля, изменяющимся на масштабах $\mu > \Lambda$. Полный эффективный потенциал на новом масштабе μ:

$$L_\mu = L_{\text{кинет.}} + g\overline{\psi}_L \psi_R H + \text{э.с.} + Z_H |\partial_\nu H|^2 - m_H^2 H^+ H - \frac{\lambda_0}{2}(H^+ H)^2 - \xi_0 R H^+ H. \tag{4}$$

В этом выражении R — геометрическая скалярная кривизна, т. е. возникает «неминимальная» связь хиггсовского поля с гравитацией. Вычисление фейнмановских диаграмм позволяет определить параметры в лагранжиане (4):

$$\begin{gathered} Z_H = \frac{g^2 N_C}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad m_H^2 = \Lambda^2 - \frac{2g^2 N_C}{(4\pi)^2}(\Lambda^2 - \mu^2), \\ \lambda_0 = \frac{2g^4 N_C}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right), \quad \xi_0 = \frac{g^2 N_C}{6(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Видно, что индуцируемые низкоэнергетические параметры Z_H, λ_0 и ξ_0 определяются величиной Λ, причем нас интересует предел $\mu \simeq 0$ теории.

Заметим, что эффективная теория применима как для спонтанно нарушенной, так и ненарушенной фазы. Нарушенная фаза выбирается требованием $m_H^2 < 0$ для

масштабов $\mu^2 \ll \Lambda^2$. Иначе говоря, $\Lambda^2(1 - g^2 N_C/(8\pi)) < 0$, т. е. $g^2 > 8\pi^2/N_C = g_C^2$ определяет критическую константу связи. Для $m_H^2 > 0$ при $\mu \to 0$ теория остается в ненарушенной фазе.

Приведем эффективный лагранжиан к более привычной форме, переопределив поле $H \to H\big/\sqrt{Z_H}$:

$$L = L_{\text{кинет.}} + \tilde{g}\overline{\psi}_L\psi_R H + \text{э.с.} + |\partial_\nu H|^2 - \tilde{m}_H^2 H^+H - \frac{\tilde{\lambda}}{2}(H^+H)^2 - \xi R H^+ H. \tag{6}$$

В последнем выражении

$$\begin{gathered} \tilde{g}^2 = \frac{g^2}{Z_H} = \frac{16\pi^2}{N_C \log(\Lambda^2/\mu^2)}, \\ \tilde{m}_H^2 = \frac{m_H^2}{Z_H}, \\ \overline{\lambda} = \frac{\lambda_0}{Z_H^2} = \frac{32\pi^2}{N_C \log(\Lambda^2/\mu^2)}, \\ \xi = \frac{\xi_0}{Z_H} = \frac{1}{6}. \end{gathered} \tag{7}$$

Это физические ренормированные константы связи. Можно при низких энергиях подогнать $\tilde{m}_H^2$ к желаемой величине, тогда остающиеся «предсказания» модели, как мы увидим ниже, содержатся в $\tilde{g}$, $\overline{\lambda}$ и ξ. Композитность H-бозона заключается в том, что g и λ сингулярны при $\mu \to \Lambda$. Это условие называют условием композитности.

Эти результаты следуют и из уравнений ренормгруппы, если их дополнить условием композитности при высоких энергиях.

Если использовать приближение β-функции, учитывающее фермионное петли:

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{\partial}{\partial \ln \mu} g &= N_C g^3, \\ 16\pi^2 \frac{\partial}{\partial \ln \mu} \lambda &= (-4N_C g^4 + 4N_C g^2 \lambda), \end{aligned} \tag{8}$$

то решение первого уравнения ренормгруппы дает

$$\frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{1}{g^2(\Lambda)} = \frac{N_C}{16\pi^2} \ln(\Lambda^2/\mu^2). \tag{9}$$

При граничном условии $1/g^2(\Lambda) = 0$ получаем уже полученный результат $\tilde{g}^2 = g_C^2(\mu)$. Второе уравнение (8) можно решить, выбрав подстановку $\lambda = cg^2$. Тогда

$$16\pi^2 \frac{\partial}{\partial \ln \mu} g = \frac{1}{2c}(4c - 4) N_C g^3. \tag{10}$$

Если потребовать согласованности этого уравнения с другим уравнением ренормгруппы, следует положить $c = 2$. В этом случае

$$\frac{1}{\lambda(\mu)} - \frac{1}{\lambda(\Lambda)} = \frac{N_C}{32\pi^2} \ln(\Lambda^2/\mu^2), \tag{11}$$

и снова условие $\lambda^{-1}(\Lambda) = 0$ дает $\tilde{\lambda} = \lambda(\mu)$. Для получения феноменологических следствий модели NJL исследуем низкоэнергетический хиггсовский потенциал

$$V(H) = -\tilde{m}_H^2 H^+H + \frac{\tilde{\lambda}}{2}(H^+H)^2 - (\tilde{g}\overline{\psi}_L\psi_R H + \text{э.с.}). \tag{12}$$

Будем считать, что $\tilde{m}_H^2 < 0$, поэтому нейтральное хиггсовское поле имеет ненулевое вакуумное среднее: $\mathrm{Re}(H^0) = (v + h)\big/\sqrt{2}$. Тогда динамическая масса фермиона

$$m = \frac{\tilde{g}v}{\sqrt{2}}, \tag{13}$$

а масса h

$$m_h^2 = v^2\tilde{\lambda}. \tag{14}$$

При этом отношение

$$\frac{m_h^2}{m^2} = \frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{g}^2} = 4, \quad m_h = 2m. \tag{15}$$

Физическая частица H является связанным состоянием $\overline{\psi}\psi$, возникающим вследствие четырехфермионного взаимодействия на масштабе Λ. Это нерелятивистское связанное состояние, построенное из релятивистских фейнмановских петель, включающих импульсы от m до Λ.

ГЛАВА 3

МАЛЕНЬКИЙ ХИГГС

3.1. Введение

Количественные предсказания SM в ее электрослабом секторе предполагают, что электрослабая симметрия нарушена одним или более хиггсовским дублетом. Однако фундаментальные скалярные поля «страдают» от радиационной нестабильности их масс, приводящей к ожидаемым дополнительным структурам (композитности, суперсимметрии, маленькому хиггсу, ...) вблизи электрослабого масштаба. Рассмотрим более подробно источник нестабильности массы бозона Хиггса. Три наиболее опасные радиационные поправки к массе хиггса в SM возникают из однопетлевых диаграмм с t-кварками, $SU(2)$ калибровочными бозонами и самовзаимодействия хиггса (рис. 1).

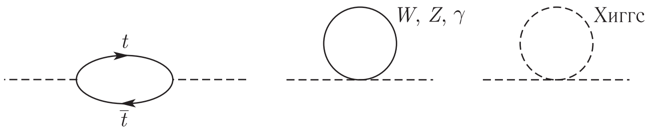


Рис. 1

Все другие диаграммы дают гораздо меньшие поправки, поскольку они содержат малые константы связи. Предполагая, что SM остается справедливой вплоть до параметров обрезания, характерного для LHC энергий, $\Lambda \sim 10$ ТэВ, для вклада трех диаграмм получаем:

$$\begin{aligned} t\text{-петля} \quad & -\frac{3}{8\pi^2}\lambda_t^2\Lambda^2 \sim (2\ \text{ТэВ})^2, \\ W\text{-},\ Z\text{-},\ \gamma\text{-петля} \quad & \frac{9}{64\pi^2}g^2\Lambda^2 \sim (700\ \text{ГэВ})^2, \\ \text{Хиггс-петля} \quad & \frac{1}{16\pi^2}\lambda^2\Lambda^2 \sim (500\ \text{ГэВ})^2. \end{aligned}$$

Полный квадрат массы хиггса включает сумму этих петлевых вкладов и параметр квадрата массы в древесном приближении. Чтобы получить вакуумное среднее хиггсовского поля с точностью $\sim 10\%$, вклады t-кварковых, калибровочных и хиггсовских петель следует обрезать на масштабах

$$\Lambda_t \leq 2\ \text{ТэВ}, \quad \Lambda_{\text{калибр.}} \leq 5\ \text{ТэВ}, \quad \Lambda_H \leq 10\ \text{ТэВ}. \tag{1}$$

Очевидно, что SM с обрезанием на уровне имеющихся энергий Тэватрона (~ 1 ТэВ) весьма естественна, и нет ничего удивительного, что эффекты новой физики не видны. Однако SM с обрезаниями порядка LHC энергий уже допускает новую физику. Более точно, можно ожидать новую физику, которая «сокращает» расходящуюся t-кварковую петлю на масштабе ниже 2 ТэВ. В слабосвязанной теории это означает

наличие новых частиц с массами, меньшими 2 ТэВ. Эти частицы должны быть связаны с хиггсом, порождать новую петлевую диаграмму, сокращающую квадратично расходящийся вклад t-кварковой петли. Чтобы это сокращение было естественным, новые частицы должны быть связаны с t-кварком некоторой симметрией. Таким образом, из соображений натуральности ожидается мультиплет цветных частиц с массой, меньшей 2 ТэВ. В суперсимметрии это SUSY партнеры t-кварка.

Аналогично, вклады от $SU(2)$ калибровочных петель должны сокращаться за счет новых частиц, связанных с $SU(2)$ калибровочными бозонами SM также некоторой симметрией, причем массы этих частиц меньше 5 ТэВ.

Наконец, хиггсовская петля требует новых частиц с массой, меньшей 10 ТэВ, и связанных с Хиггс-бозоном. Возможности LHC кажутся вполне достаточными для обнаружения всех этих новых частиц.

Может оказаться, что новые частицы являются суперпартнерами минимальной суперсимметричной стандартной модели (MSSM).

Другая возможность, кажущаяся сейчас менее вероятной, — Хиггс-бозон на ТэВ-й шкале окажется составной частицей, описываемой в моделях техницвета. В этой главе будет обсуждаться другая возможность — хиггс как псевдо-намбу–голдстоуновский бозон. Как будет видно, в этой модели масса Хиггс-бозона не содержит однопетлевых квадратичных расходимостей. Причина этого состоит в существовании глобальных симметрий. Чтобы обеспечить не слишком радикальное нарушение глобальных симметрий следует ввести новые частицы, и эти частицы формируют обрезания для квадратично расходящихся t-кварка, калибровочных и хиггсовских петель.

В разд. 3.2 будут рассмотрены основные идеи теории намбу — голдстоуновских бозонов. Затем, в разделах 3.3–3.6 построена теория маленького хиггса, основанная на $SU(3)$-модели. Прототип модели, основанной на произведении групп, обсуждается в разд. 3.7, 3.8. Наконец, в разд. 3.9 рассматриваются электрослабые ограничения и феноменология маленького хиггса.

3.2. Намбу–голдстоуновские бозоны

Намбу–голдстоуновские бозоны (NGB) возникают при спонтанном нарушении непрерывных глобальных симметрий. Если симметрия точная, NGB — безмассовые и имеют связи только через производные.

$U(1)$-пример. Рассмотрим теорию с одним комплексным скалярным полем ϕ и потенциалом $V = V(\phi^*\phi)$. Кинетический член $\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi$ и потенциал инвариантны относительно $U(1)$-преобразований симметрии

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi. \tag{2}$$

Если минимум потенциала находится не в начале координат, а сдвинут на некоторое «расстояние» f(как в потенциале «мексиканской шляпы»), то в вакууме $U(1)$-симметрия спонтанно нарушена. Разложим поле по малым флуктуациям возле вакуумного среднего (vev):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f + r(x)\big)e^{\frac{i\theta(x)}{f}}, \tag{3}$$

где f — это vev, $r(x)$ — массивная «радиальная мода» и $\theta(x)$ — NGB. Фактор $1/\sqrt{2}$ подразумевает канонические кинетические члены для вещественных полей r и θ.

Радиальное поле r инвариантно относительно $U(1)$-преобразований симметрии (2), а NGB поле θ при этих преобразованиях испытывает сдвиг

$$\theta \to \theta + \alpha. \tag{4}$$

В этом случае говорят, что $U(1)$-симметрия реализована нелинейно. Предположим, что мы интегрируем по массивному полю r. Мы должны быть уверены, что результирующий эффективный лагранжиан NGB поля $\theta(x)$ не содержит массового члена для θ, так как сдвиг симметрии подавляет все «непроизводные» связи θ.

Неабелевы примеры. Обобщая на спонтанное нарушение неабелевых симметрий, находим по одному NGB на каждый генератор нарушенной симметрии. Например, предположим, мы нарушаем $SU(N) \to SU(N-1)$ с вакуумным средним (vev) единственного фундаментального поля ϕ в группе $SU(N)$. Число нарушенных генераторов есть полное число генераторов $SU(N)$ минус число генераторов ненарушенной симметрии:

$$[N^2 - 1] - \left[(N-1)^2 - 1\right] = 2N - 1. \tag{5}$$

NGB удобно параметризовать в следующем виде

$$\phi = \exp\left\{ \frac{i}{f} \begin{pmatrix} & & & \pi_1 \\ & & & \vdots \\ & & & \pi_{N-1} \\ \pi_1^* & \ldots & \pi_{N-1}^* & \pi_0/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \equiv e^{i\frac{\pi}{f}} \phi_0. \tag{6}$$

Поле π_0 — вещественно, а поля $\pi_1, \ldots, \pi_{N-1}$ — комплексны. Последнее равенство в (6) определяет удобное сокращенное обозначение, которое мы будем использовать в дальнейшем.

Другой пример нарушения симметрии и NGB, который находит применение в моделях маленького хиггса:

$$SU(N) \to SO(N). \tag{7}$$

Здесь число NGB есть разность между числом полей в присоединенном представлении $SU(N)$ и числом полей в присоединенном представлении $SO(N)$ (антисимметричный тензор):

$$[N^2 - 1] - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} - 1. \tag{8}$$

Для четного N нам потребуется и

$$SU(N) \to Sp(N). \tag{9}$$

В этом случае число NGB:

$$[N^2 - 1] - \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(N-1)}{2} - 1. \tag{10}$$

Наконец, для

$$SU(N) \times SU(N) \to SU(N) \tag{11}$$

число NGB равно

$$2[N^2 - 1] - [N^2 - 1] = N^2 - 1. \tag{12}$$

В последнем случае нарушение симметрии происходит за счет vev, которое преобразуется как би-фундаментальное поле относительно двух $SU(N)$-симметрий. Обозначая матрицы преобразований двух $SU(N)$ через L и R, получаем

$$\phi \to L\phi R^{+}. \tag{13}$$

Нарушающее симметрию vev пропорционально единичной матрице

$$\langle\phi\rangle \equiv \phi_0 = f\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Это vev остается инвариантным относительно «векторных» преобразований, для которых $L = R = U$:

$$\phi_0 \to U\phi_0 U^{+} = \phi_0, \tag{15}$$

при этом другие операторы симметрии (аксиальные генераторы) нарушены. Соответствующие NGB могут быть параметризованы

$$\phi = \phi_0 e^{i(\pi/f)} = f e^{i(\pi/f)}, \tag{16}$$

где π — эрмитова бесследовая матрица с $N^2 - 1$ независимой компонентой.

3.2.1. Как преобразуются NGB? На примере $SU(N) \to SU(N-1)$ (который часто в математической нотации обозначают $SU(N)/SU(N-1)$) покажем, как NGB преобразуются относительно нарушенных и ненарушенных симметрий. Считаем, что NGB параметризованы, как и в (6), в виде $\phi = e^{i\pi}\phi_0$. Рассмотрим сначала ненарушенные $SU(N-1)$-преобразования:

$$\phi \to U_{N-1}\phi = (U_{N-1}e^{i\pi}U_{N-1}^{+})U_{N-1}\phi_0 = e^{i(U_{N-1}\pi U_{N-1}^{+})}\phi_0, \tag{17}$$

где во втором равенстве использован тот факт, что нарушающее симметрию ϕ_0 инвариантно относительно ненарушенных U_{N-1}-преобразований. Поэтому NGB преобразуются при $SU(N-1)$ обычным «линейным» образом: $\pi \to U_{N-1}\pi U_{N-1}^{+}$.

Ненарушенные $SU(N-1)$-преобразования имеют вид

$$U_{N-1} = \begin{pmatrix} \widehat{U}_{N-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Единственный вещественный NGB π_0 преобразуется как синглет, в то время как $N-1$ комплексных NGB преобразуются следующим образом

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\pi} \\ \hline \vec{\pi}^{+} & 0 \end{array}\right) \to U_{N-1}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\pi} \\ \hline \vec{\pi}^{+} & 0 \end{array}\right)U_{N-1}^{+} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \widehat{U}_{N-1}\vec{\pi} \\ \hline \vec{\pi}^{+}\widehat{U}_{N-1}^{+} & 0 \end{array}\right), \tag{19}$$

где использована векторная нотация $\vec{\pi}$ для представления $N-1$ комплексных NGB. Как видно, $\vec{\pi} \to \widehat{U}_{N-1}\vec{\pi}$, т. е. $\vec{\pi}$ преобразуется по фундаментальному представлению $SU(N)$. Относительно нарушенной симметрии преобразования

$$\begin{aligned}\phi \to Ue^{i\pi}\phi_0 &= \exp\left\{i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\alpha} \\ \vec{\alpha}^{+} & 0 \end{pmatrix}\right\}\exp\left\{i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\pi} \\ \vec{\pi}^{+} & 0 \end{pmatrix}\right\}\phi_0 = \\ &= \exp\left\{i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\pi}' \\ \vec{\pi}'^{+} & 0 \end{pmatrix}\right\}U_{N-1}(\vec{\alpha},\vec{\pi})\phi_0 = \exp\left\{i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\pi}' \\ \vec{\pi}'^{+} & 0 \end{pmatrix}\right\}\phi_0,\end{aligned} \tag{20}$$

где во втором равенстве использован тот факт, что любое $SU(N)$-преобразование может быть записано как произведение преобразования из $SU(N)/SU(N-1)$ и $SU(N-1)$ преобразования. Преобразование $U_{N-1}(\vec{\alpha}, \vec{\pi})$, зависящее от $\vec{\alpha}$ и $\vec{\pi}$, оставляет ϕ_0 инвариантным, поэтому его можно исключить.

Уравнение (20) определяет трансформированное поле $\vec{\pi}'$, следовательно, и поле $\vec{\pi}$ как функцию $\vec{\alpha}$ и $\vec{\pi}$. В линейном порядке

$$\vec{\pi} \to \vec{\pi}' = \vec{\pi} + \vec{\alpha}. \tag{21}$$

Это соотношение показывает, что NGB испытывает сдвиг при нелинейно реализованных преобразованиях симметрии. Как и в $U(1)$-случае, сдвиг симметрии подразумевает, что NGB могут иметь только связи, зависящие от производных.

3.2.2. Эффективный лагранжиан NGB. Мы хотели бы записать наиболее общий эффективный лагранжиан, включающий только безмассовые NGB. В этом случае особенно удобна экспоненциальная запись полей ϕ: несмотря на то, что полное преобразование $SU(N)$ над π достаточно сложно, поля ϕ преобразуются довольно просто. Чтобы получить низкоэнергетический эффективный лагранжиан, запишем разложение по степеням ∂_μ/Λ и построим в каждом порядке наиболее общую $SU(N)$-инвариантную функцию $\phi = e^{i(\pi/f)}\phi_0$. Без производных можно образовать два основных калибровочно-инвариантных объекта: $\phi^+\phi = f^2$ и $\varepsilon^{a_1\ldots a_N}\phi_{a_1}\phi_{a_2}\ldots \ldots\phi_{a_N} = 0$. Таким образом, наиболее общий инвариантный вклад в потенциал есть просто константа.

Наиболее общий член, который может быть записан во втором порядке, есть константа, помноженная на $|\partial_\mu\phi|^2$:

$$L = \mathrm{const} + f^2|\partial_\mu\phi|^2 + O(\partial^4), \tag{22}$$

где нормировка второго слагаемого выбрана так, чтобы поля π имели каноническую кинетическую форму. Кинетический член для ϕ, разложенный по полям π, содержит взаимодействия, соответствующие рассеянию при низких энергиях произвольного числа π полей.

3.3. Построение маленького хиггса: $SU(3)$-случай

После того, как записан лагранжиан NGB, нам хотелось бы построить модель, в которой бы хиггс был NGB. Начнем с модели «простейшего маленького хиггса».

Для этого рассмотрим нарушение симметрии $SU(3)/SU(2)$ с NGB:

$$\pi = \left(\begin{array}{cc|c} -\eta/2 & 0 & \\ 0 & -\eta/2 & h \\ \hline & h^+ & \eta \end{array}\right). \tag{23}$$

Заметим, что h — дублет относительно ненарушенной $SU(2)$, как это требуется для стандартной модели хиггса, но этот дублет также NGB — он испытывает сдвиги относительно «нарушенных» $SU(3)$-преобразований. Поле η — $SU(2)$-синглет, которое мы далее будет игнорировать. Для нахождения взаимодействий поля h, найдем разложение

$$\phi = \exp\left\{\frac{i}{f}\begin{pmatrix} 0 & h \\ h^+ & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 0 \\ f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} h \\ 0\end{pmatrix} - \frac{1}{2f}\begin{pmatrix} 0 \\ h^+h\end{pmatrix} + \ldots . \tag{24}$$

Поэтому получаем

$$f^2|\partial_\mu\phi|^2 = |\partial_\mu h|^2 + \frac{|\partial_\mu h|^2 h^+ h}{f^2} + \ldots, \tag{25}$$

т. е. лагранжиан содержит хиггсовский кинетический член, а также взаимодействия, подавленные масштабом нарушения симметрии f.

Так как лагранжиан содержит неперенормируемые взаимодействия, он применим лишь для низкоэнергетического предела теории. Чтобы определить обрезание Λ, на котором теория становится сильно связанной, нужно вычислить петлевой вклад и найти тот масштаб, на котором петлевой вклад сравним с древесной диаграммой. Простейший пример — квадратично расходящийся однопетлевой вклад в кинетический член. Обрезая расходимость на масштабе Λ, получаем ренормированный кинетический член

$$\frac{1}{f^2}\frac{\Lambda^2}{16\pi^2}, \tag{26}$$

поэтому $\Lambda \leq 4\pi f$.

Суммируя, мы имеем теорию, содержащую «хиггсовский» дублет, преобразующийся относительно сохраняющейся глобальной группы симметрии $SU(2)$. Эти «хиггсы» являются NGB и поэтому безмассовые. Они имеют неперенормируемые взаимодействия, подавленные масштабом f, причем при $\Lambda = 4\pi f$ теория становится сильно связанной. Из-за сдвиговой симметрии нет диаграмм, расходящихся или нет, которые давали бы вклад в массу h.

Конечно, на этой стадии теория еще очень далека от той, которую мы бы хотели иметь: NGB могут иметь только взаимодействия, зависящие от производных, а это означает отсутствие калибровочных взаимодействий, юкавских связей и квадратичного потенциала. Любое из этих взаимодействий нарушает сдвиговую симметрию $h \to h + \text{const}$. В следующих подразделах будем обсуждать, как добавить эти взаимодействия без введения однопетлевых квадратичных расходимостей.

3.3.1. Калибровочные взаимодействия. Попробуем ввести для h $SU(2)$ калибровочные взаимодействия (пока игнорируем гиперзаряд, который легко добавить позже). Мы получим правильный ответ после нескольких попыток. Эти попытки окажутся безуспешными, но весьма поучительными.

Попытка первая. Давайте свяжем h и $SU(2)$ калибровочные бозоны обычным способом, добавив в лагранжиан (25) член

$$|gW_\mu h|^2 \tag{27}$$

совместно с другим слагаемым с одной производной и одним $SU(2)$ калибровочным бозоном, как это требует калибровочная инвариантность. Эти члены приводят к квадратично расходящимся фейнмановским диаграммам (рис. 2).

Рис. 2

Эти диаграммы генерируют массовый член

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\Lambda^2 h^+ h. \tag{28}$$

Заметим, что эти диаграммы — как раз те самые квадратично расходящиеся диаграммы SM с калибровочными петлями, от которых мы хотим избавиться. Таким образом, мы ничего не достигли: начали с теории с «хиггсом», являющимся нелинейной реализацией $SU(3)$-симметрии (при которой h испытывает сдвиг), но затем добавили член (27), который полностью нарушает симметрию. Конечно, мы с необходимостью должны нарушить сдвиговую симметрию, чтобы получить при этом калибровочные взаимодействия h. Однако при этом мы должны избежать квадратичных расходимостей в массе хиггса.

Попытка вторая. Попробуем связать h с калибровочными полями «более $SU(3)$-симметричным» образом, т. е.

$$\left| g \begin{pmatrix} W_\mu & \\ & 0 \end{pmatrix} \phi \right|^2 . \tag{29}$$

Пусть W_μ содержит три $SU(2)$ калибровочных бозона. Эта конструкция, тем не менее, сохраняет квадратично расходящийся вклад в массу хиггса. Диаграмма та же самая, как и прежде, за исключением внешних полей ϕ. Этот вклад

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \Lambda^2 \phi^+ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \phi = \frac{g^2}{16\pi^2} \Lambda^2 h^+ h + \ldots , \tag{30}$$

где проекционная матрица $\mathrm{diag}(1, 1, 0)$ возникает при суммировании по трем $SU(2)$ калибровочным бозонам, входящим в петлю. Неудивительно, что мы получили прежний результат, поскольку добавлены прежние взаимодействия, правда, в несколько других обозначениях.

Попытка третья. Попытаемся сохранить $SU(3)$, «калибруя» полную $SU(3)$-симметрию, т. е. добавим член $|D_\mu \phi|^2$, где теперь ковариантная производная содержит все 8 калибровочных бозонов $SU(3)$. Снова запишем ту же квадратично расходящуюся диаграмму и найдем

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \Lambda^2 \phi^+ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \phi = \frac{g^2}{16\pi^2} \Lambda^2 f^2 . \tag{31}$$

Этот вклад не содержит зависимости от хиггсовского поля. Квадратичная расходимость вносит постоянный вклад в вакуумную энергию, но не в массу «хиггсовского» дублета h! К сожалению, при этом мы потеряли h: NGB «поглощены» тяжелыми $SU(3)$ калибровочными бозонами, соответствующими нарушенным генераторам, т. е. они стали продольными компонентами калибровочных бозонов.

Мы исчерпали все возможные способы добавления $SU(2)$ калибровочных взаимодействий в нашей простой модели h. Урок состоит в том, что мы можем избежать квадратично расходящихся вкладов в массу бозона Хиггса, записывая $SU(3)$-инвариантные калибровочные взаимодействия. Проблема в том, что сами «хиггсы» при этом оказываются «поглощенными».

Попытка четвертая (на этот раз успешная). Выберем два NGB ϕ_1 и ϕ_2 и добавим $SU(3)$-ковариантные производные для обоих полей. Мы ожидаем, что квадратичных расходимостей не будет как у ϕ_1, так и у ϕ_2, при этом только одна их линейная комбинация «поглощается» калибровочными бозонами.

Чтобы увидеть, как это происходит, параметризуем

$$\phi_1 = e^{i\frac{\pi_1}{f}} \begin{pmatrix} \vdots \\ f \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = e^{i\frac{\pi_2}{f}} \begin{pmatrix} \vdots \\ f \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где предположим выстроенность vev полей ϕ_1 и ϕ_2 — для простоты, при одинаковом масштабе нарушения симметрии $f_1 = f_2 = f$. Лагранжиан запишем в виде

$$L = |D_\mu \phi_1|^2 + |D_\mu \phi_2|^2. \tag{33}$$

Два члена взаимодействия создают два набора квадратично расходящихся диаграмм, подобных рассмотренным ранее (рис. 3).

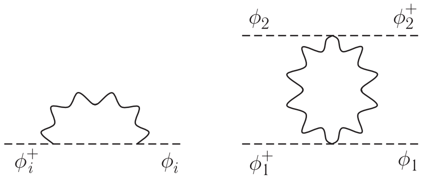


Рис. 3

Вклад этих диаграмм

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\Lambda^2(\phi_1^+\phi_1 + \phi_2^+\phi_2) = \frac{g^2}{16\pi^2}\Lambda^2(f^2 + f^2). \tag{34}$$

Видно, что для любого NGB потенциал отсутствует. Однако только одна линейная комбинация π_1 и π_2 «поглощена» массивными калибровочными $SU(3)$-бозонами.

Действительно, каждый набор диаграмм содержит только одно поле ϕ. Поэтому диаграммы те же, что и в теории с одним ϕ, где все NGB были «поглощены». Следовательно, ни ϕ_1, ни ϕ_2 не получают потенциала. Эти аргументы не применимы, если рассматривать диаграммы, содержащие как ϕ_1, так и ϕ_2. Для таких диаграмм вклад

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)|\phi_1^+\phi_2|^2, \tag{35}$$

он не зависит от h, но и не содержит квадратичной расходимости. Чтобы вычислить зависимость от хиггса, выберем удобную параметризацию

$$\phi_1 = \exp\left\{i\begin{pmatrix} & k \\ k^+ & \end{pmatrix}\right\}\exp\left\{i\begin{pmatrix} & h \\ h^+ & \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\vdots \\ f\end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$\phi_2 = \exp\left\{i\begin{pmatrix} & k \\ k^+ & \end{pmatrix}\right\}\exp\left\{-i\begin{pmatrix} & h \\ h^+ & \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\vdots \\ f\end{pmatrix}. \tag{37}$$

Поле k можно исключить $SU(3)$ калибровочным преобразованием, однако поле h не может быть исключено из ϕ_1 и ϕ_2 и остаться при этом физическим полем. Далее будем работать в унитарной калибровке $SU(3)$, в которой поле k можно исключить. Тогда имеем

$$\phi_1^+\phi_2 = \begin{pmatrix}0 & f\end{pmatrix}\exp\left\{-\frac{2i}{f}\begin{pmatrix} & h \\ h^+ & \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0 \\ f\end{pmatrix} =$$
$$= \left[f^2\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} - 2fi\begin{pmatrix} & h \\ h^+ & \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}h^+h & \\ & h^+h\end{pmatrix} + \ldots\right] = f^2 - 2h^+h + \ldots \tag{38}$$

Таким образом, соотношение (35) содержит квадрат массы поля h:

$$\frac{g^4}{16\pi^2}\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)f^2. \tag{39}$$

Этот квадрат массы $\sim M_{\text{weak}}^2$ для константы g, равной $SU(2)$ калибровочной константе и $f \sim$ ТэВ.

Итак, теория с двумя комплексными триплетами, нарушающими $SU(3) \to SU(2)$, автоматически содержит «хиггсовский» дублет NGB, которые не получают квадратичных расходимостей в их массах. Имеются логарифмически расходящиеся и конечные вклады, причем естественная величина «хиггсовской» массы $f/(4\pi) \sim M_{\text{weak}}$. Теория имеет три масштаба, разделенных петлевым фактором: $\Lambda \sim 4\pi f \sim (4\pi)^2 M_{\text{weak}}$.

3.3.2. Симметрийные аргументы, коллективное нарушение. Попытаемся понять отсутствие однопетлевой квадратичной расходимости в массе h, исходя из соображений симметрии. Урок, который мы извлечем, может быть полезным при изучении других связей и содержит рецепт построения теорий маленького хиггса.

Без калибровочных взаимодействий наша теория состоит из двух нелинейных сигма-полей, каждое из которых является следствием нарушения $SU(3)$ глобальной симметрии до $SU(2)$. Пространство этих полей $[SU(3)/SU(2)]^2$. В этом пространстве содержится 10 спонтанно нарушенных генераторов, следовательно — 10 NGB. Калибровочные константы при этом нарушают некоторые глобальные симметрии.

Например, константа связи двух калибровочных бозонов и двух скаляров

$$L \sim |gA_\mu \phi_1|^2 + |gA_\mu \phi_2|^2 \tag{40}$$

нарушает две первоначально независимых $SU(3)$-симметрии до диагональной $SU(3)$. Таким образом, только одна из спонтанно нарушенных симметрий точная, и остается только один набор NGB, другие оказываются «поглощенными». Другая линейная комбинация, соответствующая точно нарушенной аксиальной $SU(3)$, получает потенциал за счет петлевых вкладов. Однако, как уже было видно, квадратично расходящиеся вклады в потенциал отсутствуют. Это легко понять, рассматривая симметрии, остающиеся инвариантными для каждого члена (40) в отдельности. Предположим, что мы положили калибровочную связь поля ϕ_2 равной нулю. Тогда лагранжиан имеет две независимых симметрии: одна действует на ϕ_1 (и A_μ), а другая — на ϕ_2. Тогда мы имеем две спонтанно нарушенных $SU(3)$-симметрии, следовательно, десять NGB (по 5 из каждого набора «поглощены»). Аналогично, если калибровочная связь ϕ_1 равна нулю, снова имеем две спонтанно нарушенных $SU(3)$. Только в присутствии калибровочных связей обоих полей ϕ_1 и ϕ_2 будет две $SU(3)$-симметрии, нарушенных до одной $SU(3)$, и только тогда поле h может развить потенциал. Итак, любая диаграмма, вносящая вклад в массу h, должна включать калибровочные связи обоих полей ϕ_1 и ϕ_2. При этом нет квадратично расходящихся однопетлевых диаграмм, содержащих обе связи.

Таким образом, маленький хиггс — это псевдо-намбу — голдстоуновский бозон спонтанно нарушенной симметрии. Эта симметрия тоже точно нарушена, но только «коллективно», т. е. симметрия нарушена, когда две или более связей в лагранжиане не обращаются в ноль. Если положить одну из этих связей равной нулю, то симметрия восстанавливается, следовательно, восстанавливается и безмассовость «маленького» хиггса.

Теперь мы знаем, как построить теорию легкого скалярного дублета с $SU(2)$ калибровочными бозонами. Чтобы применить эту модель к расширению стандартной модели, нужно определить: а) юкавские связи; б) гиперзаряд и цвет; в) хиггсовский потенциал.

3.3.3. Юкавская связь t-кварка. Наиболее значительная квадратичная расходимость возникает в t-кварковых петлях. Поэтому сокращение квадратичной расходимости, обусловленной юкавскими связями t-кварка, представляется наиболее

важной задачей. Попробуем построить сектор, гарантирующий сокращение. Трюк состоит в том, чтобы ввести $SU(3)$-симметрии в юкавские связи так, чтобы они нарушались «коллективно». Сначала расширим кварковые дублеты до триплетов $\psi = (t, b, T)$, преобразующихся по $SU(3)$ калибровочной группе. Кварковые синглеты остаются теми же — t^C и b^C, но следует добавить дираковский партнер T^C для T. Заметим, что мы используем обозначения, в которых все кварковые поля — левые вейлевские спиноры, и SM юкавские связи имеют вид h^+Qt^C. Изменим несколько обозначения, чтобы отразить смешивание между t^C и T^C и назовем эти состояния t_1^C и t_2^C. Теперь можно записать два слагаемых, которые выглядят как юкавские связи:

$$L_{\text{юк.}} = \lambda_1 \phi_1^+ \psi t_1^{\mathrm{C}} + \lambda_2 \phi_2^+ \psi t_2^{\mathrm{C}}. \tag{41}$$

Чтобы увидеть хиггсовские связи, подставим сюда параметризацию (37) и разложим по степеням h. Для простоты положим $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda/\sqrt{2}$. Тогда

$$L \sim \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[fT(t_2^C + t_1^C) + ih^+Q(t_2^C - t_1^C) - \frac{1}{2f}h^+hT(t_2^C + t_1^C) + \ldots\right] =$$
$$= \lambda f\left(1 - \frac{1}{2f^2}h^+h\right)TT^C + \lambda h^+Qt^C + \ldots, \tag{42}$$

где содержатся линейные комбинации $T^C = (t_2^C + t_1^C)/\sqrt{2}$ и $t^C = i(t_2^C - t_1^C)/\sqrt{2}$.

Последний член в квадратных скобках (42) представляет собой юкавскую связь, поэтому можно идентифицировать $\lambda = \lambda_t$. Дираковский фермион T^C имеет массу $\lambda_t f$ и константу связи $\lambda_t/(2f)$ с двумя хиггсовскими полями. Связи и массы определяются $SU(3)$-симметриями. Чтобы увидеть, как новый фермион и его связи с хиггсом сокращают квадратичные расходимости t-кварковых петель, вычислим фермионные

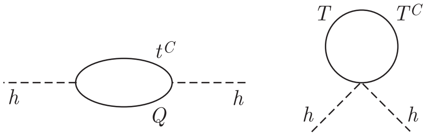


Рис. 4

петли, включающие взаимодействия до λ^2. Две диаграммы (рис. 4) дают следующий вклад:

$$\frac{\lambda_t^2}{16\pi^2}\Lambda^2 h^+h + \frac{\lambda_t^2 f^2}{16\pi^2}\left(1 - \frac{h^+h}{f^2}\right)\Lambda^2 + O(h^4) = \text{const} + O(h^4). \tag{43}$$

Таким образом, квадратично расходящиеся вклады в массу хиггса от t- и T-петель сокращаются! Однако отсутствие квадратично расходящихся масс хиггса более естественно понять, анализируя симметрии лагранжиана для полей ϕ_i в (41). Сначала отметим, что юкавская связь лагранжиана сохраняет $SU(3)$ калибровочную симметрию. Член, пропорциональный λ_1, «усиливает» преобразование симметрии ϕ_1, а член, пропорциональный λ_2, «усиливает» поле ϕ_2.

Поэтому в присутствии обоих членов происходит нарушение глобальной симметрии $SU(3)/SU(2)$ с пятью NGB, поглощенными тяжелыми $SU(3)$ калибровочными бозонами. Однако, если положить одну из λ_i равной нулю, симметрия соотношения (41) становится $[SU(3)]^2$, так как ϕ_i в этом случае можно вращать независимо. Одна линейная комбинация «поглощается», а другая образует «маленький» хиггс.

Чтобы понять радиационную стабильность этого результата, нужно заметить, что вклад в хиггсовский потенциал может возникать только от диаграмм, содержащих

обе λ_i.Фермионная диаграмма низшего порядка, содержащая обе λ_i, пропорциональна $|\lambda_1\lambda_2|^2$ (рис. 5).

Легко убедиться, что нельзя нарисовать диаграмму, которая вносила бы вклад в хиггсовский потенциал и была бы пропорциональной первой степени произведения $\lambda_1\lambda_2$. Это следует из аргументов, использующих «ложные» симметрии: можно приписать t_1^C заряд 1 при преобразованиях $U(1)_1$-симметрии, в то время как другие поля остаются нейтральными. Симметрия нарушена юкавской связью λ_1, но мы можем формально восстановить ее, приписав «ложный» λ_1 заряд (-1). Любые эффективные операторы, которые могли бы быть образованы петлями, должны быть инвариантны относительно этой симметрии. В частности, операторы, дающие вклад в хиггсовский потенциал, не содержащие фермионного поля t_1^C, могут зависеть от λ_1 посредством $|\lambda_1|^2$. По тем же аргументам зависимость от λ_2 имеет вид $|\lambda_2|^2$. Хиггсовский потенциал требует наличия обеих связей λ_1 и λ_2, поэтому потенциал пропорционален $|\lambda_1\lambda_2|^2$, т. е. содержит, по крайней мере, четыре константы связи. Но однопетлевая диаграмма с 4-мя константами связи может иметь лишь логарифмическую расходимость и не способна дестабилизировать хиггсовскую массу.

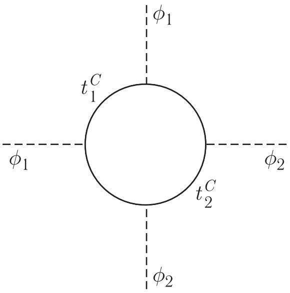


Рис. 5

В формулах, приведенных выше, мы положили для простоты $f_1 = f_2 = f$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_t/\sqrt{2}$. В общем случае

$$m_T = \sqrt{\lambda_1^2 f_1^2 + \lambda_2^2 f_2^2}, \tag{44}$$

$$\lambda_t = \lambda_1\lambda_2 \frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{m_T}. \tag{45}$$

Заметим, что юкавская связь обращается в ноль, если любая из λ_i равна нулю, как этого требуют аргументы $SU(3)$-симметрии. Масса тяжелого T-кварка может быть значительно ниже, чем наибольшее из f_i. Это весьма полезное свойство, позволяющее считать большими ($\geq$ несколько ТэВ, как требуют электрослабые ограничения) массы тяжелых калибровочных бозонов. При этом массу T-кварка можно удерживать вблизи ТэВ-а. Низкая масса T-кварка весьма желательна, поскольку квадратичная расходимость t-кварковой петли обрезается на массе T.

3.3.4. Другие юкавские связи. Другая, up-типа юкавская связь, вводится точно так же. Мы расширяем $SU(2)$ кварковые дублеты до триплетов. Затем добавляется два набора юкавских связей триплетов с ϕ_1 и ϕ_2 и кварковыми синглетами q_1^C и q_2^C.

В SM юкавские связи для down-типа кварков возникают за счет другого оператора при сворачивании с помощью тензора ε $SU(2)$-индексов хиггсовского дублета и кварковых дублетов. Прежде чем построить этот оператор из кварковых и ϕ_i полей, заметим, что даже юкавская связь b-кварка слишком мала, чтобы давать заметный вклад в массу хиггса. Для квадратично расходящейся однопетлевой диаграммы в SM имеем

$$\frac{\lambda_b^2}{16\pi^2}\Lambda^2 \simeq (30\ \text{ГэВ})^2 \tag{46}$$

для $\Lambda \sim 10$ ТэВ. Поэтому нет необходимости при построении down-типа юкавских связей обращать внимание на симметрии и «коллективное» нарушение. В SM юкавская связь

$$\lambda_b \varepsilon_{ij} h_i Q_j b^C. \tag{47}$$

Чтобы получить свертку с ε $SU(3)$-инвариантного оператора, запишем слагаемое в лагранжиане

$$\frac{\lambda_b}{f}\varepsilon_{ijk}\phi_1^k\phi_2^j\psi_Q^k b^C. \tag{48}$$

Заметим, что свертка с ε_{ijk} нарушает обе $SU(3)$-симметрии (действуя на два скалярных триплета ϕ_1 и ϕ_2) до диагональной подгруппы, поэтому этот оператор приводит к квадратичной расходимости. Но эта квадратичная расходимость из-за малости юкавской связи b-кварка достаточно безвредная.

3.4. Цвет и гиперзаряд

Цвет вводится путем добавления $SU(3)_{\text{color}}$-индексов, как это необходимо в SM. Группа $SU(3)_{\text{color}}$ коммутирует со всеми симметрийными аргументами, приведенными выше, поэтому ничего существенного не меняет.

С гиперзарядом ситуация несколько сложнее. Вакуумные средние vev полей $\phi_i \sim (0,0,1)$ нарушают $SU(3)_{\text{weak}}$ калибровочную группу до $SU(2)$, не оставляя ни одного $U(1)$-гиперзарядного кандидата. Поэтому нужно ввести дополнительную группу $U(1)_X$. Чтобы получить правильный гиперзаряд хиггса, припишем $SU(3)\times U(1)_X$ квантовые числа

$$\phi_i = 3_{-1/3}. \tag{49}$$

Комбинация генераторов, не нарушаемых $\phi_i \sim (0,0,1)$, имеет вид

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{3}}T^8 + X, \quad \text{где} \quad T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}, \tag{50}$$

причем X — генератор, соответствующий $U(1)_X$. Это соотношение однозначно фиксирует $U(1)_X$-заряды всех кварков и лептонов, если определены их $SU(3)$ трансформационные свойства.

Например, ковариантная производная, действующая на ϕ_i:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \frac{1}{3}ig_X A_\mu^X\phi + igA_\mu^{SU(3)}\phi. \tag{51}$$

Подчеркнем, что $U(1)_X$-генератор коммутирует с $SU(3)$, поэтому $U(1)_X$ калибровочные взаимодействия не изменяют каких-либо симметрийных аргументов, которые мы использовали для доказательства отсутствия квадратичных расходимостей в массе хиггса. Таким образом, имеется три нейтральных калибровочных бозона, соответствующих генераторам T^3, T^8 и X. Эти калибровочные бозоны смешиваются, и собственными массовыми состояниями являются фотон, Z и Z'. Как мы увидим ниже, Z' может модифицировать предсказания электрослабых наблюдений.

3.5. Четверная хиггсовская связь

Для получения четверной хиггсовской связи нам нужно записать потенциал $V(\phi_1\phi_2)$, который: а) не содержит масс порядка f для хиггса; б) содержит четверную связь; в) сохраняет «коллективное» нарушение симметрий групп $SU(3)$, т. е.

четверная связь генерируется, по крайней мере, двумя связями в V. При этом если любая из этих связей обращается в ноль, хиггс становится точным NGB. Это свойство гарантирует радиационную стабильность, т. е. отсутствие вкладов $\sim \Lambda^2$ в массу хиггса. Записать такой потенциал, удовлетворяющий всем этим требованиям, для $SU(3)$-модели оказывается невозможным. Чтобы увидеть это, заметим, что $\phi_1^+\phi_2$ — единственная нетривиальная калибровочно-инвариантная комбинация, которую можно образовать из ϕ_1 и ϕ_2 ($\phi_1^+\phi_1 = \text{const} = \phi_2^+\phi_2$, $\varepsilon^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k = 0$). Но $\phi_1^+\phi_2$-инвариант — не совсем хорошая отправная точка, поскольку этот инвариант нарушает две $SU(3)$-симметрии до диагональной подгруппы, поэтому неудивительно, что $\phi_1^+\phi_2$ всегда содержит массу, а также четверную связь. Например,

$$\phi_1^+\phi_2 \sim f^2 - h^+h + \frac{1}{f}(h^+h)^2 + \ldots, \tag{52}$$

поэтому

$$\frac{1}{f^{2n-4}}(\phi_1^+\phi_2)^n \sim f^4 - f^2(h^+h) + (h^+h)^2. \tag{53}$$

Из (53) можно получить либо достаточно малый массовый член, либо достаточно большую 4-ю связь. Конечно, можно было бы подобрать так коэффициенты, чтобы массовые члены сокращались, но эта «подгонка» оказывается радиационно-нестабильной. Существует два различных решения этой проблемы, требующих расширения модели и ее симметрийной структуры. Одно решение включает расширение калибровочной симметрии до $SU(4)$ и введения четырех ϕ полей, каждое из которых преобразуется как четырехплет относительно $SU(4)$.Четыре поля ϕ нарушают $SU(4) \to SU(2)$, при этом возникает четыре $SU(2)$-дублета. Два из них «поглощаются», а другие два становятся полями «маленького» хиггса с четверным потенциалом, подобным четверному потенциалу SUSY.

Другое решение оставляет $SU(3)$ калибровочную симметрию, но расширяет глобальную $SU(3)^2$-симметрию до $SU(3)^3$, которая затем включается в группу $SU(9)$. Расширенная симметрия приводит к двум дублетам «маленького» хиггса с четверными связями.

Оба решения нарушают простоту $SU(3)$-модели, но допускают большие четверные связи хиггсовских полей.

Существует и третье решение проблемы: добавляется потенциал с очень малым коэффициентом. Результирующая четверная связь тоже очень малая, но как и MSSM, радиационные поправки за счет t-кварковой петли повышают массу хиггса за экспериментальное ограничение в 114 ГэВ.

Ниже T-массы сокращение в t-секторе не происходит, и диаграмма (рис. 6) дает 4-й вклад

$$\frac{3\lambda_t^4}{16\pi^2}\log\left(\frac{m_T^2}{m_t^2}\right)(h^+h)^2, \tag{54}$$

этот вклад мал сам по себе, но достаточен для электрослабого нарушения симметрии (совместно с малым же древесным вкладом). Поскольку древесный член тоже вносит вклад в квадрат хиггсовской массы, требуется подгонка с точностью $\sim 10\%$.

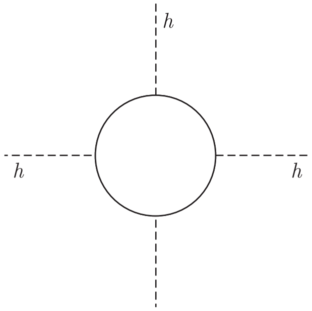


Рис. 6

3.6. Простейший маленький хиггс

Чтобы подчеркнуть простоту модели, перечислим полевое содержание «простейшего маленького хиггса», $SU(3)$-модели, в которой четверная хиггсовская связь генерируется за счет t-кварковой петли.

Модель имеет $SU(3)_{\text{color}} \times SU(3)_{\text{weak}} \times U(1)_X$ калибровочную группу с тремя поколениями, преобразующимися как

$$\begin{aligned} \psi_Q &= (3,3)_{1/3}, & \psi_L &= (1,3)_{-1/3}, \\ d^C &= (\overline{3},1)_{1/3}, & e^C &= (1,1)_1, \\ 2\times u^C &= (\overline{3},1)_{-2/3}, & n^C &= (1,1)_0. \end{aligned} \tag{55}$$

Триплеты ψ_Q и ψ_L содержат кварковые и лептонные дублеты SM, синглетами являются u^C, d^C, e^C, n^C. $SU(3)_{\text{weak}} \times U(1)_X$-симметрия нарушена вакуумными средними скалярных полей $\phi_1 = \phi_2 = (1,3)_{-1/3}$. Лагранжиан модели содержит обычные кинетические члены, юкавские связи и древесный хиггсовский потенциал

$$L_{\text{кин.}} \sim \psi_Q^+ \not{D} \psi_Q + \ldots + |D_\mu \phi_1|^2 + \ldots, \tag{56}$$

$$L_{\text{юк.}} \sim \lambda_1^u \phi_1^+ \psi_Q u_1^C + \lambda_2^u \phi_2^+ \psi_Q u_2^C + \frac{\lambda^d}{f}\phi_1\phi_2\psi_Q d^C + \lambda^n \phi_1^+ \psi_L n^C + \frac{\lambda^e}{f}\phi_1\phi_2\psi_L e^C, \tag{57}$$

$$L_{\text{пот.}} \sim \mu^2 \phi_1^+ \phi_2. \tag{58}$$

Подставляя в эти выражения параметризацию NGB

$$\phi_1 = e^{i\theta\frac{f_2}{f_1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = e^{-i\theta\frac{f_1}{f_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\eta}{\sqrt{2}f} + \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & h \\ & h^+ & 0 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где $f^2 = f_1^2 + f_2^2$, можно найти спектр тяжелых векторных бозонов $W^{+'}$, $W^{-'}$, Z', фермионов T, U, C и скаляра η.

3.7. Модели, основанные на произведении групп

3.7.1. Минимальный moose. В этом разделе будут описаны две теории маленького хиггса, чьи структуры оличаются от $SU(3)$-модели. Рассмотренные вместе, три модели иллюстрируют различные подходы к «экономичному» введению маленького хиггса.

Сначала рассмотрим модель «минимального moose». Пространство, на котором строится эта модель, напоминает пространство кирального лагранжиана, используемого для описания низкоэнергетической динамики КХД. В КХД приближенная $SU(3)_L \times SU(3)_R$ киральная симметрия, которая становится точной в пределе нулевых масс легких кварков, спонтанно нарушена до ее векторной подгруппы, поэтому пространство $(SU(3)_L \times SU(3)_R)/SU(3)_V$. Имеется октет псевдо-NGB, ассоциированный со спонтанным нарушением, и они понимаются как легкие мезоны (π^0, $\pi^\pm$, K^0, $\overline{K}^0$, $K^\pm$, η^0).

Пространство модели минимальный moose — $[(SU(3)_L \times SU(3)_R)/SU(3)_V]^4$, поэтому имеется четыре набора NGB-октетов, проявляющихся как четыре сигма-поля Σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Сигма-поля преобразуются при глобальных преобразованиях симметрии следующим образом

$$\Sigma_i \to L_i \Sigma_i R_i^+, \qquad (60)$$

где L_i и R_i — матрицы $SU(3)$. Сигма-поля можно параметризовать в терминах NGB π_i^a:

$$\Sigma_i = e^{2i\pi_i^a T_a/f}, \qquad (61)$$

где T_a генераторы $SU(3)$ нормированы $\mathrm{tr}(T_a T_b) = (1/2)\delta_{ab}$.

Идея состоит в том, чтобы идентифицировать некоторые из этих NGB как хиггсовские дублеты, ответственные за нарушение электрослабой симметрии. Как и в $SU(3)$-модели, этим полям нужно придать калибровочные взаимодействия, юкавские связи с фермионами и самовзаимодействия так, чтобы не возникало квадратичных расходимостей в одной петле.

3.7.2. Калибровочные взаимодействия. В модели минимального moose электрослабая группа возникает из калибровочной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-подгруппы первоначальной $SU(3)^8$ глобальной группы симметрии. Сигма-поля преобразуются относительно этой калибровочной группы тождественно: при $SU(3)$ калибровочном преобразовании U и $SU(2) \times U(1)$ преобразовании V имеем

$$\Sigma_i \to U \Sigma_i V^+. \qquad (62)$$

Здесь калибровочные преобразования $SU(2) \times U(1)$ включены в 3×3 матрицу V таким образом, что $SU(2)$-преобразование находится в левом верхнем 2×2 пространстве V, в то время как калибровочный $U(1)$-генератор пропорционален $\mathrm{diag}(1, 1, -2)$. Можно при этом выбрать фермионы SM заряженными относительно $SU(2) \times U(1)$ и с обычными квантовыми числами. Тогда для связи сигма-полей и фермионов, описанной ниже, первым двум столбцам Σ следует приписать заряд $(-1/6)$, а остальным — заряд $(1/3)$. Калибровочную структуру модели можно наглядно представить в виде диаграммы (рис. 7) в которой две вершины соответствуют калибровочным группам $SU(3)$ и $SU(2) \times U(1)$, и связи — сигма-поля, преобразующиеся относительно калибровочных групп в обеих вершинах. Фермионы SM находятся в $SU(2) \times U(1)$-вершине. Простейшая модификация этой модели — поместить $SU(2) \times U(1)$ калибровочные группы в обе вершины, будет обсуждаться в разд. 3.8.1.

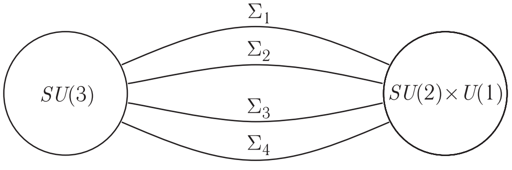


Рис. 7

Сигма-поля спонтанно нарушают $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калибровочную симметрию до $SU(2)_W \times U(1)_Y$, где, как следует из обозначений, ненарушенная группа идентифицируется с калибровочной симметрией электрослабой теории. Подобно $SU(3)$-модели, можно собрать NGB каждого сигма-поля в матрицу и провести ее разложение так, чтобы проявилась $SU(2)_W \times U(1)_Y$ структура:

$$\pi_i = \pi_i^a T^a = \begin{pmatrix} \phi_i + 2\eta_i/\sqrt{3} & h_i/\sqrt{2} \\ h_i^+/\sqrt{2} & -\eta_i/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad (63)$$

где вещественный скаляр η_i — синглет относительно $SU(2)_W \times U(1)_Y$; вещественные скаляры $\phi_i = \phi_i^a \sigma^a/2$ преобразуются как 3_0; комплексный дублет h_i преобразуется, как хиггс SM, $2_{1/2}$.

Разлагая ковариантные производные в кинетических членах нелинейной сигма-модели,

$$L_{\text{кин.}} = \frac{f^2}{4} \sum_{i=1}^{4} \operatorname{tr}\left[(D_\mu \Sigma_i)^+ (D^\mu \Sigma_i)\right], \tag{64}$$

можно вычислить массы октета калибровочных бозонов, приобретающих массу при спонтанном нарушении калибровочной симметрии. Эти массы равны $\sqrt{g_3^2 + g_2^2} f$ для электрослабого триплета, $g_3 f$ — для пары дублетов и $\sqrt{g_3^2 + g_1^2/3} f$ для синглета. Здесь g_1, g_2 и g_3 — $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ калибровочные константы, определяющиеся калибровочными константами электрослабой теории:

$$g' = \frac{g_1 g_3}{\sqrt{g_3^2 + g_1^2/3}}, \tag{65}$$

$$g = \frac{g_2 g_3}{\sqrt{g_2^2 + g_3^2}}. \tag{66}$$

Предполагая, что $f \sim$ ТэВ, получаем ожидаемые массы этих тяжелых калибровочных бозонов в районе ТэВ-а.

Калибровочные связи нарушают $SU(3)^8$ глобальную симметрию, с которой мы начинали, поэтому поля π_i^a являются точными NGB только в пределе зануляющихся калибровочных связей. Единственная глобальная симметрия, остающаяся точной, — $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Октет NGB, ассоциированный со спонтанным нарушением этой симметрии до $SU(2)_W \times U(1)_Y$, оказывается «поглощенным»: его члены становятся продольными компонентами тяжелых калибровочных бозонов. «Поглощенные» поля появляются в линейной комбинации полей π_i, которая испытывает сдвиг при $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-преобразованиях, связанных с нарушенными генераторами. Так как эти преобразования действуют тождественно на различные сигма-поля, очевидно, что $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$ и есть «поглощенная» комбинация (именно она, а не ортогональная комбинация испытывает сдвиг).

«Непоглощенные» NGB приобретают потенциалы за счет петель, но ни один из них не получает квадратичных расходимостей в одной петле. В пределе $g_3 \to 0$ восстанавливается точная глобальная $SU(3)^4 \times SU(2) \times U(1)$-симметрия. Если «выключить» g_2 и g_1, то восстанавливается $SU(3)^5$ глобальная симметрия. Она спонтанно нарушается до $SU(3)$, поэтому снова все NGB безмассовые. Только если g_3 и, по крайне мере, одна из g_1, g_2 отлична от нуля, эти поля приобретают массу. Итак, однопетлевой вклад в их массы должен содержать g_3 и g_2 или g_3 и g_1. Вклады такого типа имеют логарифмические расходимости.

Отсутствие однопетлевых квадратичных расходимостей существенно зависит от расширенной калибровочной симметрии.

Если только диагональная $SU(2) \times U(1)$ является калибровочной, то нет глобальных симметрий, запрещающих массы скаляров, поэтому в одной петле они получают квадратично расходящиеся вклады. Это и не удивительно, ведь нет дополнительных частиц, которые могли бы компенсировать расходимости петель, содержащих калибровочные бозоны.

Коль скоро $SU(3)$ является калибровочной группой, тяжелые калибровочные бозоны, ассоциированные со спонтанным нарушением симметрии до $SU(2)_W \times U(1)_Y$, появляются в однопетлевых диаграммах и сокращают вклады безмассовых калибровочных бозонов.

3.7.3. Четверная связь. Четверная связь хиггсовских дублетов получается путем добавления следующих членов в лагранжиан

$$L_\Sigma = \left(\frac{f}{2}\right)^4 \mathrm{tr}(c_1 \Sigma_1 \Sigma_2^+ \Sigma_3 \Sigma_4^+) + \left(\frac{f}{2}\right)^4 \mathrm{tr}(c_2 \Sigma_1 \Sigma_4^+ \Sigma_3 \Sigma_2^+) + \text{э.с.}, \tag{67}$$

где можно считать c_1, c_2 вещественными числами порядка единицы.

Посмотрим, к чему приводит такой выбор лагранжиана, забыв на некоторое время о калибровочных связях. Если включить только c_1, а не c_2, то первоначальная глобальная $SU(3)^8$-симметрия нарушается до $SU(3)^4$: только преобразования, удовлетворяющие условиям $R_1 = R_2$, $R_3 = R_4$, $L_1 = L_4$ и $L_2 = L_3$ оставляют L_Σ инвариантным. Эта $SU(3)^4$ глобальная симметрия спонтанно нарушается сигма-полями до $SU(3)$. При этом возникает три октета безмассовых NGB, один из которых «поглощается». Так как мы начинали с четырех октетов, то ожидаем, что c_1 придает потенциал одному из них.

Полезно определить линейные комбинации

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - \pi_3), \tag{68}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_2 - \pi_4), \tag{69}$$

$$z = \frac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 - \pi_4) \tag{70}$$

и положить четверную линейную комбинацию («поглощенную») равной нулю.

Поле z — линейная комбинация, которая не испытывает сдвига при $SU(3)^4$-преобразовании, сохраняющем c_1. Например, при инфинитезимальных преобразованиях симметрии $R_1 = R_2 = 1 - 2\sqrt{2}i2/f$ и $L_1 = L_4 = 1 + 2\sqrt{2}i\beta/f$ изменения полей

$$\begin{aligned} \delta x &= \alpha + \beta + \ldots, \\ \delta y &= \alpha - \beta + \ldots, \\ \delta z &= \frac{i}{2f}\big([\alpha+\beta, y] - [\alpha-\beta, x]\big), \end{aligned} \tag{71}$$

где пренебрежено членами порядка x^2, y^2 и z^2. Как x, так и y сдвигаются, и это означает, что ими не может генерироваться потенциал. С другой стороны, z в нулевом порядке по полям не преобразуется, следовательно, может приобретать потенциал. Разлагая L_Σ для $c_2 = 0$, находим

$$L_\Sigma = -c_1 f^2 \,\mathrm{tr}\Big(z - \frac{i}{2f}[x, y]\Big)^2 + \ldots, \tag{72}$$

где учтены члены порядка z, x^4 и y^4. Как и ожидалось, только z-октет приобретает квадрат массы $\sim c_1 f^2$, x и y остаются безмассовыми. Действительно, после интегрирования по z-октету потенциал для x и y обращается в ноль. Причина в точном сокращении между $\mathrm{tr}[x, y]^2$ членом в (72) и идентичным членом, генерируемым $\mathrm{tr}(z[x, y])$-связью посредством обмена тяжелым z-октетом.

Когда учитываются и c_1, и c_2 лагранжиан (72) принимает вид

$$L_\Sigma = -c_1 f^2 \operatorname{tr}\Big(z - \frac{i}{2f}[x,y]\Big)^2 - c_2 f^2 \operatorname{tr}\Big(z + \frac{i}{2f}[x,y]\Big)^2, \tag{73}$$

Существенный знак минус во втором члене возникает из-за того, что два слагаемых в L_Σ связаны преобразованием $\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_4$, или $\pi_2 \leftrightarrow \pi_4$, или $y \leftrightarrow -y$.

При этом x и z остаются инвариантными. Из-за знака минуса в (73) уже нельзя сказать, что после интегрирования по z потенциал для x и y обращается в ноль. И это имеет смысл: если учитывается как c_1, так и c_2, то сохраняется только глобальная $SU(3)^2$-симметрия. Тогда L и R преобразования одинаковы, и «поглощенными» оказываются только безмассовые NGB, связанные со спонтанным нарушением $SU(3)^2$ до $SU(3)$. Таким образом, если учитываются c_1 и c_2, ни x, ни y не являются точными NGB. Поэтому они имеют потенциал на древесном уровне. В частности, после интегрирования по z находим четверной член

$$L_4 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \operatorname{tr}[x,y]^2. \tag{74}$$

Очевидно, что L_4 обращается в ноль, если хотя бы одно из c_1 или c_2 обращается в ноль. Древесный потенциал для x и y не включает массовых членов, поскольку ни c_1, ни c_2 сами по себе не могут обеспечить массы x и y, и нет недревесных диаграмм, способных генерировать массы. Подчеркнем, что механизм генерации древесного четверного слагаемого в лагранжиане для NGB, сохраняющий их массы, не работает с числом полей, меньшим, чем число сигма-полей. Например, если попытаться использовать только три поля и записать

$$L_\Sigma = \Big(\frac{f}{2}\Big)^4 \operatorname{tr}(c_1 \Sigma_1 \Sigma_2^+ \Sigma_1 \Sigma_3^+) + \Big(\frac{f}{2}\Big)^4 \operatorname{tr}(c_2 \Sigma_1 \Sigma_3^+ \Sigma_1 \Sigma_2^+) + \text{э.с.} \tag{75}$$

для генерации четверной связи, то найдем, что c_1 сама по себе нарушает симметрию до $SU(3)^2$. Когда она спонтанно нарушается до $SU(3)$, возникает только один октет безмассовых NGB, который «поглощается» калибровочными бозонами.

3.7.4. Юкавская связь t-кварка в модели moose. Потребуем, чтобы юкавская связь t-кварка не допускала квадратично расходящихся вкладов в квадраты масс хиггсовских дублетов. При этом нужно убедиться, что каждая связь сохраняет «достаточно» глобальной симметрии для обеспечения устойчивости масс. Фермионы SM не имеют зарядов относительно $SU(3)$, поэтому установление связей сигма-полей с фермионами требует определенной работы с $SU(3)$ синглетными комбинациями, например, с $\Sigma_1^T \Sigma_2^*$.

Рассмотрим слагаемые лагранжиана

$$L_t = \lambda f \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_3^{C'} \end{pmatrix} \Sigma_1^T \Sigma_2^* \chi + \lambda' f U^C U + \text{э.с.} \tag{76}$$

Здесь третье поколение электрослабого дублета и синглета кварков $q_3 = (u_3, d_3)$ и $u_3^{C'}$ объединены дополнительным векторным электрослабым кварковым синглетом (U, U^C) и некоторые фермионы сгруппированы в триплет $\chi = (d_3, -u_3, U)$. Как мы увидим, слагаемые (76) обеспечивают юкавскую связь t-кварка. Более того, при этом не возникает квадратично расходящихся вкладов в одной петле в квадратах масс x и y. Действительно, в отсутствие λ' L_t обладает $SU(3)$ глобальной симметрией, относительно которой χ преобразуется как триплет, и эта симметрия препятствует возникновению масс x и y. Поэтому для генерации масс x и y нужны обе связи, а симметрии L_t гарантируют появление в операторах, содержащих Σ, связей типа $|\lambda^2|$ и $|\lambda'^2|$.

Таким образом, однопетлевые диаграммы, которые вносят вклад в массы x и y, включают четыре константы связи, и поэтому могут расходиться лишь логарифмически. Отсутствие квадратичных расходимостей можно проверить с помощью потенциала Коулмена–Вайнберга. В одной петле эффективный потенциал для x и y, генерируемый фермионами, вычисляется с использованием фоновых значений сигма-полей и нахождением фермионной массовой матрицы в этом фоне. Квадратично расходящийся кусок эффективного потенциала пропорционален $\mathrm{tr}\, M(\Sigma)^+ M(\Sigma)$. В нашем случае имеем

$$L_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_3^{C'} U^C \end{pmatrix} M(\Sigma)\chi + \text{э.с.}, \tag{77}$$

где массовая матрица

$$M(\Sigma) = P \begin{pmatrix} \lambda f & \Sigma_1^T & \Sigma_2^* \\ 0 & 0 & \lambda' f \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Здесь $P = \mathrm{diag}(0,0,1,1)$. Унитарность Σ и свойство цикличности дают

$$\mathrm{tr}\, M(\Sigma)^+ M(\Sigma) = f^2 \big(|\lambda|^2 + |\lambda'|^2\big). \tag{79}$$

В этом выражении нет зависимости от x илиy, т. е. нет и квадратично расходящихся вкладов в их массы

Для расширения этой техники на связи легких скаляров с фермионами, разложим x и y в терминах (63) $h_{x,y}$, $\eta_{x,y}$ и $\phi_{x,y}$ и обнаружим, что L_t включает члены

$$\lambda' f U^C U + \lambda f u_3^{C'} U + i\lambda u_3^C q_3 (h_x - h_y) + \text{э.с.} \tag{80}$$

Одна линейная комбинация $u_3^{C'}$ и U^C обеспечивает дираковскому фермиону массу $f\sqrt{|\lambda|^2 + |\lambda'|^2}$, а вторая ортогональная комбинация, в отсутствии электрослабого нарушения симметрии, остается безмассовой. Интегрируя по состоянию тяжелого фермиона, получаем юкавскую связь

$$\frac{\lambda_t u_3^C q_3 (h_x - h_y)}{\sqrt{2}}, \tag{81}$$

где коэффициент

$$\lambda_t = \frac{\sqrt{2}\lambda\lambda'}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\lambda'|^2}}. \tag{82}$$

Неподавленная юкавская связь t-кварка не сопровождается квадратично расходящимся вкладом в массу хиггса. Юкавские связи оставшихся фермионов SM достаточно малы, и их квадратично расходящиеся вклады при параметрах обрезания $\Lambda \sim 10$ ТэВ оказываются неважными. Это означает, что для придания масс этим фермионам можно записать связи, подобные первому члену в (76), исключив при этом векторно-подобные фермионные аналоги (U, U^C).

Заметим, что L_t нарушает первоначальную $SU(3)^8$ глобальную симметрию до $SU(3)^5 \times [SU(2) \times U(1)]^2$, которая спонтанно нарушается до $SU(3)^2 \times SU(2) \times U(1)$. При этом образуется три полных октета безмассовых NGB и набор (η, ϕ). Один полный октет «поглощается», а другие на древесном уровне становятся массивными. Октет и набор (η, ϕ) легких полей не приобретают при этом потенциала.

3.7.5. Электрослабое нарушение симметрии. Все легкие скаляры в x и y получают положительные вклады в их квадраты масс за счет однопетлевых поправок, вызванных лагранжианом L_Σ и калибровочными взаимодействиями. Как только что

обсуждалось, триплеты и синглеты не получают вкладов в их потенциалы за счет L_t, но линейная комбинация $h_x - h_y$ этот вклад получает из-за связи с фермионами, причем этот вклад отрицательный. Вполне возможно, что этот вклад достаточно велик для усиления вакуумного среднего $h_x - h_y$, и он способен вызвать электрослабое нарушение симметрии. Для исследования важного вопроса о стабильности электрослабого нарушения симметрии, разложим четверную связь (74) в терминах хиггсовских дублетов.

Получаем

$$L_4 = \frac{c_1 c_2}{4(c_1 + c_2)}\big((h_x^+ h_y - h_y^+ h_x)^2 + \mathrm{tr}(h_y h_x^+ - h_x h_y^+)^2\big), \tag{83}$$

где мы положили $\eta_{x,y}$ и $\phi_{x,y}$ равными нулю. Определяя новые дублеты $h_1 = (h_y - ih_x)/\sqrt{2}$ и $h_2 = (h_x - ih_y)/\sqrt{2}$, перепишем

$$L_4 = -\frac{c_1 c_2}{4(c_1 + c_2)}\big((h_1^+ h_1 - h_2^+ h_2)^2 + \mathrm{tr}(h_1 h_1^+ - h_2 h_2^+)^2\big). \tag{84}$$

Этот лагранжиан, если ограничиться нейтральными компонентами, имеет ту же форму, что и четверной потенциал в суперсимметричной стандартной модели. Этот потенциал имеет плоское направление вдоль $h_1 = h_2$ и стабилизируется квадратичными членами в потенциале. Эти члены имеют вид $m_1^2(|h_x|^2 + |h_y|^2) + m_2^2|h_x - h_y|^2$, где $m_2^2 < 0$ за счет t-кварковой петли. Записанные в терминах h_1 и h_2, квадратичные члены имеют вид

$$(m_1^2 + m_2^2)\big(|h_1|^2 + |h_2|^2\big) + m_2^2(h_1^+ h_2 + h_2^+ h_1). \tag{85}$$

Для электрослабого нарушения необходимо, чтобы в начале координат была нестабильность. Для этого нужно

$$(m_1^2 + m_2^2)^2 - (m_2^2)^2 < 0. \tag{86}$$

Поскольку $m_2^2 < 0$, это условие легко удовлетворяется. Но если оно удовлетворяется, то квадратичные члены в потенциале не стабилизируют $h_1 = h_2$ плоское направление, и потенциал оказывается неограниченным снизу. Это означает, что связь сигма-поля (67) нужно модифицировать. Модификация заключается в придании нетривиальной матричной структуры связям c_1 и c_2: $c_1 \to c_1 I + \varepsilon_1 T_8$ и $c_2 \to c_2 I + \varepsilon_2 T_8$. Связь ε_1 нарушает глобальную симметрию слагаемого с коэффициентом c_1 с $SU(3)^4$ до $SU(2) \times U(1) \times SU(3)^3$. Если глобальная симметрия спонтанно нарушена до $SU(2) \times U(1)$, ε_1-член сам по себе гарантирует три безмассовых октета NGB. Точные вычисления дают слагаемое в лагранжиане вида

$$\frac{\sqrt{3}}{8} f^2 F(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) i(h_y^+ h_x - h_x^+ h_y), \tag{87}$$

пропорциональное $|h_1|^2 - |h_2|^2$. При этом квадраты масс h_1 и h_2 расщепляются и обеспечивается стабильность нарушения электрослабой симметрии. Чтобы вклад (87) имел необходимую величину, нужно считать $F(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \simeq 10^{-2}$.

Таким образом, рассматриваемая модель имеет два хиггсовских дублета в скалярном секторе, а также комплексный триплет и синглет с массами вблизи электрослабого масштаба. На ТэВ-м масштабе имеется дополнительный октет скаляров, октет тяжелых калибровочных бозонов и электрослабый синглетный вектороподобный кварк. Этого набора частиц вполне достаточно для обрезания однопетлевых квадратичных расходимостей хиггсовского дублета.

3.8. Самый маленький хиггс

Эта модель строится на $SU(5)/SO(5)$-симметрии. Глобальная $SU(5)$-симметрия нарушается вакуумным средним скаляра Σ, преобразующегося как двухиндексный симметричный тензор или 15-плет $SU(5)$.

Выберем вакуумное среднее в виде

$$\langle\Sigma\rangle = \begin{pmatrix} & & ee \\ & 1 & \\ ee & & \end{pmatrix}, \tag{88}$$

где ee — 2×2 единичная матрица.

При $SU(5)$-преобразовании $U = e^{i\theta_a T_a}$ имеем $\Sigma \to U\Sigma U^T$, это означает, что десять ненарушенных генераторов удовлетворяют условию

$$\overline{T}_a\langle\Sigma\rangle + \langle\Sigma\rangle\overline{T}_a^T = 0. \tag{89}$$

Эти десять генераторов являются генераторами $SO(5)$. Оставшиеся 14 нарушенных генераторов удовлетворяют соотношению

$$\widehat{T}_a\langle\Sigma\rangle - \langle\Sigma\rangle\widehat{T}_a^T = 0. \tag{90}$$

При построении нелинейной сигма-модели следует оставить только флуктуации Σ (возле вакуумных средних) в этих нарушенных направлениях:

$$\Sigma = e^{i\pi_a\widehat{T}_a/f}\langle\Sigma\rangle e^{i\pi_a\widehat{T}_a^T/f}\langle\Sigma\rangle = e^{2i\pi_a\widehat{T}_a/f}\langle\Sigma\rangle, \tag{91}$$

где последнее равенство следует из (90).

Нетрудно показать, в духе соотношения (90), что матрицу NGB можно записать в виде

$$\pi = \pi_a\widehat{T}_a = \begin{pmatrix} \chi + \eta/(2\sqrt{5}) & h^*/\sqrt{2} & \phi^+ \\ h^T/\sqrt{2} & -2\eta/\sqrt{5} & h^+/\sqrt{2} \\ \phi & h/\sqrt{2} & \chi^T + \eta/(2\sqrt{5}) \end{pmatrix}, \tag{92}$$

где $\chi = \chi^a\sigma^a/2$ — эрмитова матрица 2×2 с нулевым следом; η — вещественный синглет, h — комплексный дублет и ϕ — 2×2 симметричная матрица. Различные коэффициенты выбраны так, чтобы кинетический член нелинейной сигма-модели

$$L_{\text{кин.}} = \frac{f^2}{8}\,\mathrm{tr}\big[(D_\mu\Sigma)^+(D^\mu\Sigma)\big] \tag{93}$$

воспроизводил канонически нормированные кинетические слагаемые для NGB.

3.8.1. Калибровочные взаимодействия самого маленького хиггса. Как и в предыдущих моделях, нам нужно создать калибровочную подгруппу глобальной симметрии. Сделать это нужно так, чтобы каждая калибровочная связь сама по себе сохраняла достаточно глобальной симметрии для рассмотрения хиггсовского дублета в качестве NGB.

Выберем в качестве калибровочной группы $[SU(2)\times U(1)]^2$, причем она включена в $SU(5)$, и калибровочные генераторы для двух $SU(2)$ имеют вид

$$Q_1^a = \begin{pmatrix} -\sigma^{a*}/2 & \\ & \end{pmatrix}, \quad Q_2^a = \begin{pmatrix} & \\ & \sigma^a/2 \end{pmatrix}. \tag{94}$$

Первая $SU(2)$ действует на первые два индекса, а вторая — на два оставшихся. Калибровочные генераторы для двух $U(1)$ имеют вид $Y_1 = \mathrm{diag}(-3, -3, 2, 2, 2)/10$ и $Y_2 = \mathrm{diag}(-2, -2, -2, 3, 3)/10$. Поскольку след от произведения этих генераторов не обращается в ноль, на петлевом уровне возникает смешивание двух $U(1)$ калибровочных бозонов. Диагонализация калибровочных кинетических членов модифицирует связь W и Z с фермионами. Заметим, что физические эффекты смешивания исчезают в пределе ненарушенной калибровочной симметрии стандартной модели.

Линейная комбинация $Q_1^a + Q_2^a$ удовлетворяет соотношению (89) и генерирует ненарушенную симметрию, которую следует идентифицировать с $SU(2)_W$ SM. Аналогично линейная комбинация $Y_1 + Y_2$ также удовлетворяет (89), и ненарушенную симметрию отождествляем с $U(1)_Y$. Ортогональные комбинации нарушены, и путем разложения $L_{\text{кин.}}$ можно проверить, что тяжелые $SU(2)$ и $U(1)$ калибровочные бозоны имеют массы $M_W' = f\sqrt{g_1^2 + g_2^2}/2$ и $M_B' = f\sqrt{(g_1'^2 + g_2'^2)/20}$. Здесь g_1 и g_2 — калибровочные константы двух $SU(2)$, а g_1' и g_2' — калибровочные константы двух $U(1)$. Тогда калибровочные константы SM:

$$g = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \tag{95}$$

$$g' = \frac{g_1' g_2'}{\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}}, \tag{96}$$

где $U(1)$-заряд нормирован так, чтобы $Y = 1/2$ для дублета h (т. е. $Y = Y_1 + Y_2$). Заметим, что масса B' несколько подавлена. Как будет обсуждаться ниже, частица B' будет модифицировать соотношение M_W/M_Z, а также связи Z с фермионами. Относительная малость m_B'/f приводит к важным ограничениям на эту модель.

Когда $[SU(2) \times U(1)]^2$ нарушена до ее диагональной подгруппы, поля η и χ матрицы π из (92) «поглощаются», оставляя только h и ϕ, преобразующиеся относительно группы $SU(2)_W \times U(1)_Y$ как $2_{1/2}$ и 3_1. Что можно сказать по поводу потенциала этих полей, генерируемого калибровочными петлями? Представим себе, что все калибровочные связи, кроме g_2, занулились. Тогда первоначальная $SU(5)$ глобальная симметрия будет нарушена до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, причем $SU(3)$ действует на первые три индекса, а $SU(2)$ — на оставшиеся два.

При этом происходит спонтанное нарушение до электрослабой группы с возникновением восьми NGB: они включают четыре «поглощенных» и четыре NGB, формирующих хиггсовский дублет h. Шесть вещественных скаляров в ϕ не запрещены глобальной симметрией и формируют потенциал. Те же симметрийные аргументы применимы, когда имеется только g_2'. Наконец, при учете g_1 и g_1', другая $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-симметрия сохраняется (в этот раз $SU(3)$ действует на последние три индекса), и этой симметрии достаточно для безмассовости хиггсов. Даже при учете всех связей, квадрат массы хиггса в однопетлевых расчетах не получает квадратичной расходимости.

С другой стороны, поле ϕ в одной петле имеет квадратичную расходимость, а после интегрирования по ϕ генерируется древесный четверной потенциал для поля h. Это весьма напоминает модель, рассмотренную в предыдущем разделе. В отличие от L_Σ, никаких дополнительных членов для Σ не требуется: калибровочные взаимодействия сами по себе генерируют четверную связь хиггса. Это очевидно из изучения квадратично расходящейся части потенциала Коулмена–Вайнберга $V = \Lambda^2 \,\mathrm{tr}\, M^2(\Sigma)/(16\pi^2) \sim f^2 \,\mathrm{tr}\, M^2(\Sigma)$, где $\mathrm{tr}\, M^2(\Sigma)$ — след матрицы квадратов масс калибровочных бозонов в присутствии фонового значения для Σ. Эта часть

вычисляется из $L_{\text{кин.}}$:

$$\operatorname{tr} M^2(\Sigma) = \frac{f^2}{2} \sum_{i=1,2} \Big(g_i'^2 \operatorname{tr}\big[(\Sigma^+ Y_i)^*(\Sigma Y_i)\big] + g_i^2 \sum_a \operatorname{tr}\big[(Q_i^a \Sigma)^*(Q_i^a \Sigma)\big] \Big), \tag{97}$$

где члены, не зависящие от Σ, опущены.

Разложение этого выражения дает

$$\operatorname{tr} M^2(\Sigma) = (g_1^2 + g_1'^2)\operatorname{tr}(K_-{}^+K_-) + (g_2^2 + g_2'^2)\operatorname{tr}(K_+^+ K_+) + \ldots, \tag{98}$$

причем $K_\pm = \phi \pm i/(2f)hh^T$.

Как уже упоминалось, ϕ получает квадратично расходящуюся массу, а поле h — нет. Действительно, потенциал для h обращается в ноль, если при интегрировании ϕ учитывается либо первый, либо второй член в (98). Если же присутствуют оба члена, интегрирование по ϕ дает четверное слагаемое в лагранжиан

$$L_4 = -c\frac{(g_1^2 + g_1'^2)(g_2^2 + g_2'^2)}{g_1^2 + g_1'^2 + g_2^2 + g_2'^2}|hh^+|^2, \tag{99}$$

где коэффициент $c \simeq 1$.

3.8.2. Юкавская связь t-кварка. В рассмотренной модели возможны несколько подходов к юкавской связи t-кварка, сохраняющих массу хиггса. Рассмотрим модель, основанную на минимальном числе дополнительных фермионов. Для избежания квадратичных расходимостей квадрата массы хиггса потребуем, чтобы связь t-кварка с Σ относилась к одной из глобальных симметрий, при которой поле h испытывает сдвиг. Предположим, что третье поколение кваркового дублета $q_3 = (u_3, d_3)$ преобразуется по $SU(2)_1$. Чтобы получить $SU(3)$-симметричную связь, добавим (электрослабый синглет) векторно-подобный фермион (U, U^C), сформируем триплет $\chi = (d_3, -u_3, U)$ и свяжем этот триплет с Σ и электрослабым синглетом $u_3^{C'}$ $SU(3)$-симметричным образом. Для этого рассмотрим слагаемые лагранжиана

$$L_t = \lambda f \varepsilon_{ijk}\chi_i \Sigma_{j4}\Sigma_{k5} u_3^{C'} + \lambda' f U U^C + \text{э.с.} \tag{100}$$

Индексы i, j, k пробегают значения 1, 2, 3, поэтому первый член в (100) представляет собой $SU(3)$-инвариантную антисимметричную свертку трех триплетов. Как и следует ожидать, первый член в (100) инвариантен относительно калибровочной группы $SU(2)$. Для каждого i и j комбинация $\Sigma_{i4}\Sigma_{j5} - \Sigma_{i5}\Sigma_{j4}$ появляется после суммирования, и это есть $SU(2)_2$-инвариантная антисимметричная свертка двух дублетов. $U(1)_1 \times U(1)_2$-заряды выбираются так, чтобы слагаемые (100) были нейтральными. Например, если в качестве заряда q_3 выбрать $(1/6, 0)$, тогда для $u_3^{C'}(-7/15, -1/5)$ и $U(2/3, 0)$. Аномалии, связанные с нарушенными генераторами расширенной калибровочной группы, по предположению, сокращаются тяжелыми фермионами.

В присутствии только λ, линейная комбинация u_3 и U остается безмассовой даже после электрослабого нарушения симметрии, но второе слагаемое в (100) делает эту моду тяжелой. При разложении L_t находим

$$L_t = i\sqrt{2}\lambda q_3 h u_3^{C'} + fU\big(\lambda u_3^{C'} + \lambda' U^C\big) + \text{э.с.}, \tag{101}$$

где следует оставить только линейные по h слагаемые. Изучение второго слагаемого в (101) показывает, что линейная комбинация $u_3^{C'}$ и U^C становится дираковской частицей с массой $f\sqrt{|\lambda|^2 + |\lambda'|^2}$. Поскольку по состояниям этой частицы производится интегрирование, в юкавской связи появляется ортогональная линейная

комбинация u_3^C

$$L_t = \frac{\sqrt{2}\lambda\lambda'}{\sqrt{|\lambda|^2 + |\lambda'|^2}} q_3 h u_3^C + \text{э.с.} \tag{102}$$

Раньше уже говорилось, что юкавские связи оставшихся фермионов SM достаточно малы и не стоит беспокоиться о связанных с ними квадратичных расходимостях. Снова можно убедиться в отсутствии расходимостей в квадрате масс хиггса за счет связей в L_t. Для этого опять достаточно найти квадратично расходящуюся часть потенциала Коулмена–Вайнберга.

Определив $\phi_i = \varepsilon_{ijk}\Sigma_{j4}\Sigma_{k5}$, фермионная массовая матрица в фоновом поле Σ имеет вид

$$M(\Sigma) = f \begin{pmatrix} \lambda\phi_1 & 0 \\ \lambda\phi_2 & 0 \\ \lambda\phi_3 & \lambda' \end{pmatrix}. \tag{103}$$

Квадратично расходящаяся часть потенциала Коулмена–Вайнберга пропорциональна

$$\operatorname{tr} M(\Sigma)^+ M(\Sigma) = f^2\Big(|\lambda|^2 \sum_i |\phi_i|^2 + |\lambda'|^2\Big) = -|\lambda|^2 \operatorname{tr}(K_-{}^+ K_-), \tag{104}$$

где в последнем равенстве сохранены члены до ϕ^2 и h^4.

Этот член имеет ту же форму, что и второй член в (98). При интегрировании по ϕ, вклады в потенциал, возникающие за счет (104), будут модифицировать четверную связь (99): четверная связь становится зависящей от калибровочной константы λ и неизвестного (порядка единицы) коэффициента.

Хотя L_t не приводит к квадратичной расходимости в одной петле квадрата массы хиггса, возникает более слабая логарифмическая расходимость. Более того, этот вклад оказывается отрицательным, и он может превысить положительный вклад от калибровочных самовзаимодействий, обеспечивая тем самым электрослабое нарушение симметрии.

Как мы видели, $SU(5)/SO(5)$ позволяет очень экономно ввести механизм маленького хиггса. В этой модели хиггсовский дублет SM — единственный аномально легкий набор NGB. Другие скаляры, образующие электрослабый триплет, имеют массы $\sim f \sim 1$ ТэВ. Другие новые состояния с массами, порядка 1 ТэВ-а, — электрослабый синглет, векторно-подобный кварк, слабый триплет и синглет тяжелых калибровочных бозонов. В этой модели калибровочные взаимодействия нелинейного сигма-поля сами по себе достаточны для генерации четверной связи хиггсовского дублета.

3.9. Феноменология маленького хиггса

3.9.1. Точные электрослабые ограничения. Существуют несколько источников для поправок к электрослабым наблюдаемым в моделях маленького хиггса. Тяжелые калибровочные бозоны связаны с фермионами и хиггсовскими дублетами посредством токов j_F и j_H. После интегрирования по калибровочным бозонам, возникают операторы типа $j_F j_F$, $j_F j_H$ и $j_H j_H$. Члены с $j_F j_F$ соответствуют новым четырехфермионным операторам, вклад которых ограничен данными LEPII и измерениями нарушения четности в атомах. Члены же $j_F j_H$ приводят к модификациям

(по сравнению со SM) связей калибровочных бозонов с фермионами и также ограничены данными вблизи Z-пика. Члены $j_H j_H$ включают $SU(2)$-нарушающий оператор $(h^+ D_\mu h)^2$, который генерируется тяжелыми $U(1)$ калибровочными бозонами.

В моделях маленького хиггса эти эффекты требуют достаточно больших значений константы f. Электрослабые данные дают ограничение $f > 4$ ТэВ, которое входит в ограничение на массу тяжелого кварка, равное 5,7 ТэВ.

Простые модификации модели маленького хиггса не нарушают стабилизации электрослабого масштаба. Если допустить, что легкие фермионы одинаково заряжены относительно обеих $U(1)$, а не одной $U(1)_1$, то при $g_1^1 = g_2^1$ $U(1)$ калибровочный бозон возникает от токов j_F и j_H. Наоборот, можно калибровать $U(1)_Y$, а не произведение $U(1)$. Тогда при $\Lambda \sim 10$ ТэВ, вследствие гиперзарядных взаимодействий, квадратично расходящиеся вклады в квадрат хиггсовской массы оказываются малыми.

3.9.2. Рождение партнеров маленького хиггса. Спектр новых частиц меняется от одной модели маленького хиггса к другой, но все они предсказывают по крайней мере один векторно-подобный кварк на ТэВ-ной шкале, а также дополнительные калибровочные бозоны и скаляры. В этом случае механизм маленького хиггса приводит к сокращению квадратичных расходимостей между состояниями с одинаковой статистикой. Обсудим возможности наблюдения новых частиц на LHC.

Сконцентрируемся на теориях, основанных на произведении групп. Коллайдерная феноменология тяжелого $U(1)$ калибровочного бозона достаточно интересна, но эта частица несущественна для стабилизации электрослабого масштаба, поэтому чаще обсуждаются тяжелые $SU(2)$ калибровочные бозоны. На LHC эти калибровочные бозоны могли бы рождаться при кварк-антикварковой аннигиляции. Сечение зависит от $\operatorname{ctg}\theta = g_1/g_2$, где g_1 — калибровочная константа $SU(2)$, относительно которой преобразуются фермионные дублеты SM. Фермионная связь с тяжелыми калибровочными бозонами пропорциональна $g \operatorname{ctg}\theta$. Для $\operatorname{ctg}\theta = 1$ сечение рождения нейтрального Z_H с массой порядка трех ТэВ составляет ~ 100 фб. Наиболее перспективным каналом распада с точки зрения открытия Z_H является распад на пару высокоэнергетических лептонов.

С учетом электрослабых ограничений для тяжелого $U(1)$ калибровочного бозона, нижний предел на массу тяжелых $SU(2)$ калибровочных бозонов оказывается в районе 2 ТэВ.

Феноменология тяжелого нейтрального калибровочного бозона $SU(3)$-модели (простейший маленький хиггс) подобна феноменологии Z_H в моделях с произведением групп. Однако детектирование тяжелого $SU(2)$-дублета калибровочных бозонов $SU(3)$-модели значительно усложняется v/f подавлением связи этих состояний с легкими кварками.

Если даже тяжелые калибровочные бозоны будут открыты, то возникает вопрос: а связаны ли они с моделями маленького хиггса? Оказывается, парциальная ширина распада Z_H на фермионы пропорциональна $\operatorname{ctg}^2\theta$, а парциальная ширина распада на W^+W^- и Zh пропорциональна $\operatorname{ctg}^2 2\theta$. Эта особенность позволяет провести проверку модели маленького хиггса, поскольку в альтернативной теории с заряженным относительно только одной $SU(2)$, парциальная ширина распада на бозоны пропорциональна, как и для фермионов, $\operatorname{ctg}^2\theta$.

Тяжелый кварк (U, U^C) из-за связи с глюонами в модели «самого маленького хиггса» может рождаться парами, но вследствие смешивания в секторе t-кварка, возможно слияние $W^+b \to U$. Эта мода образования становится доминирующей при массах кварка $m_U > 1$ ТэВ. Для тяжелого кварка $\Gamma(U \to th) \simeq \Gamma(U \to tZ) \simeq \Gamma(U \to bW^+)$. Параметры λ и λ' определяют юкавские связи t-кварка и, наряду с f, массу U и его связи с легкими состояниями.

3.10. Заключение

Модели маленького хиггса представляют заманчивую возможность для физики вне стандартной модели. Эти модели предсказывают новую физику на ТэВ-м масштабе, стабилизирующую, даже при параметре обрезания ~ 10 ТэВ, хиггсовский потенциал. В этих моделях хиггсовский бозон рассматривается в качестве NGB при спонтанном нарушении глобальной симметрии. При этом нарушение симметрии должно быть коллективным по своей природе. Коллективное нарушение подразумевает отсутствие квадратично расходящихся вкладов в хиггсовский потенциал в одной петле. Новые ТэВ-ные частицы сокращают квадратичные расходимости полей SM, и некоторые из этих частиц способны стабилизировать электрослабый масштаб.

ГЛАВА 4

ВНЕШНИЕ (ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ) ИЗМЕРЕНИЯ

4.1. Введение

Зачем нужны внешние измерения? Многие исследователи согласны, что новая физика вне стандартной модели должна существовать, просто она себя еще не проявила. Как ожидается, проявления дополнительных измерений возможны уже на ТэВ-х масштабах энергий.

Какие проблемы стандартной модели остаются нерешенными и как идеи внешних измерений могли бы способствовать решению этих проблем?

Среди проблем стандартной модели следует упомянуть:

а) проблему иерархий;

б) нарушение электрослабой симметрии без хиггсовского бозона;

в) генерация масс фермионов и проблема иерархии масс нейтрино, СКМ-матрица и источники CP-нарушения;

г) ТэВ-й масштаб большого объединения или объединения без SUSY;

д) проблема кандидатов на темную материю;

е) проблема черных дыр и их рождения на будущих коллайдерах.

Возможность существования дополнительных пространственных измерений впервые рассматривалась более 80-ти лет тому назад. Калуца и Клейн пытались объединить с помощью компактного пятого измерения электромагнетизм и теорию гравитации Эйнштейна. В этой схеме фотон возникал из дополнительных компонент метрики. Эта деятельность оживилась последние 10 лет при попытках объединения гравитации и калибровочных взаимодействий. Дополнительные измерения стали фундаментальной составной частью теории струн, которая самосогласованно формулируется в пространствах 10-ти и 11-ти измерений.

Предположим сначала, что дополнительные измерения свернуты (компактифицированы) в многообразие малого радиуса с размером порядка планковской длины $L_{\text{Pl}} \simeq 10^{-33}$ см, и, таким образом, недоступны для эксперимента. В этом подходе эффекты квантовой гравитации становятся существенными на масштабах планковской массы, которая есть комбинация известных констант

$$M_{\text{Pl}}c^2 = \left[\frac{\hbar c^5}{8\pi G_N}\right]^{1/2} \simeq 2{,}4 \cdot 10^{18}\ \text{ГэВ}, \tag{1}$$

Отсюда планковская длина $L_{\text{Pl}} = \hbar/M_{\text{Pl}}$. Планковская масса настолько велика, что у нас мало шансов когда-либо исследовать эту энергетическую область. С теоретической точки зрения, в этом заключается фундаментальная проблема. Дело в том, что условие квантовой нестабильности хиггсовского вакуума фиксирует электрослабый масштаб на уровне $m_{EW} \simeq 1$ ТэВ. Однопетлевые поправки к массе физического Хиггс-бозона квадратично расходятся

$$\delta m_H^2 = \frac{1}{8\pi^2}(\lambda_M^2 - \lambda_F^2)\Lambda^2 + (\log.\ \text{расх.}) + \text{конечн.}, \tag{2}$$

где λ_H — константа самовзаимодействия хигссовского поля H, λ_F — константа связи с фермионами. Кажется естественным выбрать параметр обрезания Λ на уровне планковской массы или масштаба большого объединения $M_{\rm GUT} \simeq 10^{16}$ ГэВ. Но тогда, чтобы получить $m_H^2 \simeq m_{EW}^2$, нужно подобрать параметры в (2) с точностью порядка 10^{15}! Причем это нужно сделать в каждом порядке теории возмущений. Такая «точная настройка» в выражении (2) называется проблемой иерархий, уже обсуждавшейся в главах 1, 2.

Конечно, квадратичные расходимости точно так же, как и логарифмические, можно ренормировать, и ничего плохого в этой «точной настройке» нет. В самом деле, если использовать размерную регуляризацию, то возникают только $1/\varepsilon$-сингулярности, которые, как обычно, можно включить в определение контрчленов. Проблема возникает в случае, когда пытаются придать физический смысл обрезанию. Иными словами, если стандартная модель является фундаментальной теорией, то размерной регуляризации достаточно. Однако большинство теоретиков надеются, что теория должна включать и гравитацию, поэтому введение обрезания в стандартной модели выглядит неубедительно. Для объяснения проблемы иерархий за последние двадцать лет выдвинуты идеи «новой физики», включающие суперсимметрию и композитность.

Последние исследования, основанные на изучении $E_8 \times E_8$-теории, предполагают, что некоторые, если не все, дополнительные измерения могли бы иметь размер, гораздо больший $L_{\rm Pl}$. Но тогда возникают вопросы: а) как велики могут быть дополнительные измерения, чтобы они не противоречили наблюдаемым данным, б) как они могли бы проявлять себя? Оказывается, что размер дополнительных измерений мог бы составлять миллиметры. Это возможно только в случае, если наблюдаемый мир ограничен 4-мерной гиперповерхностью (или браной), «погруженной» в многомерное пространство. При этом дополнительные измерения проявляются лишь в гравитационных взаимодействиях. Очень важно, что в моделях с большими дополнительными измерениями масштаб квантовой гравитации гораздо меньше $M_{\rm Pl}$, даже близок к m_{EW}. Таким образом, возникает возможность альтернативного решения проблемы иерархий.

4.2. Одно дополнительное измерение

Что можно узнать о внешних измерениях из классических рассмотрений и общих принципов? Рассмотрим случай безмассовой частицы, движущейся в 5D картезианских координатах и предположим, что имеет место 5D Лоренц-инвариантность. Тогда квадрат 5D импульса частицы $p^2 = 0 = g_{AB}p^A p^B = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} \pm p_5^2$, где $g_{AB} = {\rm diag}(1, -1, -1, -1, \pm 1)$ — 5-мерный метрический тензор (определенный инвариантным интервалом $ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B$), p_0 — энергия частицы, $\vec{p}^{\,2}$ — квадрат трехмерного импульса и p_5 — импульс вдоль 5-го измерения. Условие $p^2 = 0$ означает, что частица предполагается безмассовой в 5D.

Заметим, что a priori мы не знаем знак метрического тензора для 5-го измерения: выбор $+(-)$ соответствует времениподобному (пространственноподобному) дополнительному измерению.

Можно переписать $p^2 = 0$ в более традиционной форме $p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = p_\mu p^\mu = \mp p_5^2$ и напомнить, что все известные нам частицы обладают Лоренц-инвариантностью, т. е. $p_\mu p^\mu = m^2$ — квадрат массы частицы.

Если выбрать времениподобное дополнительное измерение, то знак квадрата массы частицы оказывается отрицательным, т. е. частица — тахион. Как хорошо известно, тахионы весьма «опасны» во многих моделях даже на классическом уровне,

поскольку они вызывают серьезные проблемы с причинностью. Поэтому дополнительное измерение предпочтительнее выбрать пространственноподобным. Вообще, для того чтобы избежать проблему тахионов, необходимо считать все измерения пространственноподобными.

Рассмотрим теперь случай безмассового скалярного поля в плоском 5D пространстве, которое является решением 5-мерного уравнения Клейна–Гордона

$$\partial_A \partial^A \phi = (\partial_\mu \partial^\mu - \partial_y^2)\phi(x, y) = 0, \tag{3}$$

где y соответствует внешнему измерению. Предположим, что поле $\phi(x, y)$ допускает разделение переменных, т. е. его можно представить в виде

$$\phi = \sum_n \chi_n(y)\phi_n(x). \tag{4}$$

Подставляя это разложение в уравнение Клейна–Гордона, получаем

$$\sum_n (\chi_n \partial_\mu \partial^\mu \phi_n - \phi_n \partial_y^2 \chi_n) = 0. \tag{5}$$

Если $\partial_y^2 \chi_n = -m_n^2 \chi_n$, то возникает набор уравнений

$$\sum_n \chi_n (\partial_\mu \partial^\mu + m_n^2)\phi_n = 0. \tag{6}$$

Это уравнение для 4D скалярных полей с массами m_n. Этот набор состояний с различными массами называют «башнями Калуцы–Клейна» (КК-состояниями). Поскольку состояния нумеруются набором целых чисел n, соответствующие уровни дискретны. Можно, однако, заменить сумму интегралом, трактуя n как непрерывную переменную.

Пока же будем считать n дискретным и запишем действие (интеграл от лагранжиана) для безмассового 5D скаляра, предполагая, что $y_1 < y < y_2$:

$$S = \int d^4x \int_{y_1}^{y_2} dy \frac{1}{2} \partial_A \phi \, \partial^A \phi. \tag{7}$$

Заметим, что $\partial_A \phi \partial^A \phi = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \partial_y \phi \partial_y \phi$ и подставим разложение (4). Тогда подынтегральная функция содержит двойную сумму

$$\sum_{nm} [\chi_n \chi_m \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_m - \phi_n \phi_m \partial_y \chi_n \partial_y \chi_m]. \tag{8}$$

Предположим, что набор χ_n ортонормирован, т. е.

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \chi_n \chi_m = \delta_{nm}. \tag{9}$$

Тогда кинетическое слагаемое (первое слагаемое в (8)) сводится после интегрирования к одной сумме и принимает вид $\sum_n \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n$. Это сумма кинетических слагаемых для набора различных 4D скаляров.

Что касается второго слагаемого в (8), если провести интегрирование по частям, использовать граничные условия

$$\chi_m \partial_y \chi_n |_{y_1}^{y_2} = 0 \tag{10}$$

и потребовать

$$\partial_y^2 \chi_n = -m_n^2 \chi_n, \tag{11}$$

то получим эффективное действие 4D теории

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \sum_n [\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - m_n^2 \phi_n^2]. \tag{12}$$

А это есть не что иное, как сумма действий для независимых 4D скаляров с массами m_n, т. е. состояний Калуцы–Клейна. Поля χ_n можно рассматривать как волновые функции различных КК-состояний в 5-м измерении, и в нашем примере это просто гармонические функции

$$\chi_n = A_n e^{im_n y} + B_n e^{-im_n y}. \tag{13}$$

Какие значения могут принимать m_n, A_n и B_n? Это зависит от граничных условий (10). Обратимся к примеру из квантовой механики. Напомним уравнение Шредингера для свободной частицы, движущейся вдоль оси x. Оно имеет ту же форму, что и уравнение (11). Поскольку x направление бесконечно, т. е. некомпактно, решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi \sim A' e^{ipx} + B' e^{-ipx}, \tag{14}$$

где p — импульс частицы, способный принимать произвольные непрерывные значения. Говорят, что в этом случае импульс не квантуется, поскольку пространство некомпактно.

Рассмотрим теперь случай частицы в потенциальной яме, в которой потенциал равен нулю для $0 \leq y \leq \pi L$ и бесконечен вне этого интервала (волновая функция в этой области обращается в ноль). Поскольку «физическая» область имеет конечный размер, она компактна. Как известно, решение внутри ямы имеет ту же форму (14), как и для случая свободной частицы или поля χ_n, но оно должно зануляться на границах. Эти граничные условия определяют A' и B' таким образом, что на самом деле решение имеет вид $\sim \sin(ny/L)$, а импульс квантуется $p = n/L$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Очевидно, что эти две ситуации полностью аналогичны 5-му измерению, которое либо бесконечно (т. е. некомпактно), либо конечно (т. е. компактно).

Будем предполагать, что внешние измерения компактны. Для плоского 5-го измерения длины πL массы КК-состояний $m_n = n/L$, т. е. массы велики, если размер внешних измерений мал. По-видимому, естественно думать, что пока внешние измерения ненаблюдаемы потому, что их размер очень мал, а массы КК-состояний слишком велики, чтобы быть наблюдаемыми на коллайдерах. Интересно отметить, что нет решений, соответствующих безмассовым частицам, т. е. $n = 0$, называемых нулевыми модами.

Существуют и другие граничные условия, которые могут быть важными. В квантовой механике, например, рассматривается движение частицы по кругу, при этом квантуется угловой момент. В 5-мерном случае можно себе представить, что это измерение — цикл S^1 — одномерная сфера радиуса R, при этом точки $y = -\pi R$ и $y = \pi R$ считаются одинаковыми. Это так называемые периодические граничные условия. В этом случае массы КК-состояний $m_n = n/R$, но решения имеют вид $A_n \cos(ny/R) + B_n \sin(ny/R)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Отметим, что вследствие периодических граничных условий безмассовые моды существуют.

Можно несколько изменить решение, определив оператор четности на интервале $-\pi R < y < \pi R$, который переводит $y \to -y$. Имеются две специальные точки на

этом интервале (они называются фиксированными точками), которые инвариантны относительно этой Z_2 операции при объединении с трансляцией $y \to y + 2\pi R$ и свойством периодичности. Это точки $y = 0, \pi R$. Собственные функции волнового уравнения должны учитывать эту Z_2-симметрию. Поэтому решения должны быть или Z_2-четные, т. е. $\sim \cos(ny/R)$ или Z_2-нечетные, т. е. $\sim \sin(ny/R)$. Заметим, что только Z_2-четные состояния имеют нулевые моды. Такая геометрия называется S^1/Z_2, и это простейший пример орбифолда — многообразия с дискретной симметрией, идентифицирующей различные точки многообразия. В нашем примере, y и $-y$. Орбифолд S^1/Z_2 особенно интересен с точки зрения рассматриваемых ниже моделей внешних измерений.

До сих пор рассматривалось лишь 5-мерное скалярное поле. Как насчет других 5-мерных полей? Вспомним, как в специальной теории относительности 3-мерные векторы и скаляры рассматриваются в качестве 4D-полей. Поскольку 4-вектор содержит 3-вектор и 3-скаляр, то 5-мерное безмассовое калибровочное поле (с тремя поляризационными состояниями) содержит два КК-поля. Одно соответствует 4-мерному калибровочному полю (с двумя поляризационными состояниями), а другое — 4-мерному скалярному полю. Действительно, в $(4 + n)$ измерениях калибровочное поле будет разлагаться на 4-мерные калибровочные КК-состояния плюс n различных скалярных состояний. Мы знаем из предыдущего обсуждения, что КК-моды (за исключением нулевой) массивны. Но как массивное 4-мерное калибровочное поле может иметь лишь два поляризационных состояния?

Рассмотрим для простоты 5-мерный случай. Оказывается, возможно провести калибровочное преобразование, исключающее скалярные КК-поля. При этом калибровочное поле посредством механизма Хиггса–Голдстоуна приобретает продольную компоненту. Скалярные моды идентифицируются с набором голдстоуновских бозонов. Таким образом, в унитарной (физической) калибровке безмассовые 5-мерные калибровочные поля становятся массивными 4-мерными калибровочными полями. В $(4 + n)$ измерениях только одна линейная комбинация скаляров «поглощается» механизмом Хиггса. Поэтому в унитарной калибровке безмассовое $(4 + n)$-мерное калибровочное поле порождает 4-мерные калибровочные поля вместе с $(n - 1)$ скалярным полем.

Для того чтобы увидеть, как такое разложение калибровочных полей «работает» практически, рассмотрим безмассовое 5-мерное калибровочное поле с 5-м измерением, компактифицирующимся на орбифолде S^1/Z_2. На первом шаге КК-разложения можно показать, что 2-я компонента вектора полей КК Z_2-четна, с 5-мерной волновой функцией $\sim \cos(ny/R)$. В то же время КК-скаляры Z_2-нечетны, с волновой функцией $\sim \sin(ny/R)$. Отметим отсутствие $n = 0$ скалярной моды в силу Z_2-симметрии орбифолда. Если мы применяем механизм Хиггса ко всем $n > 0$ калибровочным КК-полям, то они становятся массивными 3-компонентными калибровочными полями с $m_n = n/R$ «поглотивших» их скалярных партнеров. Однако нулевая мода остается безмассовой, поскольку нет голдстоуновского бозона, который она могла бы «поглотить».

В 4-х измерениях безмассовость нулевых мод означает, что калибровочная инвариантность не нарушена. Видим, что орбифолдные граничные условия весьма удобны с точки зрения генерации безмассовых мод и проявления калибровочной инвариантности. Можно преобразовать эти орбифолдные граничные условия для калибровочных полей в простые соотношения $\partial_y A_n^\mu| = 0$, $A_n^5| = 0$, где знак $|$ означает границу.

Интересно, что физика меняется, если изменить граничные условия.

Вместо орбифолда рассмотрим компактификацию на интервал $0 \leq y \leq \pi R$ и выберем граничные условия следующим образом: $A_n^\mu = \partial_y A_n^5 = 0$, при $y = 0$ и

$\partial_y A^\mu_n = A^5_n = 0$ при $y = \pi R$. Тогда $A^\mu \sim \sin(m_n y/R)$, и безмассовые моды отсутствуют. После механизма Хиггса все 4-мерные калибровочные КК-поля становятся массивными с $m_n = (n + 1/2)/R$, при этом калибровочная инвариантность нарушена. Этот простой пример показывает, как граничные условия нарушают калибровочные симметрии. В настоящее время эта техника используется для объяснения нарушения симметрии стандартной модели без введения фундаментальных хиггсовских полей.

Как разлагаются другие многомерные поля? В качестве простейшего примера выберем гравитационное поле в 5-ти измерениях, характеризующееся симметричным тензором h^{AB}, который при переходе к 4-м измерениям разлагается следующим образом: $h^{AB} \to (h^{\mu\nu}, h^{\mu 5}, h^{55})_n$. Как и раньше, индекс n относится к КК-модам. Если компактифицируем на S^1/Z_2, оставляя нулевую моду $h_0^{\mu\nu}$ безмассовой, то тогда для $n > 0$ все $h_n^{\mu 5}$ и h_n^{55} поля «поглощаются», генерируя массивный КК-гравитон, а также поля с пятью поляризационными состояниями. Для $n = 0$ нет $h_0^{\mu 5}$, который мог быть «поглощен», поэтому наряду с безмассовым гравитоном остается безмассовый h^{55} скаляр. Это поле называется радионом, оно соответствует флуктуациям размера внешних измерений.

Если говорить в терминах многообразий, на которые компактифицируются многомерные поля, то с ростом числа измерений их сложность и возможное число орбифолдных симметрий резко возрастает. Обычно рассматриваются торы T^n, которые есть произведение циклов, а также сферы S^n.

Обратимся теперь к моделям внешних измерений.

4.3. *d* дополнительных измерений

Этот подход основан на гипотезе $(4 + d)$-мерного псевдоевклидова пространства

$$E_{4+d} = M_4 \times K_d, \tag{15}$$

где M_4 — 4-мерное пространство-время и K_d — d-мерное компактифицированное пространство с характеристическим размером R.

В соответствии с тем, что пространство E_{4+d} является прямым произведением пространств, метрику выбирают следующим образом:

$$ds^2 = \widehat{G}_{MN}(\widehat{x}) d\widehat{x}^M d\widehat{x}^N = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \gamma_{mn}(x, y) dy^m dy^n. \tag{16}$$

Чтобы интерпретировать теорию как эффективно четырехмерную, поле $\widehat{\phi}(x, y)$, зависящее от обеих координат, представляют как Фурье-разложение на компактифицированном пространстве:

$$\widehat{\phi}(x, y) = \sum_n \phi^{(n)}(x) Y_n(y), \tag{17}$$

где $Y_n(y)$ — диагональные нормированные собственные функции оператора Лапласа Δ_{K_d} в пространстве K_d:

$$\Delta_{K_d} Y_n(y) = \frac{\lambda_n}{R^2} Y_n(y). \tag{18}$$

Коэффициенты $\phi^{(n)}(x)$ Фурье-разложения (17) называют модами Калуцы–Клейна. Они играют роль полей эффективной 4-мерной теории. Массы этих полей

$$m_n^2 = m^2 + \frac{\lambda_n}{R^2}, \tag{19}$$

где R — радиус компактного измерения.

Константа связи $g_{(4)}$ 4-мерной теории связана с константой связи $g_{(4+d)}$ первоначальной теории соотношением

$$g_{(4)} = \frac{g_{(4+d)}}{V_{(d)}}, \tag{20}$$

где $V_{(d)} \sim R^d$ — объем пространства внешних измерений.

4.4. Большие внешние измерения (модель ADD)

Сценарий больших внешних измерений был предложен Аркани-Хамед, Димопулосом и Двали (ADD) для решения проблемы иерархий: почему приведенная планковская масса $M_{\mathrm{Pl}} \simeq 2{,}4 \cdot 10^{18}$ ГэВ гораздо больше слабого масштаба ~ 1 ТэВ? ADD предположили, что мы (и все другие частицы стандартной модели!) живем на 4D гиперповерхности, называемой стенкой или браной. С другой стороны, гравитация распространяется и на $(4+n)$-мерный объем, которым может быть, например, n-тор T^n. Эту брану удобно расположить в «начале координат» внешних измерений, $y = 0$.

Тогда теорема Гаусса дает возможность связать планковскую массу M_{Pl} в 4-х измерениях с $(4+n)$-мерным масштабом M_*, который имеется в многомерном действии, с помощью соотношения

$$M_{\mathrm{Pl}}^2 = V_n M_*^{n+2}, \tag{21}$$

где V_n — объем n-мерного компактифицированного пространства. Масштаб M_* (иногда в литературе обозначается и как M_D) можно рассматривать как истинный планковский масштаб, поскольку он входит в многомерное действие, соответствующее теории относительности в $(4+n)$ измерениях.

Возможно ли, чтобы M_* была по величине равной нескольким ТэВ-ам, решив тем самым проблему иерархии? Для этого надо знать V_n — объем компактифицированного пространства. В качестве примера рассмотрим случай, когда этим пространством является тор T^n, со всеми радиусами, равными R. Тогда $V_n = (2\pi R)^n$. Зная M_{Pl} и предполагая $M_* \sim$ несколько ТэВ, можно оценить величину R. Прежде чем это делать, рассмотрим «поведение» гравитации во внешних измерениях.

Если выбрать две массы, разделенные расстоянием r в $(4+n)$ измерениях, то сила притяжения между ними будет зависеть как от r, так и от радиуса R. Если $r \gg R$, то, очевидно, что внешние измерения ненаблюдаемы. В этом случае, по Ньютону, $F_{\mathrm{grav}} \sim 1/r^2$. В противоположном пределе $r \ll R$ эффекты $(4+n)$-мерного пространства должны стать очевидными настолько, что «мы» не сможем определить, компактифицированы ли внешние измерения. С помощью теоремы Гаусса, в этом случае получим $F_{\mathrm{grav}} \sim 1/r^{n-1}$. Очевидно, для наблюдения отклонения от закона Ньютона, нужно иметь $r \sim R$, т. е. R не может быть слишком большим.

Предположим, что $n = 1$, тогда, с помощью соотношения (21), получим $R \sim 10^{13}$ см. Это масштаб расстояния от Земли до Солнца. На этих масштабах, как мы знаем, закон Ньютона выполняется с большой точностью, поэтому случай $n = 1$ следует исключить. К счастью, размер R быстро уменьшается с ростом n: для $n = 2$ $R \sim 100$ мкм. Это как раз масштаб, до которого в настоящее время проверен закон тяготения.

Если n возрастает и далее, R становится слишком малым, чтобы наблюдать какие-либо отклонения от $1/r^2$ поведения.

Таким образом, ADD будет «работать» для $n \geq 2$. Насколько большим может быть n? Если мы верим в теорию суперструн, то $n < 6{,}7$.

Если допустить $n \simeq 30$, то $M_* R \sim 1$ — это ожидание основано на предположении натуральности. При $n \simeq 15$ или меньше, $R^{-1} \ll M_* \sim$ несколькоТэВ. Это утверждение важно по нескольким причинам:

а) почему мы требуем, чтобы поля стандартной модели находились на бране? Если какие-либо поля стандартной модели распространяются вне браны, то эти поля должны иметь КК-моды. Поскольку массы КК-полей $\sim 1/R$, и они не наблюдались до сих пор на коллайдерах, то следует предположить $1/R \geq 100$ ГэВ. Для любого $n < 10$ это условие невыполнимо. Следовательно, если мы верим в струны, то поля стандартной модели должны оставаться на бране.

б) Поскольку гравитоны распространяются вне браны, их КК-массы $m_{\text{KK}}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i^2/R^2$, где l_i — целые числа, нумерующие импульсы полей КК для i-того внешнего измерения. Как было отмечено выше, для не слишком больших n эти массы очень малы по сравнению с 1 ТэВ. Это обстоятельство имеет важные феноменологические следствия. Если $n = 6$ или $n = 7$ в струнной теории, то почему бы не принять эти значения?

До сих пор предполагалось, что все внешние измерения имеют одинаковый радиус, но это не обязательно. Пусть среди n измерений $(n - p)$ имеют радиус R_1, а p измерений — радиус R_2. Тогда

$$M_{\text{Pl}}^2 = (2\pi)^n R_1^{(n-p)} R_2^p M_*^{(n+2)}. \tag{22}$$

Пусть $R_2^{-1} \sim M_*$, тогда получим

$$M_{\text{Pl}}^2 \sim R_1^{(n-p)} M_*^{(n-p)+2}, \tag{23}$$

т. е. в этом случае имеем лишь $(n - p)$ больших измерений.

Таким образом, мы могли бы иметь 7 внешних измерений, как предполагается в модели струн, но лишь 4 из них были бы большими. Если бы поля стандартной модели существовали в этих p малых внешних измерениях, то их КК-поля имели бы массы в ТэВ-й области.

Обсудим далее, как гравитонные КК-поля взаимодействуют с полями стандартной модели на бране. Оказывается, что гравитон КК связан с полями стандартной модели на бране точно так же, как обычный (нулевой моды) гравитон:

$$L = -\frac{1}{M_{\text{Pl}}} \sum_n G_n^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \tag{24}$$

где $G_n^{\mu\nu}$ — КК гравитонные поля в унитарной калибровке и $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса полей стандартной модели на бране. Поскольку имеется, по крайней мере, 2 внешних измерения, то можно ожидать, что векторные поля $G_n^{\mu i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ связаны с частицами стандартной модели. Однако реально такая связь отсутствует в силу симметрийных аргументов, поскольку брана стандартной модели находится при $y = 0$. Также можно ожидать, что некоторая комбинация скалярных полей G_n^{ij} связана с полями стандартной модели. На самом деле, только одна скалярная мода КК связана с полями стандартной модели $\sim T_\mu^\mu/M_{\text{Pl}}$. Но $T_\mu^\mu = 0$ для безмассовых частиц (за исключением аномалий), поэтому связь довольно слабая для большинства полей стандартной модели, за исключением топ кварка и массивных калибровочных бозонов.

Как внешние измерения в модели ADD могли бы проявляться на коллайдерах? Имеется два важных проявления внешних измерений в модели ADD. Первое —

испускание гравитона КК при столкновении двух частиц стандартной модели. Рассмотрим, например, столкновение $q\overline{q}$ с рождением глюона или e^+e^- с рождением фотона. В этих процессах возможно испускание гравитонных КК-состояний полями стандартной модели. Заметим, что из-за слабой связи гравитонов КК с полями стандартной модели, сечение такого процесса должно быть малым. Кроме того, гравитон после своего рождения не рассеивается и не распадается в веществе детектора. Поэтому его можно регистрировать лишь косвенно по «missing» энергии. Все гравитонные состояния, с точки зрения конечных состояний, имеют одинаковые сечения. Например, для e^+e^- аннигиляции это означает, что мы суммируем по вкладам КК-состояний с массами, меньшими $\sqrt{s}$. Поскольку таких состояний очень много, то сумму можно заменить на интеграл по плотности состояний.

Пока сигналов внешних измерений на Тэватроне и LEPII не обнаружено.

Существует и другой способ, тоже косвенный, обнаружения гравитона КК в ADD-модели: гравитоны могут быть обменными частицами при столкновении частиц стандартной модели. Например, процессы $q\overline{q} \to gg$ или $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ могут происходить за счет обмена гравитонами. Как и раньше, амплитуда для обмена одним КК промежуточным состоянием мала, но поскольку этих состояний много, то сечение уже не пренебрежимо мало.

К сожалению, сумма по всем КК-состояниям для $n > 1$ расходится. Обычно считается, что на масштабе $\sim M_*$ гравитоны ADD-модели становятся сильно связанными, теория возмущений неприменима, и сумму следует обрезать вблизи M_*.

Можно ли выделить эффекты обмена гравитонами на фоне других процессов? Если использовать поляризованные пучки, то $e^+e^- \to f\overline{f}, W^+W^-$ могут быть режектированы по угловым распределениям. Прежде чем обратиться к другой модели внешних измерений, раскроем небольшой секрет ADD-модели. Первоначально это модель была создана для разрешения проблемы иерархий — исключения большого отношения между «слабым» масштабом и истинным фундаментальным масштабом. Однако, если внимательно посмотреть на эту модель, то она одно большое отношение заменяет другим: $RM_* \sim (M_{\rm Pl}^2/M_*^2)^{1/n}$. Другая модель внешних измерений, к обсуждению которой мы переходим, гораздо больше соответствует этой цели.

4.5. «Искаженные» внешние измерения (модель RS)

Эта модель предложена Randall и Sundram. В модели RS предполагается существование только одного внешнего измерения, которое компактифицируется на орбифолд S^1/Z_2, обсужденный выше. Считается, что имеется две браны: одна при $y = 0$ (она называется планковской браной), а другая — при $y = \pi r_c$ (она называется Тэв-й или браной стандартной модели) с двумя фиксированными точками орбифолда.

Метрика в модели RS выбирается в виде:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \tag{25}$$

где $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ — обычная метрика минковского и $\sigma(y)$ — a priori неизвестная функция. Такой тип геометрии называется «нефакторизуемым», поскольку метрика 4-мерного подпространства зависит от y. В простейшей версии RS-модели считается, как и в ADD-модели, что поля стандартной модели «живут» на ТэВ-й бране, в то время как гравитация «живет» повсюду.

Однако, в отличие от ADD, имеется «космологическая» константа в 5-мерном объеме, и обе браны имеют различные натяжения. Решения 5-мерных уравнений Эйнштейна определяют величину $\sigma = K|y|$, где K — размерный параметр. Основное

предположение RS-модели состоит в том, что нет большой иерархии масс, т. е. $K \sim M_*$, где M_* — 5-мерная фундаментальная планковская масса.

В самом деле, решив уравнения Эйнштейна, подставив их в первоначальное действие и проинтегрировав по y, получим

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{M_*^3}{K}(1 - e^{-2\pi K r_c}). \tag{26}$$

Как мы увидим ниже, фактор искажения $e^{-\pi K r_c}$ будет очень малой величиной, а это значит, что M_{Pl}, M_* и K сравнимы по величине, и проблема иерархий снимается. Если вычислить Риччи кривизну для 5-мерного пространства, то она будет постоянной: $R_5 = -20K^2$, т. е. K — мера постоянной кривизны этого пространства. Пространство с постоянной отрицательной кривизной называется антидеситтеровским пространством. В данном случае AdS_5. Из-за присутствия экспоненциального «искажающего» фактора, это пространство называется искаженным пространством.

Прежде чем продолжить обсуждение, заметим, что если масштаб кривизны слишком мал, например, если обратный радиус кривизны становится больше 5-мерной планковской массы, то эффекты квантовой гравитации доминируют, и наше рассмотрение становится неадекватным. Это означает, что нужно потребовать $|R_5| \leq M_*^2$ или $K/M_{\text{Pl}} \leq 0{,}1$.

Обратимся теперь к наиболее привлекательным особенностям RS-модели. Предполагается, что все размерные параметры в действии имеют массовые масштабы $M_* \sim M_{\text{Pl}} \sim K$, и нет проблем с точной «настройкой» параметров. Однако «искажающий» фактор перемасштабирует при изменении y так, что все массы на бране стандартной модели становятся порядка ТэВа. Это означает, что если имеется некоторый массовый параметр m в действии и который $\sim M_{\text{Pl}}$, на ТэВ-й бране за счет фактора $e^{-\pi K r_c}$ он будет принимать редуцированное значение.

Если $K r_c \sim 11$ (малая иерархия), то этот экспоненциальный фактор редуцирует массы порядка 10^{18} ГэВ к значениям порядка ТэВов. Таким образом, отношение слабого масштаба к M_{Pl} объясняется экспоненциальным фактором, а другого большого отношения в RS-модели не возникает. Тем самым разрешается проблема иерархий.

Каким образом это «искажение» проявляется? Рассмотрим пример хиггсовского поля на ТэВ-й бране:

$$S = \int d^4x dy \sqrt{-g}\big(g^{\mu\nu}\partial_\mu H^+ \partial_\nu H - \lambda(H^2 - v_0^2)^2 \delta(y - \pi r_c)\big), \tag{27}$$

где g — определитель метрического тензора, λ — константа связи, v_0 — вакуумное среднее хиггсовского поля, которое, в силу философии RS-модели, порядка M_{Pl}. Поскольку $\sqrt{-g} = e^{-4K|y|}$ и $g^{\mu\nu} = e^{2K|y|}\eta^{\mu\nu}$, то можно вычислить интеграл по y в (27):

$$S = \int d^4x\big(e^{-2\pi K r_c}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu H^+ \partial_\nu H - \lambda e^{-4\pi K r_c}(H^2 - v_0^2)^2\big). \tag{28}$$

Чтобы получить канонически нормированное хиггсовское поле, переопределим $H \to e^{\pi K r_c} h$. Тогда действие принимает вид

$$S = \int d^4x\big(\partial^\mu h^+ \partial_\mu h - \lambda(h^2 - v_0^2 e^{-2\pi K r_c})^2\big). \tag{29}$$

Видно, что вакуумное среднее, наблюдаемое на стандартной бране, не v_0, а $v_0 e^{-\pi K r_c} \sim$ $\sim$ ТэВ. Замечательно, что хиггсовское поле приобретает необходимое вакуумное среднее, стартуя с действия, в котором все параметры $\sim M_{\text{Pl}}$! Это наиболее интересное предсказание RS-модели.

Хотя гравитоны имеют спин 2, их массы и волновые функции идентичны случаю скалярного поля, который гораздо проще для анализа. Действительно, обратимся к уравнению Клейна–Гордона в искривленном пространстве

$$(\sqrt{-g})^{-1}\partial_A(\sqrt{-g}g^{AB}\partial_B\phi) = 0. \tag{30}$$

После разделения переменных, согласно КК-разложению, получим

$$e^{-2Ky}\partial_y(e^{-2Ky}\partial_y\chi_n) = m_n^2\chi_n, \tag{31}$$

которое сводится к уравнению для пространства нулевой кривизны (плоскому пространству) при $K \to 0$. Решением уравнения (31) для волновых функций χ_n является линейная комбинация функций Бесселя J_2 и Y_2, а не синусов и косинусов, как для плоского пространства.

В этом случае массы КК-мод:

$$m_n = x_n K e^{-\pi K r_c}, \tag{32}$$

где x_n — корни уравнения $J_1(x_n) = 0$, $x_n = 0,\ 3{,}8317,\ 7{,}0155,\ \ldots$.

Поскольку $Ke^{-\pi K r_c} \sim$ несколько сотен ГэВ, то КК гравитонные массы сравнимы по величине, т. е. КК-гравитоны имеют ТэВ-й масштаб масс.

Возвращаясь к 5-мерному эйнштейновскому действию, подставляя в него волновые функции КК-состояний, определим их связь с полями стандартной модели на ТэВ-й бране:

$$L = -\Big(\frac{G_0^{\mu\nu}}{M_{\text{Pl}}} + \sum_{n>0}\frac{G_n^{\mu\nu}}{\Lambda_\pi}\Big)T_{\mu\nu}, \tag{33}$$

где $\Lambda_\pi = M_{\text{Pl}}e^{-\pi K r_c} \sim$ ТэВ.

Как видно из (33), обычные гравитонные нулевые моды связаны с полями стандартной модели так же, как в ADD-модели, но все высшие КК-моды имеют, вследствие искажающего фактора, большие константы связи. Таким образом, имеется ТэВ-й гравитон КК, который может рождаться на коллайдерах как резонанс со спином два.

Вследствие универсальности гравитации, эти КК гравитонные резонансы могли бы наблюдаться во многих процессах.

Модель RS имеет только два свободных параметра, например, масса легчайшего КК-возбуждения m_1 и отношение K/M_{Pl}.

Если задать эти два параметра, то все другие массы и константы связи можно определить. Отношение K/M_{Pl} определяет ширину КК-резонанса при фиксированной массе резонанса.

Кажется удивительным, почему в RS-модели константа связи нулевой моды очень слабая, а для других КК-мод — гораздо сильнее. Величина «константы» связи КК-моды с полями стандартной модели на Тэв-й бране пропорциональна величине 5-мерной волновой функции при $y = \pi r_c$. В плоском случае, обсуждавшемся выше, волновые функции гравитонов КК пропорциональны $\cos(ny/R)$ и принимают одинаковые значения для всех n. В случае искривленного пространства комбинации J_2, Y_2 бесселевых функций ведут себя по-разному при $x_n = 0$, т. е. для нулевой моды. Для нулевой моды 5-мерная волновая функция имеет пик на планковской бране, т. е. ее величина очень мала на ТэВ-й бране. Противоположное утверждение справедливо для других КК-мод.

Как эти гравитонные КК-состояния можно обнаружить на коллайдерах? Для этого следует изучать рождение гравитонных резонансов на LHC в канале Дрелла–Яна и $\mu^+\mu^-$-пар на ILC для различных значений параметров m_1 и K/M_{Pl}. Заметим,

что ширина резонансов растет как $(K/M_{\text{Pl}})^2$, т. е. тяжелые резонансы достаточно широкие.

Допустим, что новые резонансы на LHC или ILC обнаружены. Как доказать, являются ли они КК-состояниями?

Прежде всего нужно определить спин этих состояний. Для этого следует использовать поляризованные пучки, и по угловым распределениям можно найти спин промежуточного состояния. После того, как установлен спин 2 резонанса, следует продемонстрировать универсальность связи этого состояния с другими состояниями (полями стандартной модели).

4.6. Универсальные внешние измерения

Обратимся снова к случаю, когда имеется одно плоское ТэВ-но масштабное внешнее измерение, как в модели ADD, но с другим радиусом компактификации. Тогда можно поместить все поля стандартной модели в эту часть объема, при этом они будут иметь возбуждения КК. Это так называемый сценарий универсальных внешних измерений (UED). Для простоты можно считать, что внешнее измерение имеет топологию S^1/Z_2. Тогда массы КК-полей

$$m_{KK}^2 = m_{SM}^2 + \frac{n^2}{R^2}, \tag{34}$$

где m_{SM} — массы частиц стандартной модели, R — радиус компактного измерения. Если $R^{-1} \sim 300 \div 500$ ГэВ, то имеется сильное вырождение среди КК-уровней.

Детали массового спектра КК-мод весьма важны с точки зрения феноменологии этой модели.

В теории с только периодическими граничными условиями, как при компактификации на S^1, величина импульса в любом процессе во внешних измерениях сохраняется. В модели UED, за счет радиационных поправок, граничные условия изменяются и вышеупомянутый закон сохранения нарушается.

Вместо этого имеется дискретный закон сохранения, называемый КК-четностью и характеризуемый величиной $(-1)^n$, где n — уровень КК-мод. Весьма интересно, что КК спектр (39) после «включения» радиационных поправок выглядит как типичный SUSY спектр. Как тогда их различать на коллайдерах? Очевидно, что главное отличие между SUSY и UED состоит в том, что новые тяжелые частицы имеют различные спины.

Кроме того, если R^{-1} не слишком велико, то в модели UED возможно одиночное рождение $n = 2$ состояния, что невозможно наблюдать в суперсимметричных моделях. Открытие внешних измерений может радикально изменить наши представления о Вселенной как на малых, так и на больших масштабах.

Приложение. Экспериментальное исследование формы внешних измерений

Уже более двадцати лет струнные теории являются наиболее привлекательными кандидатами на роль единой теории всех взаимодействий. Однако самосогласованность струнных моделей требует пространства с девятью пространственными измерениями. Поскольку наблюдается только три пространственных измерения, то необходимо предположить, что остальные шесть измерений — компактны и имеют очень малый размер R. При этом на расстояниях, больших R, эффекты дополнительных измерений ненаблюдаемы. Поскольку дополнительные измерения компактны, любая функция от этих измерений — периодическая, и ее можно разложить в ряд Фурье. На расстояниях, больших R (в шкале энергии, меньших $1/R$) существенны лишь нулевые моды в этом разложении, которые не зависят от дополнительных измерений. До последнего времени возможности экспериментального детектирования дополнительных измерений не рассматривались, поскольку $1/R$ таковы, что энергий современных ускорителей явно недостаточно.

Если энергия частицы растет, ее комптоновская длина волны уменьшается и может стать меньше шварцшильдовского радиуса частицы, при котором становятся сильными гравитационные эффекты. Это происходит при планковских энергиях $\sim 10^{19}$ ГэВ, на планковских длинах $\sim 10^{-33}$ см. Если радиус компактификации порядка планковской длины, то это весьма далеко от возможностей современных ускорителей.

Как уже отмечалось выше, в последнее время появились теории, в которых размер дополнительных измерений может быть большим, например, составлять миллиметры! В этих моделях только гравитационные взаимодействия распространяются в дополнительные измерения, другие частицы и взаимодействия «привязаны» к нашему трехмерному пространству. В этом подходе к дополнительным измерениям будут чувствительны только гравитационные взаимодействия на расстояниях, меньших миллиметра. Это предположение имеет важнейшее экспериментально проверяемое следствие. В пространстве с дополнительными измерениями гравитационное взаимодействие уже не ведет себя обратно пропорционально квадрату радиуса. Например, в пространстве с четырьмя пространственными измерениями оно ведет себя $\sim 1/R^3$, а в пространстве с пятью измерениями $\sim 1/R^4$. Эти утверждения являются следствиями теоремы Гаусса в многомерных пространствах.

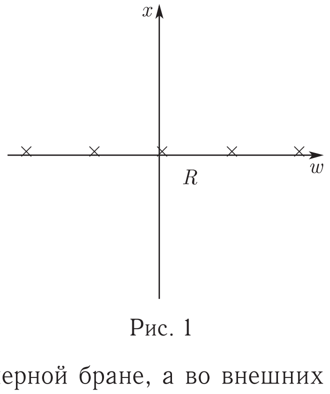


Рис. 1

Рассмотрим сначала случай одного дополнительного измерения, компактифицированного с периодичностью R (R обозначает длину окружности, а не радиус). Пусть пространственные переменные — x, y, z и w. Точечная масса расположена в точках, отмеченных крестиками (рис. 1), координаты y и z не показаны.

Эта картина соответствует «бранному» сценарию, в котором известные частицы локализованы на четырехмерной бране, а во внешних измерениях распространяется лишь гравитация. Для очень малых масштабов $r \ll R$ теорема Гаусса в пространстве n измерений

$$\int E\,da = S_n G_n M_{en}, \tag{1}$$

где E — напряженность гравитационного поля, S_n — площадь поверхности единичной сферы в пространстве n измерений, M_{en} — масса, заключенная в гауссовом объеме,

G_n — n-мерная ньютоновская константа. Для трех пространственных измерений имеем

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G_3 M.$$

Отсюда для силы получаем $F = mE$ — закон тяготения Ньютона.

Для большего числа внешних измерений площадь поверхности единичной сферы

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{2}$$

В этом случае гравитационная сила $F = G_n mM/r^{n-1}$, в частности, для одного дополнительного измерения, $F = G_4 mM/r^3$. Заметим, что размерности G_4 и G_3 (обычной ньютоновской константы) — различные.

На очень больших расстояниях $r \gg R$ распределение масс выглядит как непрерывное распределение, поэтому можно выбрать цилиндрическую гауссову поверхность. Пусть 4-мерный цилиндр имеет длину L, а основаниями такого цилиндра являются трехмерные сферы радиуса r. Масса, заключенная в цилиндре $M(L/R)$, $S_n = 2\pi^2$, левая часть (1) принимает вид $E \cdot 4\pi r^2 L$, и для силы имеем

$$F = G_4 mM \frac{2\pi^2}{4\pi} \frac{1}{r^2 R}, \tag{3}$$

т. е. на больших расстояниях $r \gg R$ получаем обычный закон $F \sim 1/r^2$. Сравнивая (3) с ньютоновским законом тяготения, находим связь G_4 с G_3. Для пространства n измерений:

$$G_3 = \frac{S_n}{4\pi} \frac{G_n}{V_{n-3}}, \tag{4}$$

где V_{n-3} — объем $(n-3)$-мерного компактифицированного пространства.

Итак, теорема Гаусса в n измерениях предсказывает для гравитационного поля зависимость $\sim 1/r^2$ на больших расстояниях и $\sim 1r^{n-1}$ на малых расстояниях. Этот результат не зависит от формы внешних измерений. Для того, чтобы говорить о форме внешних измерений, надо рассмотреть случай промежуточных расстояний.

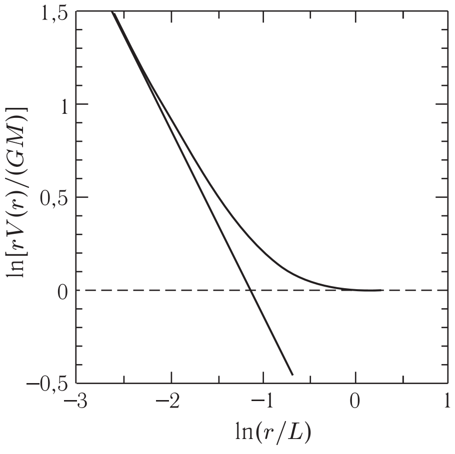


Рис. 2

Снова рассмотрим случай одного внешнего измерения. В пространстве 4-х пространственных измерений гравитационный потенциал на расстоянии D от точечной массы $V_r = -G_4 M/(2D^2)$, поэтому общий результат для потенциала на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ от массы M:

$$V(r) = -\frac{G_4 M}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^2 + n^2 R^2}.$$

В терминах ньютоновской константы G_3:

$$V(r) = -\frac{G_3 M}{\pi R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \Delta^2},$$

где $\Delta = r/R$. Для $\Delta \gg 1$ сумма $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 + \Delta^2} = \dfrac{\pi}{\Delta}$, и получается обычный гравитационный потенциал. На рис. 2 изображена зависимость $rV(r)$ от r. Как ожидалось,

потенциал ведет себя как $\sim 1/r$ для больших r и $\sim 1/r^2$ для малых r (прямая линия имеет наклон (-1)).

Поскольку случай одного внешнего измерения уже исключен, рассмотрим два внешних измерения.

При двух дополнительных измерениях топология компактифицированного пространства нетривиальна. Поскольку три измерения нашей Вселенной — плоские, будем предполагать, что два дополнительных измерения тоже плоские. Такая картина возникает в струнной теории. Рассматриваемое пространство — произведение двух циклов, известное как двумерный тор. Пусть длины окружностей этого тора — R_1 и R_2.

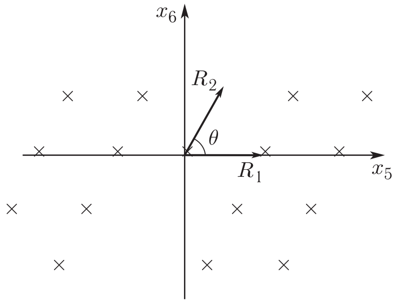


Рис. 3

Очевидно, что единичные вектора двух компактных измерений не обязательно ортогональны. Соответствующая пространственная структура изображена на рис. 3.

Параметры R_1, R_2 и θ будут определять форму дополнительных измерений.

Если единичные вектора ортогональны, то гравитационный потенциал

$$V(r) = -\frac{G_5 M}{3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r^2 + n^2 R_1^2 + m^2 R_2^2)^{3/2}},$$

где G_5 — ньютоновская константа в пяти пространственных измерениях.

На рис. 4 показана (в логарифмическом масштабе) зависимость $rV(r)$ от r для $R_1 = R_2$, $R_2 = 3R_1$ и $R_2 = 10R_1$.

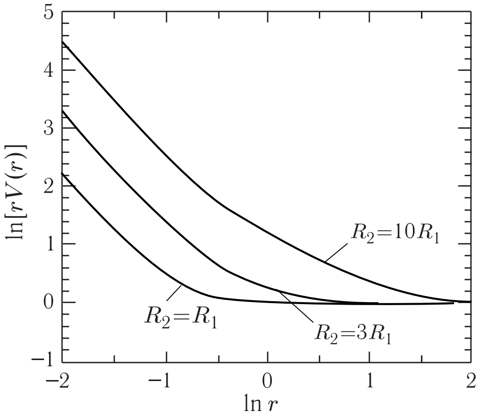


Рис. 4

При больших r возникает стандартное поведение потенциала $\sim 1/r$, на малых расстояниях $V(r) \sim 1/r^3$.

Очевидно, что необходимо исследование гравитации на малых расстояниях. Измерения на масштабе нанометров уже вполне экспериментально возможны. Было бы весьма важным обнаружить отклонения от закона $\sim 1/r^2$. Как видно из рис. 4, величина и характер поправок к этому закону позволяет сделать некоторые заключения о форме пространств дополнительных измерений.

ГЛАВА 5

НАРУШЕНИЕ ЭЛЕКТРОСЛАБОЙ СИММЕТРИИ В ТЕОРИЯХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

5.1. Введение

Теории с дополнительными измерениями стали особенно популярными за последние десять лет. Эти теории могли бы играть важную роль на ТэВ-ных масштабах энергий, а не на планковских масштабах. Теории с большими дополнительными измерениями способны объяснить различие между электрослабым и планковским масштабами как раз за счет большого размера дополнительных измерений, уменьшающего интенсивность гравитационного взаимодействия. В другом подходе к проблеме дополнительных измерений (модель Randall–Sundrum) геометрия пространства дополнительных измерений разрешает проблему иерархий, а также некоторые проблемы 4-мерной гравитации. В этой главе будут рассмотрены проблемы нарушения электрослабой симметрии в теориях с дополнительными измерениями.

5.2. Калибровочные теории на интервале в дополнительных измерениях

Сначала обсудим структуру калибровочной теории в одном дополнительном измерении. Для простоты будем считать, что теория не содержит нетривиального гравитационного фона, т. е. дополнительное измерение плоское. Конечно, при этом необходимо исследовать геометрию дополнительного измерения. Можно выделить три различных случая:

а) пространство дополнительного измерения, подобно $3+1$-мерному, бесконечно;

б) внешнее измерение соответствует полупрямой, т. е. бесконечно в одном направлении;

в) конечное дополнительное измерение — цикл или интервал.

Пока не будем рассматривать очень интересную возможность полубесконечного дополнительного измерения, применимую к локализованной гравитации. В большинстве своем изучаются теории с компактифицированным дополнительным измерением.

Как обычно, сначала следует определить классическую теорию в пространстве с дополнительным измерением. Когда пространство бесконечно, требуют, чтобы поля стремились к нулю при стремлении координаты к бесконечности:

$$\psi \to 0, \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Однако для конечного пространства нет необходимости требовать $\psi \to 0$ как граничное условие. Как же тогда выбрать граничные условия? Выше уже упоминались две возможности для конечных пространств дополнительных измерений:

а) цикл (интервал с отождествленными концами). В этом случае граничные условия для полей $\psi(2\pi R) = \psi(0)$.

б) Интервал (концы не отождествлены).

Начнем рассмотрение с действия для простейшего случая одного скалярного поля в одном дополнительном измерении.

5.2.1. Скалярное поле на интервале. Действие скалярного поля в объеме $(4+1)$ измерений запишем в виде

$$S = \int d^4x \int\limits_0^{\pi R} \Big(\frac{1}{2}\partial^M\phi\partial_M\phi - V(\phi)\Big)dy, \tag{2}$$

где предполагается, что интервал «простирается» от 0 до πR. Координаты $M = 0, 1, 2, 3, 5$; греческие индексы $\mu, \nu, \ldots$ будут обозначать координаты 4-мерного пространства $0, 1, 2, 3$. При этом сигнатура метрики

$$g_{MN} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1). \tag{3}$$

Применим к действию (2) вариационный принцип:

$$\delta S_{\text{об.}} = \int d^4x \int\limits_0^{\pi R} \Big(\partial^M\phi\partial_M\delta\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\Big)dy. \tag{4}$$

Разделяя 4-мерные и пятую координаты (интегрируя по частям), получим

$$\delta S_{\text{об.}} = \int d^4x \int\limits_0^{\pi R} dy\Big[-\partial_\mu\partial^\mu\phi\delta\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_y\phi\partial_y\delta\phi\Big]. \tag{5}$$

Поскольку мы еще не решили, какие граничные условия использовать, выделим граничное слагаемое при интегрировании по частям в пятой координате y:

$$\delta S_{\text{об.}} = \int d^4x \int\limits_0^{\pi R} \Big[-\partial_M\partial^M\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi}\Big]\delta\phi - \Big[\int d^4x\partial_y\phi\delta\phi\Big]_0^{\pi R}. \tag{6}$$

При использовании вариационного принципа следует считать $\delta S = 0$. Кроме того, в объеме должны удовлетворяться уравнения движения $\partial_M\phi\partial^M\phi = -\partial V/\partial\phi$, а изменение полей на границе обращается в ноль. Таким образом, выберем граничное условие

$$\partial_y\phi\,\delta\phi|_{\text{гран.}} = 0. \tag{7}$$

Будем называть такое граничное условие естественным, если оно допускает произвольную вариацию поля на границе $\delta\phi|_{\text{гран.}}$. Тогда естественное граничное условие $\partial_y\phi = 0$ — это плоское или неймановское граничное условие. Но это не единственная возможность: можно удовлетворить (7), полагая $\delta\phi|_{\text{гран.}} = 0$, это условие следует из $\phi|_{\text{гран.}} = 0$ — так называемого граничного условия Дирихле.

Таким образом, существуют две возможности для граничных условий в случае скалярного поля на интервале:

а) неймановское граничное условие $\partial_y\phi|_{\text{гран.}} = 0$;

б) условие Дирихле $\phi|_{\text{гран.}} = 0$.

В теории хотелось бы иметь естественные граничные условия, так как они не приводят к нарушению симметрии в случае более сложных, например, калибровочных, полей. Чтобы при этом сохранить граничные условия Дирихле, их следует интерпретировать как естественные граничные условия в теории с дополнительными слагаемыми в лагранжиане на границе. Простейший способ — добавить массовый член в лагранжиан, при этом действие

$$S = S_{\text{об.}} - \int d^4x \frac{1}{2} M_1^2 \phi^2 \Big|_{y=0} - \int d^4x \frac{1}{2} M_2^2 \phi^2 \Big|_{y=\pi R}. \tag{8}$$

Эта процедура дает дополнительный вклад в вариацию действия на границе:

$$\delta S_{\text{гран.}} = -\int \delta\phi(\partial\phi + M_2^2\phi)\big|_{y=\pi R} + \int d^4x\delta\phi(\partial_y\phi - M_1^2\phi)\big|_{y=0}. \tag{9}$$

Тогда естественные граничные условия

$$\begin{aligned} &\partial_y\phi + M_2^2\phi = 0, \quad \text{при } y = \pi R; \\ &\partial_y\phi - M_1^2\phi = 0, \quad \text{при } y = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что в пределе $M_i \to \infty$ получаются граничные условия Дирихле. Таким образом, условия Дирихле можно интерпретировать как случай бесконечно больших массовых членов, индуцированных на границах. Рассмотрим, что происходит при добавлении кинетического слагаемого на границе (которую будем называть браной). Для простоты пусть массовый параметр на бране равен нулю, т. е. выберем действие в виде:

$$S = S_{\text{об.}} + \int d^4x \frac{1}{2M} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \Big|_{y=0}. \tag{11}$$

Заметим, что слагаемое на границе следует выбрать с определенным знаком, т. е. предположим, что произвольный параметр M положительный. Положительный знак массового параметра позволяет избежать духовых состояний в теории. Для простоты мы добавили кинетический член на одной из бран, хотя можно добавить такой член и на второй бране. Граничные условия при $y = 0$ изменяются:

$$\delta S|_0 = \int d^4x\delta\phi(\partial_y\phi - \frac{1}{M}\Box_4\phi)\Big|_{y=0}, \tag{12}$$

т. е. естественные граничные условия задаются выражением

$$\partial_y\phi = \frac{1}{M}\Box_4\phi. \tag{13}$$

Используя уравнения движения в объеме (в отсутствие объемного потенциала) $\Box_5\phi = \Box_4\phi - \phi'' = 0$, можно записать граничные условия в виде $\phi' = (1/M)\phi''$. Эти граничные условия используются в разложении Калуцы–Клейна (КК) поля ϕ, где предполагается, что 4-мерные моды ϕ_n имеют x зависимость типа $\phi_n(y)e^{ip_n x}$, где $p_n^2 = m_n^2$ — n-е массовое состояние КК. С этим граничным условием имеем

$$\partial_y\phi = \frac{1}{M}\Box_4\phi = -\frac{p_n^2}{M}\phi = -\frac{m_n^2}{M}\phi. \tag{14}$$

Это граничное условие — весьма специфическое: оно зависит от собственного массового значения и включает вторые производные. Такое граничное условие может быть «опасным». Действительно, из теории дифференциальных уравнений известно, что граничные условия с первыми производными автоматически приводят к эрмитовому

дифференциальному оператору на интервале. Оператор второй производной d^2/dy^2 эрмитов, если скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^{\pi R} f^*(y) g(y)\, dy \tag{15}$$

удовлетворяет соотношению

$$\left(f, \frac{d^2}{dy^2} g\right) = \left(\frac{d^2}{dy^2} f, g\right). \tag{16}$$

Эти два члена при интегрировании по частям преобразуются друг в друга (с точностью до граничных слагаемых):

$$\left(f, \frac{d^2}{dy^2} g\right) = \int_0^{\pi R} f^*(y) \frac{d^2}{dy^2} g(y)\, dy = -\int_0^{\pi R} f^{*\prime}(y) g'(y) dy + \left[f^*(y) g'(y)\right]_0^{\pi R} =$$

$$= \int_0^{\pi R} f^{*\prime\prime}(y) g(y) dy + \left[f^*(y) g'(y)\right]_0^{\pi R} - \left[f^{*\prime}(y) g(y)\right]_0^{\pi R}. \tag{17}$$

Таким образом, если граничное условие для функций, на которых определено скалярное произведение, имеет вид

$$f'|_{0,\pi R} = \alpha f|_{0,\pi R}, \tag{18}$$

то два граничных слагаемых сокращают друг друга, оператор d^2/dy^2 оказывается эрмитовым, и желаемые свойства (полнота, вещественность собственных значений) автоматически выполняются.

Но граничное условие $f'' = (1/M) f'$ — не из этой категории, поэтому оператор второй производной не является эрмитовым.

Можно, однако, выбрать другое определение скалярного произведения, для которого вышеупомянутое граничное условие, тем не менее, будет приводить к эрмитовости оператора второй производной.

В самом деле, пусть f и g — две собственных функции оператора второй производной: $f'' = \lambda_f f$ и $g'' = \lambda_g g$.

Тогда

$$\int_0^{\pi R} f^* g'' dy = \lambda_g \int_0^{\pi R} f^*(y) g(y)\, dy = \int_0^{\pi R} f^{*\prime\prime}(y) g(y)\, dy + f^* g|_0 - g' f^*|_0. \tag{19}$$

Используя граничное условие $f'' = M f' = \lambda_f f$ и поэтому $f' = \lambda_f / M f$, получаем

$$(\lambda_f - \lambda_g)\left(\int_0^{\pi R} f(y) g(y) dy + \frac{1}{M} f g\Big|_0\right) = 0. \tag{20}$$

Таким образом, найдена ортогональная комбинация, которую следует назвать скалярным произведением в пространстве нетривиального граничного кинетического члена.

Скалярное произведение в этом случае следует определить следующим образом:

$$(f, g) = \int_0^{\pi R} f(y) g(y) dy + \frac{1}{M} f g\Big|_0. \tag{21}$$

Это определение удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения, но при этом оператор второй производной будет эрмитовым. В самом деле,

$$(f,g'') = \int_0^{\pi R} fg''dy + \frac{1}{M}fg''\Big|_0 = -\int_0^{\pi R} f'g'dy - fg'|_0 + \frac{1}{M}fg\Big|_0 =$$

$$= \int f''gdy + f'g\Big|_0 - fg'|_0 + \frac{1}{M}fg''\Big|_0. \quad (22)$$

Из-за граничного условия $g'' = Mg'$ последние два члена сокращают друг друга, и выражение в целом оказывается равным (f'', g).

Мы показали, что в теории нет проблемы, связанной с добавлением кинетических слагаемых на бране.

5.2.2. Фиксирование калибровки и граничные условия. Теперь приступим к изучению калибровочной теории в одном дополнительном измерении. Калибровочное поле в 5-ти измерениях A_μ содержит 4-мерное калибровочное поле A_μ и 4-мерный скаляр A_5. При этом 4-мерный вектор содержит «башню» КК массивных калибровочных бозонов, но, как мы увидим ниже, КК-башня поля A_5 будет «поглощена» массивными калибровочными полями. Этот процесс оказывается возможным потому, что лагранжиан содержит слагаемое, смешивающее калибровочные и скалярные поля, напоминая механизм Хиггса.

Лагранжиан зададим в привычном виде, а действие

$$S = \int d^5x\Big(-\frac{1}{4}F^a_{MN}F^{MNa}\Big) = \int d^5x\Big(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2}F^a_{\mu 5}F^{\mu 5a}\Big), \quad (23)$$

где $F^a_{MN} = \partial_M A^a_N - \partial_N A^a_M + g_5 f^{abc}A^b_M A^c_N$; g_5 — 5-мерная калибровочная константа связи, имеющая размерность $(\text{масса})^{-1/2}$, поэтому теория неперенормируемая. Ее следует рассматривать как эффективную низкоэнергетическую теорию, справедливую ниже некоторого масштаба обрезания, его мы собираемся определить позже. Для определения члена, фиксирующего калибровку, рассмотрим слагаемое, смешивающее скалярное и калибровочные поля:

$$\int d^4x \int_0^{\pi R} dy - \frac{1}{2}F^a_{\mu 5}F^{\mu 5a}\Big|_{\text{квадратич.}} = \int d^4x \int_0^{\pi R} dy - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_5 - \partial_5 A^a_\mu)(\partial^\mu A^{5a} - \partial^5 A^{\mu a}) =$$

$$= \int d^4x \int_0^{\pi R} dy - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_5 \partial^\mu A^{5a} + \partial^5 A^a_\mu \partial^5 A^{\mu a} - 2\partial_5 A^a_\mu \partial^\mu A^{5a}). \quad (24)$$

Итак, смешивающий член, который необходимо сократить, имеет вид

$$\int_0^{\pi R} dy\, \partial_5 A^a_\mu \partial^\mu A^{5a}. \quad (25)$$

Интегрируя по частям, находим

$$-\int_0^{\pi R} dy \partial^\mu A^a_\mu \partial_5 A^a_5 + [\partial_\mu A^{\mu a} A^a_5]\Big|_0^{\pi R}. \quad (26)$$

Объемное слагаемое может быть сокращено путем добавления слагаемого, фиксирующего калибровку

$$S_{GF}=\int d^4x\int\limits_0^{\pi R}dy-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a}-\xi\partial_5 A_5^a)^2. \tag{27}$$

Это слагаемое выбрано так, чтобы не зависящий от A_5 член соответствовал лоренцевскому члену, фиксирующему калибровку, и при этом сокращался со смешанным слагаемым в (26).

Варьируя полное действие, получаем объемное уравнение движения. После интегрирования по частям:

$$\delta S_{\text{объем.}}=\int d^4x\int\limits_0^{\pi R}dy\Big[(\partial_M F^{M\nu a}-g_5 f^{abc}F^{M\nu b}A_M^c+\frac{1}{\xi}\partial^\nu\partial^\sigma A_\sigma^a-\partial^\nu\partial_5 A_5^a)\delta A_\nu^a+$$
$$+(\partial^\sigma F_{\sigma 5}^a-g_5 f^{abc}F_{\sigma 5}^b A^{c\sigma}\partial_5\partial_6 A^{a\sigma}-\xi\partial_5^2 A_5^a)\delta A_5^a\Big]. \tag{28}$$

Объемные уравнения движения получаются тогда, когда коэффициенты при δA_ν^a и δA_5^a обращаются в ноль. Как видно из соотношения (28), поле A_5^a имеет слагаемое $\xi\partial_5^2 A_5^a$ в его уравнении движения. Это означает, что если волновая функция не является плоской (т. е. КК-мода не безмассовая), то это поле — нефизическое (так как в унитарной калибровке $\xi\to\infty$ это поле имеет бесконечную эффективную 4-мерную массу). Поэтому скалярная КК-башня A_5^a будет, вследствие 5-мерного механизма Хиггса, полностью нефизической (за исключением, возможно, нулевой моды A_5^a). Существование или отсутствие нулевой моды зависит от граничных условий на поле A_5. Ниже мы увидим, как интерпретируется нулевая мода A_5.

Для исключения граничного смешивающего слагаемого в (26) нужно добавить член, фиксирующий калибровку на границе, который a priori не связан с граничным коэффициентом, фиксирующим калибровку $\xi_{\text{гранич.}}$:

$$-\frac{1}{2\xi_{\text{гранич.}}}\int d^4x(\partial_\mu A^{\mu a}\pm\xi_{\text{гранич.}}A_5^a)^2\Big|_{0,\pi R}, \tag{29}$$

где знак $(-)$ соответствует $y=0$, а знак $(+)$ — $y=\pi R$.

Вариации границ задаются следующим образом:

$$\left(\partial_5 A^{\mu a}+\frac{1}{\xi_{\text{гранич.}}}\partial_\nu\partial^\mu A^{\nu a}\right)\delta A_\mu^a\Big|_{0,\pi R}+(\xi\partial_5 A_5^a\pm\xi_{\text{гранич.}}A_5^a)\delta A_5^a\big|_{0,\pi R}. \tag{30}$$

Естественные граничные условия в произвольной калибровке ξ, $\xi_{\text{гранич.}}$:

$$\begin{gathered}\partial_5 A^{\mu a}+\frac{1}{\xi_{\text{гранич.}}}\partial_\mu\partial^\mu A^{\mu a}=0;\\ \xi\partial_5 A_5^a\pm\xi_{\text{гранич.}}A_5^a=0.\end{gathered} \tag{31}$$

Эти выражения значительно упрощаются, если перейти к унитарной калибровке на границе: $\xi_{\text{гранич.}}\to\infty$. В этом случае остаются два простых граничных условия:

$$\partial_5 A^{\mu a}=0,\quad A_5^a=0. \tag{32}$$

Именно эти граничные условия используются для калибровочных полей в отсутствии граничных слагаемых.

5.2.3. Калибровочные теории с граничными скалярами. Теперь рассмотрим случай, когда скалярное поле, имеющее ненулевое вакуумное среднее, локализовано на границе. Для простоты будем обсуждать $U(1)$-теорию, хотя рассуждения можно обобщить на более сложные группы. Локализованный лагранжиан для двух скалярных полей ϕ_i имеет ту же форму, как и для хиггсовского поля в 4-х измерениях; индексы $i = 1, 2$ относятся к двум границам:

$$L_i = |D_\mu \phi_i|^2 - \lambda_i \Big(|\phi_i|^2 - \frac{1}{2} v_i^2 \Big)^2. \tag{33}$$

Слагаемые на границе будут индуцировать ненулевые вакуумные средние, поэтому будем параметризовать хиггсовское поле как физический хиггс и голдстоуновский бозон (пион):

$$\phi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_i + h_i) e^{i\pi_i / v_i}. \tag{34}$$

Разлагая действие до квадратичных по полям слагаемым, получим для лагранжиана

$$\begin{aligned} L_{4D} = \int\limits_0^{\pi R} dy \Big(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_5)^2 - \partial_\mu A_5 \partial_5 A^\mu \Big) + \\ + \Big[\frac{1}{2} (\partial_\mu h_1)^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 v_1^2 h_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_1 - v_1 A_\mu)^2 \Big]_{y=0} + \\ + \Big[\frac{1}{2} (\partial_\mu h_2)^2 - \frac{1}{2} \lambda_2 v_2^2 h_2^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_2 - v_2 A_\mu)^2 \Big]_{y=\pi R}. \end{aligned} \tag{35}$$

Повторяя процедуру предыдущего подраздела и интегрируя по частям, найдем, что для исключения всех смешивающих A_5 и π_i слагаемых необходимы следующие фиксирующие в объеме и на границе калибровки:

$$\begin{aligned} L_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \int\limits_0^{\pi R} dy (\partial_\mu A^\mu - \partial_5 A^5)^2 - \Big[\frac{1}{2\xi_1} \big(\partial_\mu A^\mu + \xi_1 (v_1 \pi_1 - A_5)^2 \big) \Big]_{y=0} \\ - \Big[\frac{1}{2\xi_2} \big(\partial_\mu A^\mu + \xi_2 (v_2 \pi_2 + A_5)^2 \big) \Big]_{y=\pi R}. \end{aligned} \tag{36}$$

В такой калибровке калибровочное поле отщепляется от других полей, и действие в объеме определяется выражением

$$\int d^5 x \frac{1}{2} A_\mu \Big[(\partial^2 - \partial_y^2) \eta^{\mu\nu} - \Big(1 - \frac{1}{\xi} \Big) \partial^\mu \partial^\nu \Big] A_\nu. \tag{37}$$

Получим разложение Калуцы–Клейна, записывая поле в виде

$$A_\mu(x, y) = \varepsilon_\mu(p) e^{ipx} f(y), \tag{38}$$

где $\varepsilon_\mu(p)$ — вектор поляризации, а $f(y)$ — волновая функция. Для заданной моды предполагается, что $p^2 = m_n^2$. Уравнение движения, которому удовлетворяет волновая функция, имеет вид

$$(\partial_y^2 + m_n^2) f_n(y) = 0. \tag{39}$$

Этому уравнению удовлетворяют линейные комбинации синусов и косинусов. Естественное граничное условие в этом случае выглядит следующим образом:

$$\partial_y A_\mu \mp v_{1,2}^2 A_\mu = 0. \tag{40}$$

Таким образом, введение скалярного поля на границе модифицирует граничные условия. В пределе $v_i \to \infty$ для калибровочного поля получаются граничные условия Дирихле. При этом поля h_i, π_i отщепляются от калибровочного поля, поскольку их значения отличны от нуля только тогда, когда калибровочное поле обращается в ноль. Поэтому они необходимы для придания массы калибровочному полю. Как мы увидим ниже, даже в пределе $v_i \to \infty$ масса калибровочного поля не расходится, а задается радиусом дополнительного измерения.

Наконец, рассмотрим, что происходит со скалярными полями и их граничными условиями. Физическое хиггсовское поле h_i не смешивается с другими полями, поэтому это поле имеет собственное уравнение движения на бранах. Так как его масса определяется параметром λ_i, который не появляется больше нигде в теории, можно сделать этот скаляр произвольно тяжелым и не влияющим на другие поля.

Возвращаясь к полям A_5 и π_i, запишем объемное уравнение движения

$$\partial_y^2 A_5 + \frac{m^2}{\xi} A_5 = 0. \tag{41}$$

Здесь m^2 — квадрат массы скалярного состояния, «живущего» в комбинации A_5 и π_i. Граничные уравнения движения для полей π_i будут задаваться соотношением между этими полями и граничными значениями поля A_5:

$$\begin{gathered} \left(\frac{m^2}{\xi_1} - v_1^2\right)\pi_1 + v_1 A_5|_{y=0} = 0, \\ \left(\frac{m^2}{\xi_2} - v_2^2\right)\pi_2 + v_2 A_5|_{y=\pi R} = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Наконец, требуя зануления на границе вариации любого поля, получаем граничные условия для поля A_5:

$$\begin{gathered} \left.\partial_y A_5 - \frac{\xi_1}{\xi}\frac{m^2/\xi_1}{m^2/\xi_1 - v_1^2} A_5\right|_{y=0} = 0, \\ \left.\partial_y A_5 + \frac{\xi_2}{\xi}\frac{m^2/\xi_2}{m^2/\xi_2 - v_2^2} A_5\right|_{y=\pi R} = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Как видно из этих выражений, когда одно из вакуумных средних отлично от нуля, в унитарной калибровке $\xi \to \infty$ граничное условие для поля A_5 становится неймановским: $\partial_y A_5 = 0$.

В унитарной калибровке все массивные моды оказываются нефизическими, так как они обеспечивают существование продольных компонент массивных КК-башен калибровочных полей. Однако в этом случае возможно существование физических нулевых мод скалярных полей. Без граничных скаляров для поля A_5 граничные условия будут Дирихле-типа, и нетривиальная нулевая мода может существовать. Это означает, что имеется достаточно много мод поля A_5, которые обеспечивают в калибровочном секторе продольные моды для каждого массивного КК-состояния. Если же добавляются дополнительные скаляры на границе, некоторая комбинация полей A_5 и π_i может оказаться «непоглощенной».

5.2.4. Орбифолд или интервал? Наиболее часто используемый способ введения граничных условий в теориях с дополнительными измерениями — так называемое разбиение на орбифолды. Под разбиением на орбифолды будем понимать набор отождествлений на геометрическом многообразии, ограничивающих фундаментальную область, на которой определена теория.

В случае одного дополнительного измерения процесс создания орбифолдов можно описать следующим образом. Начнем с бесконечного дополнительного измерения — бесконечной линии R, параметризованной переменной $-\infty < y < \infty$. Из линии можно получить цикл S^1, если произвести идентификацию точек $y \to y + 2\pi R$. Эту же процедуру можно рассматривать и как модулирование бесконечной линии трансляцией τ: $R \to S^1 = R/\tau$.

Другая дискретная симметрия, которую можно было бы использовать для модулирования линии — отражение Z_2, переводящее $y \to -y$. Очевидно, при таком отражении линия отображается на полулинию $R^1 \to R^1/Z_2$. Если применить оба дискретных отражения одновременно, получим орбифолд S^1/Z_2. Этот орбифолд есть не что иное, как линейный сегмент между 0 и πR.

Рассмотрим теперь, как поля $\phi(y)$, которые определены сначала на бесконечной линии R, будут вести себя при таких преобразованиях и каким типам граничных условий будут удовлетворять. Поля в идентифицированных точках должны быть одинаковыми. Это так, но имеется исключение, связанное с симметрией (глобальной или локальной) лагранжиана. В этом случае поля в идентифицированных точках не должны точно совпадать. Они совпадают с точностью до преобразований симметрии.

Таким образом, при трансляции и отражении поля ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau(2\pi R)\phi(y) &= T^{-1}\phi(y + 2\pi R); \\ Z\phi(y) &= Z\phi(-y), \end{aligned} \tag{44}$$

где T и Z — матрицы в пространстве полей, соответствующие преобразованиям симметрии действия. Это означает, что мы осуществляем идентификацию полей

$$\begin{aligned} \phi(y + 2\pi R) &= T\phi(y); \\ \phi(-y) &= Z\phi(y). \end{aligned} \tag{45}$$

Заметим, что матрицы Z и T — не полностью произвольны, они удовлетворяют условию согласованности. Это условие легко найти, если выбрать произвольную точку y между 0 и $2\pi R$, применить к ней операцию отражения относительно точки 0, а затем совершить трансляцию на $2\pi R$. При этом точка y перейдет в $2\pi R - y$. Однако, есть и другой способ, связывающий две точки при трансляциях и отражениях: сначала транслировать y назад на $2\pi R$, т. е. $y \to y - 2\pi R$, а затем отразить относительно $y = 0$. Тогда снова придем к точке $2\pi R - y$.

Таким образом, трансляция и отражение удовлетворяют соотношению

$$\tau(2\pi R)Z(0) = Z(0)\tau^{-1}(2\pi R). \tag{46}$$

Применяя это соотношение к полям ϕ, получаем искомые условия согласования:

$$TZ = ZT^{-1}. \tag{47}$$

Как мы видели, отражение Z есть Z_2-симметрия, т. е. $Z^2 = 1$. Очевидно, что для трансляции $T^2 \neq 1$. Однако, для нетривиальных трансляций, $T \neq 1$ (T иногда называют твистом Шерка–Шварца) всегда можно ввести комбинацию преобразований T и Z, которые действуют совместно подобно Z_2-отражению. Преобразование $\tau(2\pi R)Z(0)$ переводит любую точку y в точку $2\pi R - y$. Это означает, что на самом деле происходит отражение относительно точки πR. Действительно, если $y = \pi R - x$, то объединенное преобразование переводит эту точку в точку $\pi R + x$, т. е. $x \to -x$. А это преобразование есть не что иное, как Z_2-отражение.

Используя условие (47), обнаруживаем, что объединенное преобразование $Z' = TZ$

$$Z'^2 = (TZ)^2 = (TZ)(ZT^{-1}) = 1, \tag{48}$$

т. е. действует на поля как преобразование Z_2-симметрии.

Итак, описание орбифолда S^1/Z_2 с нетривиальными твистами Шерка–Шварца задается с помощью двух нетривиальных Z_2-отражений Z и Z', одно из которых действует около $y = 0$, а другое — около $y = \pi R$. Эти два отражения не обязательно коммутируют друг с другом.

Для орбифолда S^1/Z_2 поле «живет» на интервале $0 < y < \pi R$, имеет положительные или отрицательные четности относительно двух Z_2-симметрий, т. е. удовлетворяет Дирихле или неймановским условиям на двух границах:

$$\phi|_{0,\pi R} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_y \phi|_{0,\pi R} = 0. \tag{49}$$

Предположим, что Z_2 — подгруппы группы симметрии теории. При нарушении калибровочной симметрии они должны быть подгруппами калибровочных симметрий.

Так как подгруппа Z_2 — абелева, она является подгруппой картановской алгебры. Это означает, что симметрия, с которой коммутирует операция разбиения на орбифолды, не имеет ранга ниже, чем калибровочная группа.

Казалось бы, интервальный метод приводит к более общим граничным условиям, чем подход, основанный на орбифолдах. На самом деле, оба подхода эквивалентны. Интервальный подход более удобен в случае усложненных граничных условий.

5.3. Электрослабое нарушение симметрии без хиггса

Выше мы обсудили граничные условия для калибровочной теории в одном дополнительном измерении. Теперь хотелось бы использовать эти знания для построения моделей нарушения электрослабой симметрии, в которых нарушение симметрии было бы связано с граничными условиями, а не с существованием физического скалярного бозона Хиггса.

Прежде всего, покажем, как присутствие дополнительных измерений влияет на масштаб нарушения унитарности в теории с массивными калибровочными бозонами (и без Хиггс-бозона). Затем будет построена простейшая модель с плоским дополнительным измерением, в которой нет скалярного хиггса, но содержатся массивные W- и Z-бозоны. В этой модели отношение масс W/Z отличается от значений стандартной модели, и это связано с отсутствием custodial $SU(2)$-симметрии (см. главу 4 часть I). Наконец, с помощью AdS/CFT соответствия будет построена модель дополнительных измерений, включающая custodial $SU(2)$-симметрию.

5.3.1. Высокоэнергетическое поведение амплитуд рассеяния. Итак, наша цель — построить безхиггсовскую модель электрослабого нарушения симметрии, используя граничные условия в пространстве с дополнительными измерениями.

Как хорошо известно, амплитуда рассеяния продольных калибровочных бозонов в теориях без хиггсовских скаляров растет с энергией и, при сравнительно малых энергиях, нарушает унитарный предел. Что происходит с унитарным пределом в теориях с дополнительными измерениями? Для простоты рассмотрим упругое рассеяние продольных мод n-й КК-моды (рис. 1).

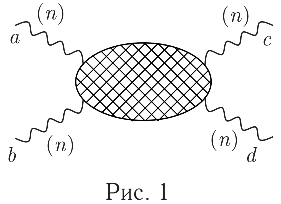


Рис. 1

Кинематика этого процесса определяется векторами продольной поляризации входящих и выходящих импульсов:

$$\varepsilon_\mu = \left(\frac{|\vec p|}{M}, \frac{E}{M}, \frac{\vec p}{|\vec p|}\right);$$
$$p_\mu^{in} = \left(E, 0, 0, \pm\sqrt{E^2 - M_n^2}\right); \tag{50}$$
$$p_\mu^{out} = \left(E, \pm\sqrt{E^2 - M_n^2}\sin\theta, 0, \pm\sqrt{E^2 - M_n^2}\cos\theta\right).$$

Диаграммы, которые дают вклад в амплитуду рассеяния в теории с массивными калибровочными бозонами (но без скалярного хиггса!) показаны на (рис. 2)

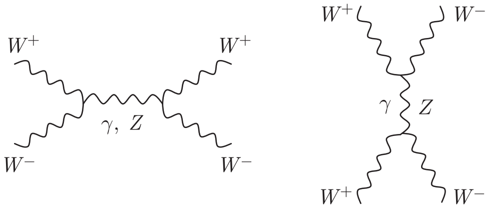


Рис. 2

Зависимость от энергии E этих диаграмм можно оценить, зная, что $\varepsilon \sim E$, $p_\mu \sim E$ и пропагатор $(\gamma, Z) \sim E^{-2}$. Тогда амплитуда растет $\sim E^4$, и для $E \gg M_W$ ее можно представить в виде разложения по убывающим степеням E:

$$A = A^{(4)}\frac{E^4}{M_n^4} + A^{(2)}\frac{E^2}{M_n^2} + A^{(0)} + O\left(\frac{M_n^2}{E^2}\right). \tag{51}$$

В стандартной модели (как и во всякой другой теории, в которой калибровочный кинетический член $\sim F_{\mu\nu}^2$) слагаемое с $A^{(4)}$ обращается в ноль, а слагаемое $A^{(2)}$ сокращается, если учесть диаграмму с обменом хиггсом.

В теории с дополнительными измерениями и граничными условиями, нарушающими калибровочную симметрию, нет диаграммы с обменом хиггсом, но есть сумма по всем КК-модам (рис. 3).

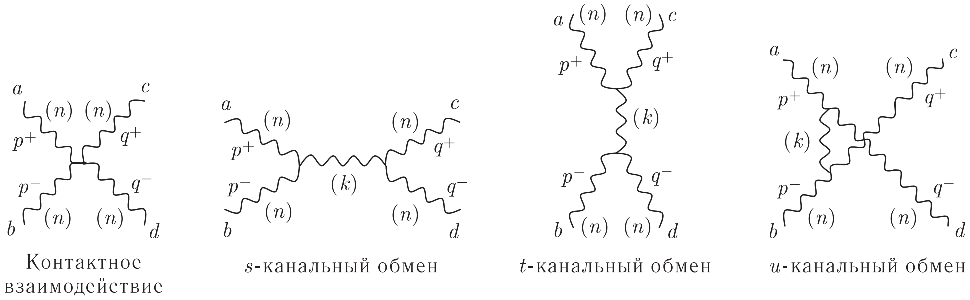


Рис. 3

В результате получаем следующее выражение для слагаемых в амплитуде рассеяния, растущих с энергией:

$$A^{(4)} = i\left(g_{nnnn}^2 - \sum_k g_{nnk}^2\right)\left(f^{abc}f^{cde}(3 + 6\cos\theta - \cos^2\theta) + 2(3 - \cos^2\theta)f^{ace}f^{bde}\right). \tag{52}$$

Чтобы величина $A^{(4)}$ обращалась в ноль, нужно потребовать выполнения следующего правила сумм для констант связи различных КК-мод:

$$g_{nnnn}^2 = \sum_k g_{nnk}^2. \tag{53}$$

Предполагая $A^{(4)} = 0$, для величины $A^{(2)}$ получаем

$$A^{(2)} = \frac{i}{M_n^2}\left(4g_{nnnn}M_n^2 - 3\sum_k g_{nnk}^2 M_k^2\right)\left(f^{ace}f^{bde} - \sin^2\frac{\theta}{2}f^{abc}f^{cde}\right). \tag{54}$$

Здесь g_{nnnn}^2 — четверная константа взаимодействия n-ого массивного калибровочного поля, g_{nnk} — кубическая константа взаимодействия КК-мод. В теориях с дополнительными измерениями эти константы связаны с волновыми функциями различных мод:

$$\begin{aligned} g_{mnk} &= g_5\int dy f_m(y)f_n(y)f_k(y); \\ g_{mnkl}^2 &= g_5^2\int dy f_m(y)f_n(y)f_k(y)f_l(y). \end{aligned} \tag{55}$$

Важная особенность амплитуд (52)–(54) состоит в том, что они зависят от общего кинематического фактора, помноженного на некоторое выражение, являющееся функцией констант связи.

Имея в виду соотношение (53), найдем правило сумм, предполагающее обращение в ноль слагаемого с $A^{(2)}$:

$$g_{nnnn}M_n^2 = \frac{3}{4}\sum_k g_{nnk}^2 M_k^2. \tag{56}$$

Удивительно, но многомерная калибровочная инвариантность подразумевает (в случае спонтанного нарушения калибровочной симметрии) выполнения обоих условий ((53) и (56)). Например, первое правило сумм следует из условия полноты волновых функций $f_n(y)$:

$$\int_0^{\pi R} dy f_n^4(y) = \sum_k \int_0^{\pi R} dy \int_0^{\pi R} dz f_n^2(y)f_n^2(z)f_k(y)f_k(z) \tag{57}$$

и условия

$$\sum_k f_k(y)f_k(z) = \delta(y-z). \tag{58}$$

Аналогично можно показать, что второе правило сумм выполняется, если использованы естественные граничные условия, и все члены в лагранжиане (в том числе и на границе) калибровочно-инвариантны.

Приведенный выше анализ показывает, что в любой калибровочно-инвариантной теории с дополнительным измерением растущие слагаемые в амплитуде рассеяния сокращаются. Однако это не означает автоматически, что теория унитарна. В самом деле, $A^{(4)}$ и $A^{(2)}$ могут обращаться в ноль, а $A^{(0)}$ — нарушать унитарность. Именно это происходит в стандартной модели при очень больших массах Хиггс-бозона. В случае дополнительных измерений КК-моды приводят к пологовому поведению амплитуды рассеяния. Если КК-моды слишком тяжелые, то это выполаживание будет происходить «слишком поздно», когда амплитуда уже нарушает условие унитарности. В теории с дополнительными измерениями имеется бесконечно много КК-мод,

поэтому не следует «беспокоиться» не только по поводу упругого канала, но и по поводу неупругих конечных состояний.

Оказывается, что в результате амплитуда растет линейно с энергией и на некотором масштабе нарушает условие унитарности. Это следствие неперенормируемости многомерной калибровочной теории. Масштаб нарушения унитарности равен параметру обрезания, полученному в 5-мерной теории на основе наивного размерного анализа. Этот масштаб обрезания можно оценить следующим образом. Однопетлевая амплитуда в 5-мерном пространстве пропорциональна фактору

$$\frac{g_5^2}{24\pi^3}. \tag{59}$$

Безразмерная величина, получающаяся из этого петлевого фактора

$$\frac{g_5^2 E}{24\pi^3}, \tag{60}$$

где E — энергия рассеяния. Параметр обрезания возникает тогда, когда петлевой фактор становится порядка единицы (т. е. на масштабе, при котором петлевые и древесные вклады сравнимы). Отсюда получаем

$$\Lambda_{\text{PA}} = \frac{24\pi^3}{g_5^2}. \tag{61}$$

Параметр Λ_{PA} можно представить иначе, используя связь между 5- и 4-мерными калибровочными константами:

$$g_5^2 = \pi R g_4^2. \tag{62}$$

Поэтому окончательное выражение для параметра обрезания

$$\Lambda_{\text{PA}} = \frac{24\pi^2}{g_4^2 R}. \tag{63}$$

Как будет видно ниже, для моделей без хиггса $1/R$ заменяется отношением M_W^2/M_{KK}, где M_W — масса W и M_{KK} — масса первой КК-моды. Поэтому масштаб обрезания понижается, если масса КК-моды, необходимой для унитаризации, растет.

5.3.2. Наивная безхиггсовская модель. Теперь, после того как мы убедились, что использование КК калибровочных бозонов позволяет «отодвинуть» масштаб нарушения унитарности практически до масштаба обрезания многомерной калибровочной теории, попытаемся построить модель, которая бы напоминала стандартную модель. В ней должен быть безмассовый фотон, массивные заряженные калибровочные бозоны W и тяжелый нейтральный калибровочный бозон Z. Более того, мы хотели бы получить правильное (на древесном уровне) отношение масс стандартной модели:

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2} = \cos^2\theta_W = \frac{g^2}{g^2 + g'^2}, \tag{64}$$

где g — $SU(2)_L$ калибровочная константа, g' — $U(1)_Y$ калибровочная константа стандартной модели. Хотелось бы, конечно, для этих целей использовать граничные условия. На первый взгляд, это кажется очень трудным, поскольку надо найти теорию, в которой массы КК-мод связаны с калибровочными константами. Обычно КК-массы кратны целому или полуцелому значению $1/R$. Например, если рассматривается «очень наивная» модель с $SU(2)$ калибровочной группой в объеме, то следует учесть

следующие граничные условия для различных калибровочных направлений:

$$\begin{aligned} \partial_y A^3_\mu &= 0, \quad \text{при } y = 0, \pi R; \\ \partial_y A^{1,2}_\mu &= 0, \quad \text{при } y = 0; \\ A^{1,2}_\mu &= 0, \quad \text{при } y = \pi R. \end{aligned} \tag{65}$$

С этими граничными условиями волновые функции для различных калибровочных полей в направлении A^3:

$$f_3^{(n)}(y) = \cos\frac{ny}{R}, \tag{66}$$

а для 1, 2 направлений

$$f_{1,2}^{(m)}(y) = \cos\frac{(2m+1)y}{2R}. \tag{67}$$

Тогда спектр масс

$$\begin{aligned} A^3 &\to m_n = \frac{n}{R}, 0, \frac{1}{R}, \frac{2}{R}, \ldots ; \\ A^{1,2} &\to m_n = \frac{m+1/2}{R}, \frac{1}{2R}, \frac{3}{2R}, \ldots \end{aligned} \tag{68}$$

Этот спектр несколько напоминает спектр стандартной модели: есть безмассовый калибровочный бозон, который можно идентифицировать с γ, а также заряженные $W^\pm$ и нейтральный бозон Z. Однако, как видно из (68), отношение масс W- и Z-бозонов:

$$\frac{M_Z}{M_W} = 2. \tag{69}$$

Другая проблема — первые КК-моды W и Z имеют соотношение масс

$$\frac{M'_Z}{M_Z} = 2, \qquad \frac{M'_W}{M_W} = 3. \tag{70}$$

Таким образом, помимо неправильного соотношения масс W- и Z-бозонов, теория предсказывает дополнительные КК-состояния с массами порядка 250 ГэВ, что выглядит феноменологически неприемлемым. Как мы увидим, обе эти проблемы решаются в теориях с «искаженными» безхиггсовскими моделями с custodial $SU(2)$-симметрией.

5.3.3. Custodial $SU(2)$-симметрия и плоское пространство безхиггсовской модели. Как добиться реалистической безхиггсовской модели с правильным соотношением масс W- и Z-бозонов на древесном уровне? Выясним, почему на древесном уровне в стандартной модели отношение

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1. \tag{71}$$

Электрослабая симметрия в стандартной модели нарушается хиггсовским скаляром H, преобразующимся как $2_{1/2}$ относительно $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Хиггсовский потенциал

$$V(H) = -\mu^2 H^+ H + \lambda(H^+ H)^2. \tag{72}$$

Этот потенциал является функцией только H^+H, причем

$$H^+ H = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2, \tag{73}$$

где хиггсовский дублет записан в терминах вещественных и мнимых компонент

$$H = \begin{pmatrix} h_1 + ih_2 \\ h_3 + ih_4 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Из (73) видно, что хиггсовский потенциал в действительности имеет большую глобальную симметрию, чем $SU(2)_L \times U(1)_Y$: он инвариантен относительно $SO(4)$-вращений 4-х независимых компонент вещественных полей хиггсовского дублета. Группа $SO(4)$ не является простой группой, она эквивалентна $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Источник $SU(2)_R$-симметрии можно понять следующим образом. Дублет $SU(2)$ — это псевдовещественное представление: комплексно-сопряженный дублет эквивалентен самому дублету. Проявление этого свойства можно обнаружить так: если выбрать поля в $SU(2)$-дублете с нижним индексом, то комплексно-сопряженным будет поле с верхним индексом. Однако с помощью $SU(2)$-тензора ε_{ij} можно индекс понизить, поэтому H_i и $i\varepsilon_{ij}(H^*)^j$ преобразуются одинаково. Это означает, что помимо $SU(2)_L$, действующей на обычные $SU(2)$-индексы, имеется и другая $SU(2)$-симметрия, смешивающая H с εH^*. Чтобы это представить более наглядно, запишем матрицу 2×2 в виде

$$\begin{pmatrix} H & \varepsilon H^* \end{pmatrix}. \tag{75}$$

Тогда обычная $SU(2)_L$ действует на (75) слева, а $SU(2)_R$ — глобальная симметрия, действующая на (75) справа.

Если хиггсовский скаляр получает ненулевое вакуумное среднее, то глобальная $SO(4)$-симметрия нарушается до $SO(3)$-подгруппы. Иначе говоря, $SU(2)_L \times SU(2)_R$ нарушаются до диагональной подгруппы $SU(2)_D$. Это очевидно из соотношения (75): так как получается матрица с $\mathrm{diag}(v, v)$, то подгруппа диагональна. Если такая $SU(2)_D$-подгруппа (ее называют custodial симметрией хиггсовского потенциала) остается ненарушенной при нарушении электрослабой симметрии, то $\rho = 1$ на древесном уровне. Докажем, что это действительно так.

Нарушение симметрии $SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_D$ можно описать с помощью нелинейной σ-модели с 3-мя голдстоуновскими модами, возникающими при таком нарушении симметрии. В этой модели голдстоуновские поля представляются с помощью 2×2 унитарной матрицы, зависящей от голдстоуновских мод π^α:

$$\Sigma = e^{i\frac{\pi^\alpha \tau^2}{f}} \tag{76}$$

и преобразующейся относительно $SU(2)_L \times SU(2)_R$ как $\Sigma \to U_L \Sigma U_R^+$. Можно считать группу $SU(2)_L \times U(1)_Y$ подгруппой электрослабой симметрии $SU(2)_L \times \times SU(2)_R \subset U(1)_Y \subset SU(2)_R$. Ковариантная производная

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\tau^a}{2} A_\mu^a - i\frac{g'}{2} B_\mu, \tag{77}$$

а кинетический член для пионных полей

$$f^2 \,\mathrm{tr}(D_\mu \Sigma^+)(D^\mu \Sigma). \tag{78}$$

Разлагая это выражение по флуктуациям пионных полей, получаем массовые члены калибровочных полей:

$$M_W^2 = \frac{g^2 f^2}{4}, \quad M_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) f^2}{4}. \tag{79}$$

Поэтому

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2} = \frac{g^2}{g^2 + g'^2}. \tag{80}$$

Заметим, что при выводе предыдущих выражений мы использовали лишь информацию о нарушении глобальной симметрии $SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_D$. Если способ нарушения симметрии определен, то это гарантирует $\rho = 1$ на древесном уровне.

Итак, чтобы построить безхиггсовскую модель с правильным отношением M_W/M_Z, нужно использовать модель с дополнительным измерением, обладающую custodial $SU(2)$-симметрией. Если такая конструкция найдена, в ней отношение масс калибровочных бозонов будет правильным. Поэтому нужно каким-то способом включить $SU(2)_R$ в рассматриваемую модель. Проще всего — выбрать калибровочную группу $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ в объеме внешнего измерения ($U(1)_{B-L}$ — симметрия барионного минус лептонного числа). Чтобы нарушение симметрии напоминало нарушение симметрии стандартной модели, предположим, что на одной из бран нарушается $SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_D$, а $U(1)_{B-L}$ остается ненарушенной. На другой границе нужно привести объемную калибровочную симметрии к симметрии стандартной модели, т. е. мы имеем нарушение симметрии $SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \to U(1)_Y$ (рис. 4).

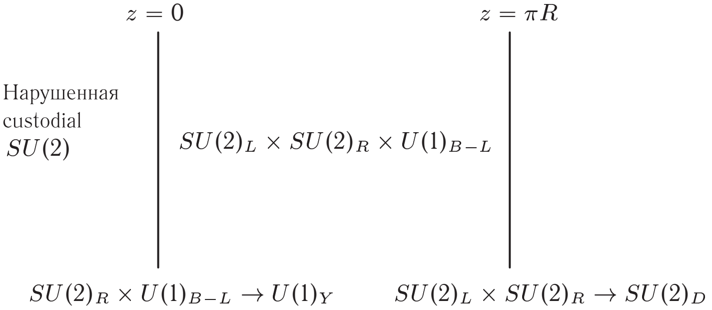


Рис. 4

Обозначим через A_M^{Ra}, A_M^{La} и B_M калибровочные бозоны $SU(2)_R$, $SU(2)_L$ и $U(1)_{B-L}$; g_{5L} и g_{5R} — калибровочные константы двух $SU(2)$-групп; $\tilde{g}_5$ — калибровочная константа группы $U(1)_{B-L}$. Чтобы получить желаемые граничные условия, следуем процедуре, описанной в первом разделе. Предположим, что существует граница для хиггсовского поля на левой бране в представлении $(1,2)_{1/2}$ относительно $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$, которая нарушает $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ до $U(1)_Y$. Мы могли бы использовать и более удобное триплетное представление относительно $SU(2)_R$, допускающее существование массы нейтрино. На правой бране предположим, что имеется бидублетный хиггс в представлении $(2,2)_0$, который нарушает электрослабую симметрию, аналогично стандартной модели: $SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_D$. Затем нужно устремить все хиггсовские вакуумные средние к бесконечности, при этом все граничные скаляры оказываются «отщепленными». При этом граничные условия имеют вид:

$$\text{при } y = 0 \quad \begin{cases} \partial_z(g_{5R}B_\mu + \tilde{g}_5 A_\mu^{R3}) = 0, \\ \partial_z A_\mu^{La} = 0, \\ A_\mu^{R1,2} = 0, \\ \tilde{g}_5 B_\mu - g_{5R}A_\mu^{R3} = 0; \end{cases} \tag{81}$$

$$\text{при } y = \pi R \quad \begin{cases} \partial_z(g_{5R}A_\mu^{La} + g_{5L}A_\mu^{Ra}) = 0, \\ \partial_z B_\mu = 0, \\ g_{5L}A_\mu^{La} - g_{5R}A_\mu^{La} - g_{5R}A_\mu^{Ra} = 0. \end{cases} \tag{82}$$

Как обычно, граничные условия для A_5 и B_5 компонент будут противоположны 4-мерным калибровочным полям, т.е. все условия Дирихле следует заменить на неймановские условия и наоборот. На следующем шаге для определения массового спектра нужно найти КК-разложение. Прежде всего, заметим, что ни одна из A_5 и B_5 компонент не имеет плоских граничных условий на обоих концах. Это означает отсутствие нулевых мод этих полей, и как мы уже видели, все массивные скаляры — нефизические (калибровочные артефакты). Поэтому нет необходимости обсуждать моды этих полей. Основная особенность КК-разложения калибровочных полей состоит в том, что граничные условия будут смешивать состояния различных компонент. Так как в объеме нет смешивания, и мы обсуждаем пока плоский 5-мерный фон, волновые функции будут иметь вид $f_k(z) \sim a\cos M_k z + b \sin M_k z$.

Если сделать упрощающее предположение о равенстве $g_{5L} = g_{5R}$, КК-разложение (обозначив $A_\mu^{L,R\pm} = (1/\sqrt{2})(A^{L,R1} \mp iA^{L,R2})$):

$$\begin{aligned}
B_\mu(x,y) &= g a_0 \gamma_\mu(x) + g' \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(M_k^Z y) Z_\mu^{(k)}(x),\\
A_\mu^{L3}(x,y) &= g' a_0 \gamma_\mu(x) - g \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\cos(M_k^Z(y-\pi R))}{2\cos(M_k^z \pi R)} Z_\mu^{(k)}(x),\\
A_\mu^{R3}(x,y) &= g' a_0 \gamma_\mu(x) - g \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\cos(M_k^Z(y+\pi R))}{2\cos(M_k^z \pi R)} Z_\mu^{(k)}(x),\\
A_\mu^{L\pm}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\big(M_k^W(y-\pi R)\big) W_\mu^{(k)\pm}(x),\\
A_\mu^{R\pm}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\big(M_k^W(y+\pi R)\big) W_\mu^{(k)\pm}(x).
\end{aligned} \tag{83}$$

Коэффициенты и массы определяются из граничных условий в соотношениях (83). Спектр теории состоит из безмассового фотона, калибровочного бозона, связанного с ненарушенной $U(1)_Q$-симметрией, и массивных заряженных и нейтральных калибровочных бозонов $W^{(k)}$ и $Z^{(k)}$. Массы $W^\pm$:

$$M_k^W = \frac{2k-1}{R}, k = 1, 2, \ldots . \tag{84}$$

Для Z-бозонов имеется две башни с массами:

$$\begin{aligned}
M_k^Z &= \left(M_0 + \frac{k-1}{R}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,\\
{M'}_k^Z &= \left(-M_0 + \frac{k}{R}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{85}$$

где $M_0 = 1/(\pi R)\arctan\sqrt{1 + 2{g'}^2/g^2}$.

Поскольку $1/4R < M_0 < 1/2R$, то «штрихованные» Z-бозоны тяжелее, чем «нештрихованные». Кроме того, легчайший Z тяжелее, чем легчайший W ($M_1^Z > M_1^W$) в согласии со спектром стандартной модели. Однако соотношение

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2} = \frac{\pi^2}{16}\arctan^{-2}\left(\sqrt{1 + \frac{{g'_{4D}}^2}{g_{4D}^2}}\right) \simeq 0{,}86, \tag{86}$$

следовательно, параметр

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} \simeq 1{,}10. \tag{87}$$

Это отношение отличается примерно на 10% от предсказаний стандартной модели (в древесном приближении). Причина этого отличия состоит в том, что объем и правая брана симметричны относительно custodial $SU(2)$, левая брана — несимметрична. КК волновые функции имеют компоненты, локализованные на левой бране, а они определяются отклонением величины ρ от единицы. Поэтому надо найти способ построения КК-мод калибровочных полей, при котором они были бы не слишком «чувствительными» к левой бране, и только легчайшие (практически нулевые моды) γ, Z, $W^{\pm}$ имели бы заметное перекрытие с левой браной.

5.3.4. AdS/CFT соответствие. Для разрешения проблемы, упомянутой в конце предыдущего подраздела, есть две возможности. Одна из них — добавить большой кинетический член для калибровочных полей на левой бране, где нарушена custodial $SU(2)$-симметрия. Реально это означает исключение тяжелых КК-мод. На этом пути custodial $SU(2)$-симметрия может быть восстановлена в КК секторе теории.

Вторая возможность, которую мы обсудим более подробно, — так называемое AdS/CFT соответствие. В 1997 г. Малдасена показал, что некоторые теории струн на анти-де-ситтеровском (AdS) фоне эквивалентны 4-мерным конформным теориям поля (CFT). Оказывается, конформная группа $SO(2,4)$ эквивалентна изометриям 5-мерного AdS/CFT пространства, метрика которого имеет вид

$$ds^2 = \left(\frac{R}{z}\right)^2 (\eta_{\mu\nu} dz^\mu dx^\nu - dz^2), \tag{88}$$

где $0 < z < \infty$ — радиальная AdS-координата. Помимо обычной 5-мерной Пуанкаре-инвариантности, эта метрика имеет дополнительную инвариантность $z \to \alpha z$, $x_\mu \to \alpha x_\mu$. Малдасена показал, что $N = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса эквивалентна типу IIB струнной теории на $AdS_5 \times S^5$. Это полевая теория автоматически конформна из-за наличия суперзарядов. При этом координата вдоль AdS-направления соответствует масштабу энергий в CFT. В самом деле, рескейлинг z подразумевает рескейлинг x. Но рескейлинг x означает изменение масштаба энергий в CFT. Поэтому $z \to 0$ соответствует $E \to \infty$ в CFT, а $z \to \infty$ соответствует энергиям $E \to 0$. Другое важное следствие этой эквивалентности состоит в том, что теория поля имеет глобальную симметрию $SU(4)_R$. Действительно, в теории струн $SO(6) = SU(4)$ — группа изометрий 5-мерной сферы S^5. Поэтому в теории AdS_5 должен существовать безмассовый калибровочный бозон, соответствующий глобальной $SU(4)$-симметрии.

Как модифицируется AdS/CFT соответствие, если пространство AdS не является бесконечным, а мы рассматриваем только конечный интервал 5-мерного AdS пространства? В этом случае конформная инвариантность не будет полной, так как появление границ ее нарушает. Один из способов интерпретации появления границы при $z = 0$ (обычно называемый UV или планковской браной) состоит в том, чтобы рассматривать полевую теорию с параметром обрезания, соответствующим этому масштабу энергий. Если обрезание происходит при $z = R$, то теория поля будет иметь UV обрезание $\Lambda = 1/R$.

Другая граница (называемая IR или ТэВ-й браной) определяется не столь очевидным образом. На IR бране в CFT конформная инвариантность при низких энергиях спонтанно нарушается. Локализация IR браны определяется IR обрезанием. В модели

Randall–Sundrum КК-спектр локализован на IR бране. В присутствии IR браны спектр КК-мод будет дискретным. Эти дискретные КК-моды можно рассматривать как связанные состояния в CFT, возникающие при нарушении конформности. Приведем следствия AdS/CFT соответствия в таблице.

объем AdS	CFT
координата z вдоль AdS	энергетический масштаб CFT
существование UV браны	CFT имеет обрезание
существование IR браны	в CFT спонтанно нарушена конформная симметрия
КК-моды, локализованные на IR бране	композитность CFT
моды на UV бране	элементарные поля, связанные с CFT
калибровочные поля в объеме	CFT имеет глобальную симметрию
объемная калибровочная симметрия нарушена на UV бране	глобальная симметрия не калибровочная
объемная калибровочная симметрия не нарушена на UV бране	глобальная симметрия слабо калибрована

Основываясь на этих правилах соответствия, построим желаемую модель. Мы хотели бы иметь теорию, имеющую $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ глобальную симметрию с $SU(2)_L \times U(1)_Y$-подгруппой, нарушенной граничными условиями на IR бране. Чтобы иметь полную глобальную симметрию, нужно выбрать в объеме AdS_5 группу $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$. Для того, чтобы не получить нежелательные калибровочные поля при низких энергиях, необходимо нарушить на UV бране $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ до подгруппы $U(1)_Y$. Это возможно сделать, как и в плоском случае, с помощью граничных условий. Наконец, граничные условия на ТэВ-й бране нарушают $SU(2)_L \times SU(2)_R$ до $SU(2)_D$, обеспечивая тем самым электрослабое нарушение.

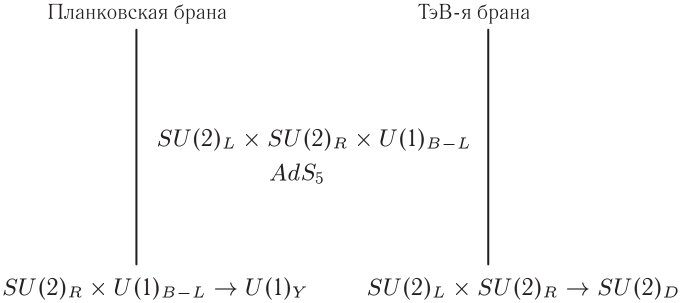


Рис. 5

Наглядно нарушение симметрии в «искаженной» безхиггсовской модели представлено на рис. 5.

5.3.5. Искаженное пространство безхиггсовской модели. Прежде чем перейти к предсказанию спектра масс обсуждаемой выше безхиггсовской модели в искаженном пространстве, обсудим особенности калибровочной теории в AdS-пространстве.

Итак, рассмотрим 5-мерную калибровочную теорию в пространстве с метрикой

$$ds^2 = \left(\frac{R}{z}\right)^2 (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2), \tag{89}$$

где z принадлежит интервалу $[R, R']$. В модели Randall–Sundrum $R \sim 1/M_{\text{Pl}}$, а $R' \sim$ ТэВ$^{-1}$. Для безхиггсовских моделей мы найдем оптимальные значения для R и R'. Действие для калибровочной теории запишется в виде

$$S = \int d^5x \sqrt{g} \Big[-\frac{1}{4} F^a_{MN} F^a_{PQ} g^{MP} g^{NQ} \Big]. \tag{90}$$

Подставив в (90) метрику (89), получим

$$S = \int d^4x \int\limits_R^{R'} dz \frac{R}{z} \Big[-\frac{1}{4} F^{a2}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F^{a2}_{\mu 5} \Big]. \tag{91}$$

Чтобы получить правильный член, фиксирующий калибровку, следует повторить процедуру, обсуждавшуюся в первом разделе.

Слагаемое, смешивающее A_μ и A_5, имеет вид

$$\int d^4x \int\limits_R^{R'} dz \frac{R}{z} \partial_\mu \partial^5 A^\mu = -\int d^4x \int\limits_R^{R'} dz \partial_\mu A^\mu \partial_5 \Big(\frac{R}{z} A_5 \Big). \tag{92}$$

При этом мы проинтегрировали по частям и пренебрегли соответствующими членом на границе. Тогда член, фиксирующий калибровку в «искаженном» случае

$$S_{gf} = -\int d^4x \int\limits_R^{R'} dz \frac{1}{2\xi} \frac{R}{z} \Big[\partial_\mu A^\mu - \xi \frac{z}{R} \partial_5 \Big(\frac{R}{z} A_5 \Big) \Big]^2. \tag{93}$$

Как следствие выбранных граничных условий, поле A_5 не имеет нулевых мод (они становятся массивными калибровочными артефактами и исключаются в унитарной калибровке).

Квадратичная часть действия для калибровочных полей имеет вид

$$\int d^4x \int\limits_R^{R'} dz \frac{R}{z} \frac{1}{2} A_\mu \Big[\Big(\partial^2 - \frac{z}{R} \partial_z \Big(\frac{R}{z} \partial_z \Big) \Big) \eta^{\mu\nu} - \Big(1 - \frac{1}{\xi} \Big) \partial^\mu \partial^\nu \Big] A_\nu. \tag{94}$$

Как и раньше, для перехода в 4-мерное импульсное пространство запишем $A_\mu(x,z) = \varepsilon_\mu(p) f(z) e^{ipx}$. Тогда уравнение движения для волновой функции $f(z)$ ($p^2 = M^2$):

$$\Big[-M^2 - z\partial_5 \Big(\frac{1}{z} \partial_5 \Big) \Big] f(z) = 0. \tag{95}$$

Эквивалентно это уравнение можно записать в виде:

$$f'' - \frac{1}{z} f' + M^2 f = 0. \tag{96}$$

Если сделать замену $f(z) = z g(z)$, то для $g(z)$ получается уравнение Бесселя первого порядка:

$$g'' + \frac{1}{z} g' + \Big(M^2 - \frac{1}{z^2} \Big) g = 0. \tag{97}$$

Его решение

$$f(z) = z \big(A J_1(q_k z) + B Y_1(q_k z) \big). \tag{98}$$

Граничные условия, необходимые для нарушения симметрии в случае «искаженной» безхиггсовской модели идентичны условиям плоского пространства:

$$\text{при } y = 0 \quad \begin{cases} \partial_z (g_{5R} B_\mu + \tilde{g}_5 A_\mu^{R3}) = 0, \\ \partial_z A_\mu^{La} = 0, \\ A_\mu^{R1,2} = 0, \\ \tilde{g}_5 B_\mu - g_{5R} A_\mu^{R3} = 0; \end{cases} \tag{99}$$

$$\text{при } y = \pi R \quad \begin{cases} \partial_z (g_{5R} A_\mu^{La} + g_{5L} A_\mu^{Ra}) = 0, \\ \partial_z B_\mu = 0, \\ g_{5L} A_\mu^{La} - g_{5R} A_\mu^{La} - g_{5R} A_\mu^{Ra} = 0. \end{cases} \tag{100}$$

КК-моды задаются решением уравнения (97) и имеют вид

$$\psi_k^{(A)}(z) = z\big(a_k^{(A)} J_1(q_k z) + b_k^{(A)} Y_1(q_k z)\big), \tag{101}$$

где (A) обозначает соответствующий калибровочный бозон.

Из-за смешивания различных калибровочных групп, КК-разложение выглядит несколько сложнее:

$$\begin{aligned} B_\mu(x,z) &= g_5 a_0 \gamma_\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(B)}(z) Z_\mu^{(k)}(x), \\ A_\mu^{L3}(x,z) &= \tilde{g}_5 a_0 \gamma_\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(L3)}(z) Z_\mu^{(k)}(x), \\ A_\mu^{R3}(x,z) &= \tilde{g}_5 a_0 \gamma_\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(R3)}(z) Z_\mu^{(k)}(x), \\ A_\mu^{L\pm}(x,z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(L\pm)}(z) W_\mu^{(k)\pm}(x), \\ A_\mu^{R\pm}(x,z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(R\pm)}(z) W_\mu^{(k)\pm}(x). \end{aligned} \tag{102}$$

Здесь $\gamma(x)$ означает 4-мерный фотон, имеющий из-за ненарушенной $U(1)_Q$-симметрии плоскую волновую функцию, $W_\mu^{(k)\pm}$ и $Z_\mu^{(k)}(x)$ — КК-башни массивных W- и Z-бозонов, причем их самые низшие состояния должны соответствовать наблюдаемым W и Z. В лидирующем порядке по $1/R$ и для $\log(R'/R) \gg 1$, легчайшее состояние $W^\pm$ имеет массу

$$M_W^2 \simeq \frac{1}{R'^2 \log(R'/R)}. \tag{103}$$

Заметим, что этот результат не зависит от 5-мерной константы связи, а зависит только от R и R'. Выбор $R = 10^{-19}$ ГэВ$^{-1}$ фиксирует $R' = 2 \cdot 10^{-3}$ ГэВ$^{-1}$. Масса самого низкого состояния Z-башни:

$$M_Z^2 = \frac{g_5^2 + 2\tilde{g}_5^2}{g_5^2 + \tilde{g}_5^2} \frac{1}{R'^2 \log(R'/R)}. \tag{104}$$

Если фермионы стандартной модели локализованы на планковской бране, то в лидирующем порядке эффективная 4-мерная константа связи

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2} &= \frac{R\log(R'/R)}{g_5^2}, \\ \frac{1}{g'^2} &= R\log(R'/R)\left(\frac{1}{g_5^2} + \frac{1}{\tilde{g}_5^2}\right). \end{aligned} \tag{105}$$

Тогда 4-мерный угол Вайнберга

$$\sin\theta_W = \frac{\tilde{g}_5}{\sqrt{g_5^2 + 2\tilde{g}_5^2}} = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \tag{106}$$

Как и ожидалось, рассматриваемая теория в лидирующем порядке воспроизводит отношение масс M_W/M_Z стандартной модели.

КК-массы W (и Z-бозона вследствие custodial симметрии) задаются следующим образом:

$$m_{W_n} = \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{R'}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{107}$$

Отношение физической массы W-бозона и первой КК-моды:

$$\frac{m_W}{m'_W} = \frac{4}{3\pi\sqrt{\log(R/R')}}. \tag{108}$$

Таким образом, переход от плоского к искаженному пространству «усиливает» custodial $SU(2)$-симметрию и автоматически приводит к правильному отношению M_W/M_Z.

Вернемся, наконец, к обсуждению унитарности. В плоском пространстве масштаб нарушения унитарности задается выражением (63). В искаженном пространстве все масштабы зависят от точки локализации в дополнительном измерении. На IR бране параметр обрезания

$$\Lambda_{\mathrm{PA}} \sim \frac{24\pi^3}{g_5^2}\frac{R}{R'}. \tag{109}$$

Используя выражение для 4-мерных констант связи и масс W и W', это выражение переписывается в виде

$$\Lambda_{\mathrm{PA}} \sim \frac{12\pi^4 M_W^2}{g^2 M_{W^{(1)}}}. \tag{110}$$

Из этой формулы очевидно: чем тяжелее резонанс, тем меньше масштаб, на котором происходит нарушение унитарности.

Поскольку отношение масс W и первой КК-моды:

$$\frac{M_W^2}{M_{W^{(1)}}^2} \simeq O\left(\frac{1}{\log(R'/R)}\right), \tag{111}$$

то возрастание величины R приводит к значительному увеличению Λ_{PA}. Если выбрать $R \sim 1/M_{\mathrm{Pl}}$, то первый КК-резонанс появляется при 1,2 ТэВ. При больших R этот масштаб становится меньшим ТэВ-а.

5.4. Фермионы в дополнительных измерениях

Эта проблема исследуется с начала 80-х годов и связана с представлениями группы Лоренца со спином 1/2 в пространствах с дополнительными измерениями. Принципиальная трудность заключается в том, что неприводимые представления группы Лоренца в многомерных пространствах не являются киральными с 4-мерной точки зрения. Это означает, что низкоэнергетическая эффективная теория, получающаяся из многомерной теории, вообще говоря, не содержит киральных фермионов. Тем не менее, как мы знаем, стандартная модель содержит киральные фермионы. Еще в начале 80-х годов было установлено, что киральные фермионы в моделях с дополнительными измерениями можно получить с помощью орбифолдов. Обсудим этот метод более подробно.

5.4.1. Фермионы в 4-мерном пространстве. Прежде чем обсуждать свойства фермионов в дополнительных измерениях, напомним основные свойства 4-мерных фермионов.

Обычно используется киральное представление для γ-матриц Дирака:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{112}$$

где $\sigma^i = -\overline{\sigma}^i$ — спиновые матрицы Паули. При Лоренц-преобразованиях 4-мерный вектор $x^\mu \to x'^\mu$:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \tag{113}$$

Спиноры являются представлениями группы Лоренца. В 4-х измерениях двумерная комплексная специальная линейная группа $SL(2, C)$ является накрывающим пространством группы Лоренца. Это соответствие напоминает отображение группы $SU(2)$ на группу вращений $SO(3)$. Чтобы это увидеть, выберем следующую параметризацию лоренцевского 4-вектора:

$$x^\mu \to [x] = x^0 - x^i\sigma^i = \begin{bmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{bmatrix}, \tag{114}$$

причем $[x]$ имеет следующие свойства:

$$[x] = [x]^+ \quad \text{и} \quad \det[x] = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \equiv x^\mu x_\mu. \tag{115}$$

Выберем теперь произвольную матрицу $A \in SL(2, C)$. Это 2×2 комплексная матрица с единичным определителем. При вращениях с помощью матрицы A:

$$[x] \to [x]_A = A[x]A^+. \tag{116}$$

При этом $[x]_A = [x]^+_A$ и $\det[x]_A = \det[x]$. Всеми этими свойствами обладает внутреннее произведение при произвольных лоренцевских преобразованиях.

Таким образом, для некоторого Λ_A

$$[x]_A = [\Lambda_A x]. \tag{117}$$

Поэтому отображение $A \to \Lambda_A$ есть гомоморфизм группы Лоренца. Группа $SL(2, C)$ изоморфна прямому произведению групп $SU(2) \times SU(2)$ с комплексными параметрами преобразования, связанными комплексным сопряжением. Мнимая компонента параметров преобразования связана Лоренц-сдвигами, а вращения ассоциированы с вещественной частью параметров преобразования.

Вследствие изоморфизма, можно выразить представление $SL(2,C)$ в терминах $SU(2)$-подгрупп. Два $SU(2)$-индекса будем представлять как индекс с точкой и без точки. Тогда два наиболее простых (нетривиальных) неприводимых представления $SL(2,C)$ будут обозначаться как χ^α и $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$. Они соответствуют представлениям $(1/2,0)$ и $(0,1/2)$ группы Лоренца. Это известные левые и правые вейлевские спиноры (см. главу 2 части I). Любое представление группы Лоренца может быть записано в терминах трансформационных преобразований $SU(2)$-подгрупп. Такое представление обозначается в виде (m,n), где m — число неточечных индексов представления, а n — число точечных индексов.

Если мы требуем, чтобы физическая теория была инвариантна относительно преобразований четности, то это означает, что теория содержит определенную комбинацию фундаментальных представлений. Четность изменяет «правое на левое», или, в терминах (m,n), меняет m на n. Теория, инвариантная относительно преобразований четности, должна содержать представления типа прямой суммы $(m,n)+(n,m)$. Для вейлевских спиноров наинизшее представление, инвариантное относительно преобразований четности — $(1/2,0)+(0,1/2)$. Это представление есть не что иное, как дираковский спинор.

В индексных обозначениях, комплексное сопряжение меняет точечные индексы на неточечные. Метрики точечных и неточечных пространств, которые повышают и понижают индексы, задаются антисимметричными тензорами $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$. В обозначениях $SL(2,C)$, σ-матрицы изменяют представления между точечными и неточечными пространствами:

$$\sigma^\mu \to \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}. \tag{118}$$

Это следует из трансформационных свойств $[x]$. При этом спиноры можно объединить в инварианты со следующим свойством:

$$\chi^\alpha\psi^\beta\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \chi^\alpha\psi_\alpha = \psi^\alpha\chi_\alpha. \tag{119}$$

Два знака минус при перестановке порядка двух спиноров превращаются в плюс. Один из минусов возникает из-за перестановки грассмановых переменных, обозначающих спиноры, а другой — за счет перестановки индексов в полностью антисимметричном тензоре $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Далее мы часто будем опускать спинорные индексы, записывая $\chi^\alpha\psi_\alpha \equiv \chi\psi$. Следует, однако, иметь в виду, что $\chi^\alpha\psi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha$.

5.4.2. Фермионы в плоском дополнительном измерении. В 5-мерном пространстве алгебра Клифорда включает, помимо 4-мерной дираковской алгебры, еще и γ^5, этот символ и есть преобразование четности, которое мы обсуждали выше. В 5-мерном пространстве простейшее неприводимое представление 4-мерной подгруппы 5-мерной алгебры Пуанкаре записывается в виде $(0,1/2)+(1/2,0)$. Таким образом, простейшее неприводимое представление в 5-ти измерениях — дираковский, а не вейлевский спинор. Это и означает, что объемные фермионы не являются киральными, о чем мы упоминали выше. Поэтому нельзя начинать обсуждение только с 2-компонентных спиноров, как это было в 4-мерной теории. Для получения опыта обращения с более общими компактифицированными пространствами рассмотрим минимальный 5-мерный лагранжиан для объемного спинорного поля, распространяющегося в плоском дополнительном измерении с топологией интервала:

$$S = \int d^5x\Big(\frac{i}{2}(\overline{\psi}\Gamma^M\partial_M\psi - \partial_M\overline{\psi}\Gamma^M\psi) - m\overline{\psi}\psi\Big). \tag{120}$$

Поле ψ распадается относительно 4-мерной лоренцевской подгруппы на два вейлевских спинора:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \tag{121}$$

Для нахождения граничных условий для вейлевских фермионов полезно выразить лагранжиан (120) в терминах 4-мерных вейлевских спиноров:

$$S = \int d^5x\Big(-i\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} + \frac{1}{2}(\psi\overleftrightarrow{\partial}_5\chi - \overline{\chi}\overleftrightarrow{\partial}_5\psi) + m(\psi\chi + \overline{\chi}\overline{\psi})\Big), \tag{122}$$

где $\overleftrightarrow{\partial}_5 = \vec{\partial}_5 - \overleftarrow{\partial}_5$.

Заметим, что в 4-мерных теориях члены с лево-действующими производными интегрируются по частям, поэтому остаются только право-действующие производные. Но мы здесь имеем дело с компактным пространством, имеющим границы, поэтому интегрирование по частям приводит к появлению граничных членов, которыми нельзя пренебрегать.

Объемные уравнения движения 4-мерных вейлевских спиноров получаются при вариации 5-мерного лагранжиана

$$\begin{aligned} -i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - \partial_5\overline{\psi} + m\overline{\psi} &= 0, \\ -i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} + \partial_5\chi + m\chi &= 0. \end{aligned} \tag{123}$$

5.4.3. Граничные условия для фермионов в 5-ти измерениях. Теперь нам хотелось бы найти согласованные граничные условия для фермионов. Найдем эти условия, исходя из принципа минимального действия.

Наивно можно было бы полагать, что есть два независимых спинора χ и $\overline{\psi}$, и нужно найти два независимых граничных условия для каждого из них. Но объемные уравнения движения первого порядка, т. е. имеется только одна постоянная интегрирования. Поэтому для дираковской пары $(\chi, \overline{\psi})$ есть только одно граничное условие $f(\chi, \overline{\psi}) = 0$ на каждой границе (f — некоторая функция от спиноров и сопряженных спиноров).

Найдем ограничения на функцию f. Для этого вычислим вариацию действия, которая включает производные, действующие в дополнительном измерении:

$$\delta S = \int \frac{1}{2}(\delta\psi\overleftrightarrow{\partial}_5\chi + \psi\overleftrightarrow{\partial}_5\delta\chi - \delta\overline{\chi}\overleftrightarrow{\partial}_5\overline{\psi} - \overline{\chi}\overleftrightarrow{\partial}_5\delta\overline{\psi}). \tag{124}$$

Чтобы получить граничные уравнения движения, нужно проинтегрировать по частям, дабы избавиться от производных, действующих на вариации полей слева. Однако эта процедура приводит к граничным членам:

$$\delta S^{\text{гранич.}} = \int d^5x[-\delta\psi\chi + \psi\delta\chi + \delta\overline{\chi}\overline{\psi} - \overline{\chi}\delta\psi]_0^L. \tag{125}$$

Тогда наиболее общие граничные условия, которым удовлетворяет принцип минимального действия, задаются решениями уравнения

$$-\delta\psi\chi + \psi\delta\chi + \delta\overline{\chi}\overline{\psi} - \overline{\chi}\delta\overline{\psi} = 0. \tag{126}$$

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда на границе спиноры пропорциональны друг другу:

$$\psi = \alpha\chi. \tag{127}$$

Вариации спиноров:

$$\delta\psi = \alpha\delta\chi. \tag{128}$$

При подстановке (127) и (128) в (126) получаем

$$\alpha\delta\chi\chi - \alpha\delta\chi\chi = 0, \tag{129}$$

т. е. вариация действия на границах действительно обращается в ноль.

Это только одно из множества граничных условий, которые удовлетворяют принципу наименьшего действия. Наиболее общее решение (126), отвечающее лоренцевским симметриям на интервале:

$$\psi_\alpha = M_\alpha^\beta \chi_\beta + N_{\alpha\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta}. \tag{130}$$

Чтобы показать структуру операторов M и N, мы вернулись к вейлевским индексам. Это операторы могут содержать производные вдоль дополнительного измерения.

Наиболее общий набор граничных условий зависит также от калибровочных симметрий. Например, если фермион преобразуется по комплексному представлению калибровочной группы, то оператор M_α^β должен обращаться в ноль. Действительно, спиноры χ и ψ преобразуются с помощью сопряженных представлений, поэтому они не могут быть пропорциональны друг другу. Если же поля соответствуют вещественным представлениям, то такие граничные условия допускаются.

Обсудим наиболее простое граничное условие: пусть спинор ψ обращается в ноль на обеих границах. Граничное условие для другого вейлевского спинора χ получается из уравнения движения в объеме:

$$(\partial_5 + m)\chi|_{0,L} = 0. \tag{131}$$

Решение уравнений движения с такими граничными условиями приводит к нулевой моде для спинора χ, но не для ψ. Таким образом, низкоэнергетическая теория будет киральной, и это получено из некиральной 5-мерной теории. Оказывается, при соответствующем выборе граничных условий, можно получить эффективную киральную теорию из «геометрии», которая изначально не содержала киральных мод.

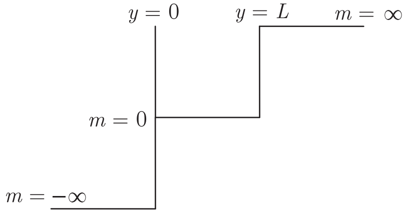


Рис. 6

Полезно представить себе физическую картину, которая приводит к такому типу граничных условий. Для этого рассмотрим бесконечное дополнительное измерение, содержащее конечный интервал, на котором объемная дираковская масса обращается в ноль, но вне этого интервала масса либо положительна и бесконечна, либо отрицательна и бесконечна. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 6.

Добавим постоянную массу m. Если знак массы противоположен ее значению на конце интервала, то после решения уравнений в объеме получим граничное условие за точками $y = 0$ и $y = L$, а это приведет к наличию нулевой моды у вейлевского спинора χ.

В этом случае, если дираковская масса имеет одинаковый знак на любом конце интервала $0 < y < L$, фермионы опять локализованы, но граничные условия $\chi|_{y=0} = 0$ и $\psi_{y=L} = 0$. Тогда наиболее низколежащий КК-резонанс имеет массу $\sim 1/L$. Теперь обсудим этот же пример на языке орбифолдов. Граничные условия определяются допущением Z_2-симметрии $(y \to -y)$ спиноров. При этом ψ —

Z_2-нечетный спинор, а χ — четный. Преобразование четности одного спинора определяется и другим спинором, поскольку действие содержит члены вида $\psi\partial_5\chi$. Если ψ — нечетный относительно Z_2, то χ должен быть четным, так как $\partial_5 \to -\partial_5$ при преобразованиях четности. Ситуация усложняется, если мы хотим придать объемную дираковскую массу 5-мерному фермиону $M\psi\chi$. Этот член не допустим с точки зрения Z_2-симметрии, и это означает, что объемный массовый член должен подвергаться дискретным скачкам на фиксированных точках орбифолда (стационарных точках относительно преобразований четности).

5.4.4. Примеры и приложения. Начнем с обсуждения КК-разложения 5-мерных фермионных полей, которое приведет к интересному разрешению проблемы иерархии фермионных масс. Фермионные поля удовлетворяют 4-мерному уравнению Дирака, которое для вейлевских спиноров записывается в виде:

$$\begin{aligned} -i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi^{(n)} + m_n\overline{\psi}^{(n)} &= 0, \\ -i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}^{(n)} + m_n\chi^{(n)} &= 0. \end{aligned} \tag{132}$$

5-мерные спиноры χ и ψ представим как сумму произведений 4-мерных дираковских фермионов и 5-мерных волновых функций:

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_n g_n(y)\chi_n(x), \\ \overline{\psi} &= \sum_n f_n(y)\overline{\psi}_n(x). \end{aligned} \tag{133}$$

Подстановка этого разложения в 5-мерные уравнения движения приводит к системе

$$\begin{aligned} g_n' + mg_n - m_nf_n &= 0, \\ f_n' - mf_n + m_ng_n &= 0. \end{aligned} \tag{134}$$

Стандартный способ решения этой системы — объединить уравнения первого порядка с уравнениями второго порядка:

$$\begin{aligned} g_n'' + (m_n^2 - m^2)g_n &= 0, \\ f_n'' + (m_n^2 - m^2)f_n &= 0. \end{aligned} \tag{135}$$

Решением будет сумма синусов и косинусов с коэффициентами, определяемыми граничными условиями. Пусть объемные фермионы имеют следующие граничные условия: $\psi|_{0,L} = 0$ и $(\partial_5 + m)\chi|_{0,L} = 0$. Положим в уравнениях (134) 4-мерные собственные значения масс равными нулю:

$$\begin{aligned} g_n' + mg_n &= 0, \\ f_n' - mf_n &= 0. \end{aligned} \tag{136}$$

Решениями этой системы будут экспоненты. Решение, удовлетворяющее граничному условию $\psi|_{0,L} = 0 - f_0 = 0$ и $g_0(y) = g_0e^{-my}$. Волновая функция, в зависимости от знака объемного массового члена m, либо экспоненциально растет, либо убывает. Константа g_0 определяется нормировкой волновой функции. Чтобы получить 4-мерную теорию, в которой нулевая мода имеет каноническую нормировку, положим

$$\int\limits_0^L g_0^2(y)dy = 1. \tag{137}$$

Тогда

$$g_0 = \sqrt{\frac{2m}{1 - e^{-2mL}}}. \tag{138}$$

Предположим теперь, что все юкавские константы связи объемных фермионов с хиггсом на границе порядка единицы и попробуем определить массы объемных дираковских фермионов. Юкавские связи в 5-мерной теории имеют вид

$$\lambda_u L \overline{u}_R H Q_L \delta(y - L) \to \lambda_u L \overline{\chi}_Q^0 H \chi_u^{0*} \delta(y - L). \tag{139}$$

Эффективная юкавская константа связи в 4-мерном пространстве включает волновую функцию на границе (где локализован хиггс):

$$\lambda_{4D}^u = \frac{\lambda_{5D}^u}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{m_Q m_u L^2}}{\sqrt{(1 - e^{-2m_Q L})(1 - e^{-2m_u L})}} e^{-(m_Q + m_u)L}. \tag{140}$$

Для всех параметров (порядка единицы) можно получить достаточно широкий спектр фермионных масс.

5.4.5. Фермионы в искаженном пространстве. В отличие от плоского пространства, при рассмотрении фермионов в искаженном пространстве возникает проблема ковариантной производной, действующей на фермионы. Нам нужно построить некоторый объект из метрики, соответствующей представлению группы Лоренца со спином 1/2. Грубо говоря, этот объект — корень квадратный из метрики g. В индексном обозначении запишем метрику в виде:

$$g^{MN} = e_a^M \eta^{ab} e_b^N. \tag{141}$$

Дираковская алгебра в искривленном пространстве запишется через дираковские матрицы в плоском пространстве

$$\Gamma^\mu = e_a^M \gamma^a. \tag{142}$$

Для записи ковариантной производной, действующей на фермионы, воспользуемся спиновой связностью ω_M^{ab}:

$$D_M = \partial_M + \frac{1}{2}\omega_M^{ab}\sigma_{ab}, \tag{143}$$

где $\sigma_{ab} = (1/4)\gamma[a\gamma_b]$.

Если фоновая геометрия задается AdS-пространством, то метрика в конформных координатах:

$$ds^2 = \left(\frac{R}{z}\right)^2 (dx_\mu dx_\nu \eta^{\mu\nu} - dz^2). \tag{144}$$

Записанное в терминах двухкомпонентных вейлевских спиноров AdS-действие:

$$S = \int d^5x \left(\frac{R}{z}\right)^4 \left(-i\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} + \frac{1}{2}\left(\psi \overleftrightarrow{\partial}_5 \chi - \overline{\chi}\overleftrightarrow{\partial}_5\overline{\psi} + \frac{c}{z}(\psi\chi + \overline{\chi}\overline{\psi})\right)\right), \tag{145}$$

где коэффициент $c = mR$, m — объемный дираковский массовый член для 4-компонентного дираковского спинора. Объемные уравнения движения в AdS:

$$\begin{aligned} -i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - \partial_5\overline{\psi} + \frac{c+2}{z}\overline{\psi} = 0, \\ -i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} + \partial_5\chi + \frac{c-2}{z}\chi = 0. \end{aligned} \tag{146}$$

Заметим, что слагаемые в уравнениях движения, содержащие объемную массу c, зависят от дополнительной координаты z.

Далее, как и для плоского пространства, проведем КК-разложение. Все очень похоже на плоский случай, вот только уравнения движения для волновых функций будут другими

$$\begin{aligned}\chi &= \sum_n g_n(z)\chi_n(x),\\ \overline{\psi} &= \sum_n f_n(z)\overline{\psi}_n(x),\end{aligned} \tag{147}$$

причем 4-мерные спиноры χ_n и $\overline{\psi}_n$ удовлетворяют обычному 4-мерному уравнению Дирака с массой m_n:

$$\begin{aligned}-i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_n + m_n\overline{\psi}_n &= 0,\\ -i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_n + m_n\chi_n &= 0.\end{aligned} \tag{148}$$

Объемные уравнения движения представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка для волновых функций f_n и g_n:

$$\begin{aligned}f'_n + m_n g_n - \frac{c+2}{z}f_n &= 0,\\ g'_n - m_n g_n + \frac{c-2}{z}g_n &= 0.\end{aligned} \tag{149}$$

Для нулевой моды, если граничные условия допускают ее присутствие, объемные уравнения расщепляются, и их решения

$$\begin{aligned}f_0 &= C_0\left(\frac{z}{R}\right)^{c+2},\\ g_0 &= A_0\left(\frac{z}{R}\right)^{2-c},\end{aligned} \tag{150}$$

где A_0 и C_0 — нормировочные константы, имеющие размерность (масса)^2.

Для массивных мод, как и в случае плоского пространства, уравнения первого порядка следует дополнить уравнениями второго порядка:

$$\begin{aligned}f''_n - \frac{4}{z}f'_n + \left(m_n^2 - \frac{c^2-c-6}{z^2}\right)f_n &= 0,\\ g''_n - \frac{4}{z}g'_n + \left(m_n^2 - \frac{c^2+c-6}{z^2}\right)g_n &= 0.\end{aligned} \tag{151}$$

Решениями этих уравнений будут линейные комбинации функций Бесселя:

$$\begin{aligned}g_n(z) &= z^{5/2}\big(A_n J_{c+1/2}(m_n z) + B_n Y_{c+1/2}(m_n z)\big),\\ f_n(z) &= z^{5/2}\big(C_n J_{c-1/2}(m_n z) + D_n Y_{c-1/2}(m_n z)\big).\end{aligned} \tag{152}$$

Из объемных уравнений движения первого порядка (149) следует:

$$A_n = C_n \quad \text{и} \quad B_n = D_n. \tag{153}$$

Оставшиеся коэффициенты определяются граничными условиями и нормировкой волновой функции.

Как и в плоском пространстве, объемные массы определяются локализацией фермионов. Например, выберем

$$g_0(y) = A_0\left(\frac{z}{R}\right)^{2-c}, \quad f = 0. \tag{154}$$

Это решение соответствует граничному условию $\psi|_{R,R'} = 0$. Коэффициент A_0 находится из условия нормировки:

$$\int\limits_R^{R'} dz\left(\frac{R}{z}\right)^5 \frac{z}{R} A_0^2 \left(\frac{z}{R}\right)^{4-2c} = A_0^2 \int\limits_R^{R'} \left(\frac{z}{R}\right)^{-2c} dz = 1. \tag{155}$$

Чтобы понять из этих уравнений, где локализованы фермионы, изучим поведение интеграла (155) при изменении пределов интегрирования. Если $R' \to \infty$, то интеграл сходится, если $c > 1/2$, фермионы локализованы на UV бране. Если $R \to 0$, интеграл сходится, если $c < 1/2$, фермионы локализованы на IR бране.

5.4.6. Фермионные массы в безхиггсовской модели. Калибровочные симметрии безхиггсовской модели в искривленном пространстве показаны на рис. 5. Фермионы в этой модели не могут быть полностью локализованы на UV или IR бранах. Если бы они были локализованы на IR бране, то u- и d-кварки были бы нерасщепленными по массе, так как при $z = R'$ теория некиральная. Если же они были бы локализованы на UV бране, то теория была бы полностью киральной. Фермионы «живут» в объеме, но «чувствуют» обе браны. Квантовые числа фермионов рассматриваемой модели представлены в таблице.

	$SU(2)_L$	$SU(2)_R$	$U(1)_{B-L}$
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$		1	1/6
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R$	1		1/6
$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$		1	−1/2
$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_R$	1		−1/2

Граничные условия для фермионов, приводящие к нулевым модам:

$$\begin{pmatrix} \chi_{u_L} \\ \overline{\psi}_{u_L} \\ \chi_{d_L} \\ \overline{\psi}_{d_L} \end{pmatrix} \begin{matrix} ++ \\ -- \\ ++ \\ -- \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} \chi_{u_R} \\ \overline{\psi}_{u_R} \\ \chi_{d_R} \\ \overline{\psi}_{d_R} \end{pmatrix} \begin{matrix} -- \\ ++ \\ -- \\ ++ \end{matrix}. \tag{156}$$

Знаки $(+)$ и $(-)$ относятся к неймановским граничным условиям или граничным условиям Дирихле. На этой стадии u_L, d_L, u_R и d_R — безмассовые, поэтому для получения значений масс стандартной модели нужно «повысить» нулевые моды. Поскольку простое придание определенных граничных условий для фермионов не способно повысить нулевые моды, в дальнейшем будем говорить о граничных операторах и о тех граничных условиях, которые эти операторы индуцируют. Есть несколько неопределенностей, связанных с граничными операторами для фермионов. Дело в том, что поля в присутствии граничного оператора не всегда непрерывны. Причина в том, что уравнения движения фермионов — первого порядка. Чтобы повысить нулевые моды дублета, можно придать дираковские массы на ТэВ-й бране,

33*

смешивающие $SU(2)_L$- и $SU(2)_R$-мультиплеты. Это возможно, поскольку теория на IR бране некиральная.

Граничные условия на IR бране

$$\psi_L = -M_D R' \psi_R \quad \text{и} \quad \chi_R = M_D R' \chi_L. \tag{157}$$

На этой стадии u-, d-типа кварки, заряженные лептоны и нейтрино вырождены по массе. Массовое расщепление должно происходить на UV бране, где теория киральная. При этом масса нейтрино подавляется механизмом типа «seesaw», а лептонные массы остаются неизменными.

В качестве примера описания с помощью граничного оператора рассмотрим добавление майорановской массы для ν_R на UV бране. Чтобы представить граничные условия, необходимые для повышения нулевой моды, 4-мерную майорановскую массу необходимо добавить в граничные условия, при этом происходит изменения расстояния между границами на величину ε. После решения уравнений движения нужно рассмотреть предел $\varepsilon \to 0$. Следуя уже не раз испытанной процедуре, получаем уравнения движения

$$-i\overline{\sigma}\partial_\mu \chi - \partial_5 \overline{\psi} + \frac{c+2}{z}\overline{\psi} + \frac{MR^2}{z}\overline{\chi}\delta(z - R - \varepsilon) = 0. \tag{158}$$

Интегрируя, получаем условие для скачка спинора ψ:

$$[\psi]_R^{R+\varepsilon} = MR\chi|_{R+\varepsilon}. \tag{159}$$

С условием $\psi|_R = 0$, и в пределе малых ε, получается новое эффективное граничное условие

$$\psi_{R+\varepsilon} = MR\chi|_{R+\varepsilon}. \tag{160}$$

Общее решение объемных уравнений движения:

$$\begin{aligned} \chi_{L,R} &= z^{5/2}\big(A_{L,R} J_{1/2+c_{L,R}}(mz) + B_{L,R} Y_{-1/2-c_{L,R}}(mz)\big), \\ \psi_{L,R} &= z^{5/2}\big(A_{L,R} J_{-1/2+c_{L,R}}(mz) - B_{L,R} Y_{1/2-c_{L,R}}(mz)\big). \end{aligned} \tag{161}$$

Коэффициенты фиксируются граничными условиями (158) и (161) и условиями нормировки КК-мод в эффективной 4-мерной теории.

Получить соответствующее расщепление кварков несколько сложнее, для этого нужно ввести кинетические члены на границах или смешивание локализованных фермионов. На этом пути получается спектр масс, находящийся в согласии со стандартной моделью. Проблема возникает с третьим поколением кварков. Чтобы получить достаточно большую массу t-кварка, $(t, b)_L$-дублет должен быть локализован на IR бране. Это, в свою очередь, вызывает проблемы с измеряемой величиной константы связи $Zb\overline{b}$.

5.5. Электрослабые наблюдаемые в теориях вне стандартной модели

5.5.1. Электрослабые наблюдаемые и эффективный лагранжиан. Сначала мы покажем, как вычисляются электрослабые наблюдаемые, исходя из эффективного лагранжиана. Эта методика совершенно независима от дополнительных измерений и применима к любой слабо связанной теории вне рамок стандартной модели.

Начнем с лагранжиана на масштабе масс m_Z, включающего в себя t-кварк и хиггс, а также частицы вне стандартной модели.

Представим лагранжиан в виде

$$L_{\text{eff}} = L_{SM}(\tilde{e}_i) + L_{\text{new}}, \tag{162}$$

где $L_{SM}(\tilde{e}_i)$ — лагранжиан стандартной модели с учтенными петлевыми поправками. Константы связи в лагранжиане стандартной модели, обозначенные $\tilde{e}_i$, не принимают привычных численных значений, поскольку эффекты «новой физики» имеют место, и их следует учесть. Форма L_{new} для сектора калибровочных бозонов в 4-мерном пространстве:

$$L_{\text{new}} = -\frac{A}{4}\widehat{F}_{\mu\nu}\widehat{F}^{\mu\nu} - \frac{B}{2}\widehat{W}_{\mu\nu}\widehat{W}^{\mu\nu} - \frac{C}{4}\widehat{Z}_{\mu\nu}\widehat{Z}^{\mu\nu} + \frac{G}{2}\widehat{F}_{\mu\nu}\widehat{Z}^{\mu\nu} - w\tilde{m}_W^2\widehat{W}_\mu^+\widehat{W}^{\mu-} - \frac{z}{2}\tilde{m}_Z^2\widehat{Z}_\mu\widehat{Z}^\mu. \tag{163}$$

Причина появления «шляпок» над калибровочными полями $\widehat{A}$, $\widehat{W}$ и $\widehat{Z}$ состоит в том, что это не канонически нормированные поля. В (163) $\widehat{F}_{\mu\nu}$ и $\widehat{Z}_{\mu\nu}$ — обычные абелевы напряженности, для ненарушенной $U(1)_{EM}$:

$$\widehat{W}_{\mu\nu} = D_\mu\widehat{W}_\nu - D_\nu\widehat{W}_\mu, \tag{164}$$

где

$$D_\mu\widehat{W}_\nu = \partial_\mu\widehat{W}_\nu + i\tilde{e}A_\nu\widehat{W}_\mu. \tag{165}$$

Предположим, что оставшаяся часть лагранжиана стандартной модели в калибровочном секторе неизменна:

$$\begin{aligned}
L_{EM} &= -\tilde{e}\sum_i \overline{f}_i\gamma^\mu Q_i f_i\widehat{A}_\mu,\\
L_{CC} &= -\frac{\tilde{e}}{\tilde{s}_W\sqrt{2}}\sum_{i,j}\tilde{V}_{ij}\overline{f}_i\gamma^\mu P_L f_j\widehat{W}_\mu^+ + \text{c.c.},\\
L_{NC} &= -\frac{\tilde{e}}{\tilde{s}_W\tilde{c}_W}\sum_i \overline{f}_i\gamma^\mu[T_{3i}P_L - Q_i\tilde{s}_W^2]f_i\widehat{Z}_\mu.
\end{aligned} \tag{166}$$

С учетом (166), имеется 6 параметров A, B, C, G, w и z, но не все они физически наблюдаемы. Дело в том, что путем переопределения полей W_μ^a, B_μ и хиггсовского скаляра ϕ можно сократить число параметров с шести до трех. Поэтому только комбинации этих трех параметров могут появиться в наблюдаемых. Таких комбинаций три, и они называются S, T и U параметрами:

$$\begin{aligned}
\alpha S &= 4s_W^2c_W^2\left(A - C - \frac{c_W^2 - s_W^2}{c_W s_W}G\right),\\
\alpha T &= w - z,\\
\alpha U &= 4s_W^4\left(A - \frac{B}{s_W^2} + \frac{c_W^2}{s_W^2}C - \frac{2c_W}{s_W}G\right).
\end{aligned} \tag{167}$$

Попытаемся учесть эффекты «новой физики», переопределяя поле так, чтобы получить канонически нормированные кинетические члены.

Считая параметры A, B, C, G, w и z малыми, перейдем к канонически нормированным кинетическим членам с помощью следующего рескейлинга:

$$\begin{aligned}\widehat{A}_\mu &= \Big(1-\frac{A}{2}\Big)A_\mu + GZ_\mu,\\ \widehat{W}_\mu &= \Big(1-\frac{B}{2}\Big)W_\mu,\\ \widehat{Z}_\mu &= \Big(1-\frac{C}{2}\Big)Z_\mu.\end{aligned} \tag{168}$$

С учетом рескейлинга, лагранжиан имеет вид:

$$\begin{aligned}L_{\text{eff}} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - (1+w-B)\tilde{m}_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} -\\ &-\frac{1}{2}(1+z-C)\tilde{m}_Z^2 Z_\mu Z^\mu - \tilde{e}\Big(1-\frac{A}{2}\Big)\sum_i \overline{f}_i\gamma^\mu Q_i f_i A_\mu -\\ &-\frac{\tilde{e}}{\tilde{s}_W\sqrt{2}}\Big(1-\frac{B}{2}\Big)\sum_{ij}\tilde{V}_{ij}\overline{f}_i\gamma^\mu P_L f_j W_\mu^+ + \text{c.c.} -\\ &-\frac{\tilde{e}}{\tilde{s}_W\tilde{c}_W}\Big(1-\frac{C}{2}\Big)\sum_i \overline{f}_i\gamma^\mu[T_{3i}P_L - Q_i\tilde{s}_W^2 + Q_i\tilde{s}_W\tilde{c}_W G]f_i Z_\mu.\end{aligned} \tag{169}$$

Этот лагранжиан зависит от трех входных параметров $\tilde{e}$, $\tilde{s}_W$ и $\tilde{m}_Z$ (пренебрегая элементами СКМ). Нам хотелось бы «продать» эти параметры за хорошо измеряемые величины α, M_Z, G_F в стандартной модели. Найдем соотношения, связывающие параметры $\tilde{e}$, $\tilde{s}_W$, $\tilde{m}_Z$ и измеряемые величины α, M_Z и G_F, а затем и другие измеряемые выразим в этих переменных.

Из (169) получаем

$$4\pi\alpha = \tilde{e}^2(1-A). \tag{170}$$

В стандартной модели это соотношение имеет вид $4\pi\alpha = e^2$, поэтому

$$\tilde{e} = e\Big(1+\frac{A}{2}\Big). \tag{171}$$

Аналогично, определяя

$$M_Z^2 = \tilde{m}_Z^2(1+z-C), \tag{172}$$

получаем

$$\tilde{m}_Z^2 = \tilde{M}_Z^2(1-z+C). \tag{173}$$

Обратимся теперь к фермиевской константе G_F, измеряемой в μ-распаде (рис. 7).

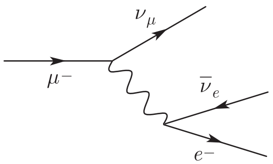


Рис. 7

В стандартной модели

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8s_W^2c_W^2m_Z^2}. \tag{174}$$

Можно ожидать два эффекта, которые способны изменить это соотношение:

а) модифицированные взаимодействия заряженных токов в (169);

б) сдвиг в пропагаторе W-бозона.

С учетом этих модификаций, получаем из эффективного лагранжиана:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{\tilde{e}^2(1-B)}{8\tilde{s}_W^2\tilde{c}_W^2\tilde{m}_Z^2(1+w-B)} \simeq \frac{\tilde{e}^2(1-w)}{8\tilde{s}_W^2\tilde{c}_W^2\tilde{m}_Z^2}. \tag{175}$$

Тогда из (174) получаем

$$\tilde{s}_W^2 = s_W^2\left[1 + \frac{c_W^2}{c_W^2 - s_W^2}(A - C - w + z)\right]. \tag{176}$$

Теперь нужно фиксировать часть лагранжиана, основанную на выбранных входных параметрах

$$\begin{aligned} L_Z &= -\frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu; \\ L_{EM} &= -e\sum_i \overline{f}_i\gamma^\mu Q_i f_i A_\mu. \end{aligned} \tag{177}$$

Выразим другие наблюдаемые в терминах выбранных входных наблюдаемых и оценим величину эффектов «новой физики». Например, слагаемое в лагранжиане, связанное с массой W имеет форму

$$L_W = -(1 + w - B)\tilde{m}_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = -(1 + w - B)\tilde{c}_W^2\tilde{m}_Z^2 W_\mu^+ W^{\mu-}, \tag{178}$$

где использовано соотношение $\tilde{m}_W = \tilde{m}_Z\tilde{c}_W$.

С помощью (176) и (173), выражение (178) перепишем в виде

$$\begin{aligned} L_W &= -(1 + w - B)(1 - z + C)\left[1 - \frac{s_W^2}{c_W^2 - s_W^2}(A - C - w + z)\right]M_Z^2 c_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = \\ &= -M_Z^2 c_W^2\left[1 - B + C + w - z - \frac{s_W^2}{c_W^2 - s_W^2}(A - C - w + z)\right]W_\mu^+ W^{\mu-}. \end{aligned} \tag{179}$$

Если перейти к переменным S, T, U (167), то получим предсказание для физической массы W как функции «эффектов новой физики»:

$$(M_W^2)_{phys} = (M_W^2)_{\text{стандарт.модель}}\left[1 - \frac{\alpha S}{2(c_W^2 - s_W^2)} + \frac{c_W^2\alpha T}{c_W^2 - s_W^2} + \frac{\alpha U}{4s_W^2}\right]. \tag{180}$$

Проанализируем также, как при нашем выборе входных параметров изменяются другие сектора лагранжиана. Сектор заряженных токов принимает вид

$$L_{CC} = -\frac{e}{\sqrt{2}s_W}\left(1 + \frac{1}{2}\left[A - B - \frac{c_W^2}{c_W^2 - s_W^2}(A - C - w + z)\right]\right)\sum_{ij} V_{ij}\overline{f}_i\gamma^\mu P_L f_j W^{\mu+} + \text{э.с.}, \tag{181}$$

или в переменных S, T и U:

$$L_{CC} = -\frac{e}{\sqrt{2}s_W}\left(1 - \frac{\alpha S}{4(c_W^2 - s_W^2)} + \frac{c_W^2\alpha T}{2(c_W^2 - s_W^2)} + \frac{\alpha U}{8s_W^2}\right)\sum_{ij} V_{ij}\overline{f}_i\gamma^\mu P_L f_j W^{\mu+} + \text{э.с.} \tag{182}$$

Отсюда определим сдвиг константы взаимодействия заряженных токов $h_{ij} = h_{ij}^{SM} + \delta h_{ij}$, где $h_{ij}^{SM} = V_{ij}$ и сдвиг, связанный с «новой физикой»:

$$\delta h_{ij} = V_{ij}\left(-\frac{\alpha S}{4(c_W^2 - s_W^2)} + \frac{c_W^2\alpha T}{2(c_W^2 - s_W^2)} + \frac{\alpha U}{8s_W^2}\right). \tag{183}$$

Сектор нейтральных токов тоже изменяется:

$$L_{NC} = -\frac{e}{s_W c_W}\left(1 + \frac{\alpha T}{2}\right)\sum_i \overline{f}_i\gamma_\mu\left[T_{3i}P_L - Q_i\left(s_W^2 + \frac{\alpha S}{4(c_W^2 - s_W^2)} - \frac{c_W^2 s_W^2\alpha T}{c_W^2 - s_W^2}\right)\right]f_i Z_\mu. \tag{184}$$

Введем аналогично h_{ij} константы связи $g_L = g_L^{SM} + \delta g_L$ и $g_R = g_R^{SM} + \delta g_R$. Тогда

$$\begin{aligned} g_L^{SM} &= T_{3i} - Q_i s_W^2, \\ g_R^{SM} &= -Q_i s_W^2, \\ \delta g_{iL,R} &= \frac{\alpha T}{2} g_{iL,R}^{SM} - Q_i \left(\frac{\alpha S}{4(c_W^2 - s_W^2)} - \frac{c_W^2 s_W^2 \alpha T}{c_W^2 - s_W^2} \right). \end{aligned} \tag{185}$$

Через эти переменные можно выразить, например, лево-правую асимметрию в Z-полюсе:

$$A_{LR} = \frac{\Gamma(Z \to f_L \overline{f}_L) - \Gamma(Z \to f_R \overline{f}_R)}{\Gamma(Z \to f_L \overline{f}_L) + \Gamma(Z \to f_R \overline{f}_R)}. \tag{186}$$

В переменных (185) асимметрия

$$\begin{aligned} A_{LR} = \frac{g_{lL}^2 - g_{lR}^2}{g_{lL}^2 + g_{lR}^2} &= A_{LR}^{SM} + \frac{4 g_{lL}^{SM} g_{lR}^{SM}}{(g_{lL}^{SM\,2} + g_{lR}^{SM\,2})^2} (g_{lR}^{SM} \delta g_{lL} - g_{lL}^{SM} \delta g_{lR}) = \\ &= A_{LR}^{SM} + \frac{4 g_{lL}^{SM} g_{lR}^{SM}}{(g_{lL}^{SM\,2} + g_{lR}^{SM\,2})^2} (g_{lR}^{SM} - g_{lL}^{SM}) \left(\frac{\alpha S}{4(c_W^2 - s_W^2)} - \frac{c_W^2 s_W^2 \alpha T}{c_W^2 - s_W^2} \right). \end{aligned} \tag{187}$$

Эту программу можно реализовать и для других наблюдаемых вблизи Z-полюса.

Прежде чем мы обратимся к исследованию влияния дополнительных измерений на электрослабые наблюдаемые, перепишем лагранжиан (163) в виде

$$\begin{aligned} L_{\text{new}} = \frac{\Pi'_{\gamma\gamma}(0)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\Pi'_{WW}(0)}{2} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + \frac{\Pi'_{ZZ}(0)}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \\ - \frac{\Pi'_{\gamma Z}(0)}{2} F_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \Pi_{WW}(0) W_\mu^+ W^{\mu -} + \frac{\Pi_{ZZ}(0)}{2} Z_\mu Z^\mu. \end{aligned} \tag{188}$$

Это выражение включает те же параметры, что и (163), но учитывает сдвиги в пропагаторах калибровочных бозонов. Вводя определения

$$\begin{gathered} \Pi_{WW}(0) = g^2 \Pi_{11}(0); \quad \Pi_{ZZ}(0) = (g^2 + g'^2) \Pi_{33}(0), \\ \Pi'_{\gamma\gamma}(0) = e^2 \Pi'_{QQ}(0); \quad \Pi'_{WW}(0) = g^2 \Pi'_{11}(0), \\ \Pi'_{ZZ}(0) = (g^2 + g'^2) \big(\Pi'_{33}(0) - 2 s_W^2 \Pi'_{3Q}(0) + s_W^4 \Pi'_{QQ}(0) \big), \\ \Pi'_{\gamma Z}(0) = g g' \big(\Pi'_{3Q}(0) - s_W^2 \Pi'_{QQ}(0) \big), \end{gathered} \tag{189}$$

выразим через Π переменные

$$\begin{aligned} S &= 16\pi \big(\Pi'_{33}(0) - \Pi'_{3Q}(0) \big), \\ T &= \frac{4\pi}{s_W^2 c_W^2 M_Z^2} (\Pi_{11}(0) - \Pi_{33}(0)), \\ U &= 16\pi \big(\Pi'_{11}(0) - \Pi'_{33}(0) \big). \end{aligned} \tag{190}$$

5.5.2. Электрослабые наблюдаемые и дополнительные измерения. Применим развитый в предыдущем подразделе формализм к моделям с дополнительными измерениями.

В первом примере будем считать фермионы локализованными в некоторой заданной точке. Мы должны принять определенное соглашение о связи между 4-мерными

и 5-мерными константами связи. Например, для плоского дополнительного измерения

$$\frac{1}{g^2} = \frac{R}{g_5^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{g'^2} = \frac{R}{g_5'^2}. \tag{191}$$

Если же фермионы локализованы в одной точке, например, $y = 0$, то связь фермионов с калибровочными бозонами задается не столько величинами g и g', сколько 4-мерным эффективным лагранжианом

$$L = -\int \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dy + g_5 \overline{\psi}(0) \gamma_\mu \tilde{A}^\mu(0) \psi(0). \tag{192}$$

Если калибровочное поле A_μ канонически нормировано, то слагаемое со взаимодействием в лагранжиане

$$L_{\text{int}} = \frac{g_5}{\sqrt{R}} \overline{\psi}(0) \gamma_\mu \psi(0) A^\mu(0), \tag{193}$$

где связь фермиона с калибровочным бозоном, с учетом (191), пропорциональна $gA^\mu(0)$. При таком рассмотрении весьма важно, что волновая функция в месте локализации равна единице. Но это условие нарушается, если фермионы локализованы в разных точках дополнительного измерения. В этом случае выбор волновой функции определяет параметры S, T, U. Эффективная волновая функция для легких мод:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}\int |\psi_\gamma(z)|^2 dz F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - -\frac{1}{4}\int |\psi_Z(z)|^2 dz Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - -\frac{1}{2}\int |\psi_W(z)|^2 dz W^+_{\mu\nu} W^{\mu\nu -} + \\ &\qquad + \int dz |\partial_z \psi_W|^2 W^+_\mu W^{\mu -} + \int dz |\partial_z \psi_Z|^2 Z_\mu Z^\mu + \text{хиггс. члены}. \end{aligned} \tag{194}$$

Это выражение получается при КК-разложении в 4-мерные поля.

Записывая

$$-\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} dz = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dz - \frac{1}{2}\int (\partial_5 A_\mu)^2 dz \tag{195}$$

и $A_\mu(x, z) = A^0_\mu(x) \psi^0_A(z) +$ КК-моды, получаем вклад в лагранжиан

$$-\frac{1}{4}\int dz |\psi_A(z)|^2 (\partial_\mu A^0_\nu(x) - \partial_\nu A^0_\mu(x))^2 + \frac{1}{2}\int dz |\partial_z \psi_A(z)|^2 A^0_\mu(x) A^{0\mu}(x). \tag{196}$$

Как видно из этого выражения, неплоская волновая функция $\psi^0_A(z)$ вносит вклад в 4-мерный массовый член. Тогда

$$\begin{aligned} g^2 \Pi_{11}(0) &= \int |\partial_z \psi_W(z)|^2 dz, \\ (g^2 + g'^2) \Pi_{33}(0) &= \int |\partial_z \psi_Z(z)|^2 dz, \\ 1 - g^2 \Pi'_{11}(0) &= \int |\psi_W(z)|^2 dz, \\ 1 - (g^2 + g'^2) \Pi'_{33}(0) &= \int |\psi_Z(z)|^2 dz. \end{aligned} \tag{197}$$

Теперь для получения параметров S, T и U достаточно подставить (197) в (190).

В качестве следующего примера выберем модель Randall–Sundrum со всеми фермионами и хиггсом на ТэВ-й бране, но с калибровочными полями, распространяющимися в объеме. Начнем с метрики

$$ds^2 = \frac{R}{z}(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2). \tag{198}$$

Действие имеет вид

$$S_{5D} = \int d^4x \int\limits_R^{R'} dz \frac{R}{z} \left[-\frac{1}{2g_5^2} W^+_{MN} W^{MN-} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{g_5^2} + \frac{1}{g_5'^2}\right) F_{MN} F^{MN} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4(g_5^2 + g_5'^2)} Z_{MN} Z^{MN} + \frac{v^2}{4} \delta(z - R') \frac{R}{z} W^+_M W^{M-} + \frac{v^2}{8} \delta(z - R') \frac{R}{z} Z_M Z^M \right]. \quad (199)$$

С этим действием выражения для масс и волновых функций W и Z имеют вид:

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{g_5^2}{4R\log(R'/R)} \frac{R^2 v^2}{R'^2}, \\ M_Z^2 &= \frac{g_5^2 + g_5'^2}{4R\log(R'/R)} \frac{R^2 v^2}{R'^2}; \\ \psi_W^{(0)} &= 1 + \frac{M_W^2}{4}\left[z^2 - R'^2 - 2z^2 \log\frac{z}{R} + 2R'^2 \log\frac{R'}{R}\right], \\ \psi_Z^{(0)} &= \psi_W^{(0)}(M_W \to M_Z). \end{aligned} \quad (200)$$

Нормировка волновых функций выбрана так, что $\psi(R') = 1$ (где фермионы локализованы).

Заметим, что хиггс, будучи локализован на ТэВ-й бране, «не допускает» плоских волновых функций W и Z в объеме, т.е. приводит к ненулевым значениям параметров S, T и U.

Если допустить простейшее соответствие между 4- и 5-мерными константами связи:

$$\frac{1}{g^2} = \frac{R\log(R'/R)}{g_5^2}, \quad \frac{1}{g'^2} = \frac{R\log(R'/R)}{g_5'^2}, \quad (201)$$

то

$$\Pi'_{11}(0) = \Pi'_{33}(0) = -\frac{R^2}{R'^2} v^2 \frac{1}{8}\left(2R'^2 \log\frac{R'}{R} - 2R'^2 + \frac{R'^2}{\log(R'/R)} + \ldots\right), \quad (202)$$

$$\Pi_{11}(0) = -\frac{M_W^2}{2}\Pi'_{11}(0), \quad \Pi_{33}(0) = -\frac{M_Z^2}{2}\Pi'_{33}(0). \quad (203)$$

С этими Π легко вычислить S, T и U:

$$S = -4\pi f^2 R'^2 \log\frac{R'}{R}, \quad T = -\frac{\pi}{2c_W^2} f^2 R'^2; \quad U = 0. \quad (204)$$

Здесь f — вакуумное среднее хиггсовского поля в стандартной модели.

Как видно из (204), вклады в S и T весьма существенны. Но это не единственные поправки, которые следует учесть. КК-моды калибровочных бозонов, локализованные на ТэВ-й бране, будут генерить большие поправки к 4-фермионным операторам, в частности, к μ-распаду и определению величины G_F. Введем новый параметр V, характеризующий вклад 4-фермионных операторов в G_F. Определим величину

$$4\sqrt{2} G_{F,W} \equiv \frac{1}{f^2/4 + \Pi_{11}(0)}, \quad (205)$$

тогда

$$G_F = G_{F,W}(1 + V), \quad (206)$$

где V учитывает, в том числе, дополнительные КК-моды калибровочных бозонов. Из диаграммы μ-распада очевидно, что для определения G_F нужно знать вклад от пропагатора W-бозона. Это значит, что необходимо вычислить полный 5-мерный пропагатор W между бранами при нулевом импульсе: $\Delta_W(q=0,R',R')$. Тогда величина

$$V = -\left(\Delta_W(0,R',R') + \frac{1}{f^2/4+\Pi_{11}(0)}\right)\left(\frac{f^2}{4}+\Pi_{11}(0)\right). \tag{207}$$

В модели Randall–Sundrum подстановка пропагатора W дает

$$V = \frac{g^2}{8} f^2 R'^2 \log\frac{R'}{R}. \tag{208}$$

С помощью переменных (204) и V-параметра можно выразить все Z-полюсные наблюдаемые стандартной модели и получить ограничение на R'. Для рассматриваемой модели $1/R' > 11$ ТэВ. Конечно, модель с локализованными фермионами не слишком привлекательна, хотелось бы иметь фермионы в объеме. Но даже в этом случае, за счет параметра T, имеется сильное ограничение на модель. Причина этих ограничений кроется в отсутствии custodial $SU(2)$-симметрии. Одно из возможных разрешений этой проблемы — допустить $SU(2)_R$ калибровочную симметрию в объеме RS, которая нарушается на планковской бране.

5.5.3. Электрослабые наблюдаемые и безхиггсовские модели. Как мы видели в предыдущем подразделе, в лидирующем порядке по $\log(R'/R)$ $S=T=0$. Однако первая поправка к этим параметрам $\sim O(1/(\log R'/R))$ может оказаться большой, и мы должны проверить, как это согласуется с экспериментальными данными.

Сначала рассмотрим безхиггсовскую модель подразд. 5.3 с дополнительными кинетическими членами на планковской бране

$$\frac{r}{4}W^{L2}_{\mu\nu} + \frac{r'}{4}\frac{1}{g_{5R}^2+\tilde g_5^2}(g_{5L}B_{\mu\nu}+\tilde g_5 W^{R3}_{\mu\nu})^2, \tag{209}$$

а также кинетическими членами на ТэВ-й бране

$$-\frac{R'}{R}\left[\frac{\tau'}{4}B^2_{\mu\nu} + \frac{\tau}{4}\frac{1}{g_{5R}^2+g_{5L}^2}(g_{5L}W^L_{\mu\nu}+g_{5R}W^R_{\mu\nu})^2\right]. \tag{210}$$

Если теперь повторить процедуру нахождения параметров S и T предыдущего подраздела, то в лидирующем порядке по τ можно получить

$$\begin{gathered} S \simeq \frac{6\pi}{g^2\log R'/R}\frac{2}{(1+g_{5R}^2/g_{5L}^2)}\frac{1}{(1+r/(R\log R'/R))}\left(1+\frac{4}{3}\frac{\tau}{R}\right), \\ T \simeq 0. \end{gathered} \tag{211}$$

Квадрат массы W-бозона

$$M_W^2 \simeq \frac{2}{(1+g_{5R}^2/g_{5L}^2)}\frac{1}{(1+r/(R\log R'/R))}\frac{1}{R'^2\log(R'/R)}\left(1-\frac{g_{5R}^2}{(g_{5R}^2+g_{5L}^2)}\frac{\tau}{(r+R\log(R'/R))}\right). \tag{212}$$

Экспериментальные ограничения, следующие из предположения о массе хиггса $m_H = 117$ ГэВ:

$$\begin{aligned} S &= -0{,}13 \pm 0{,}10, \\ T &= -0{,}17 \pm 0{,}11, \\ U &= 0{,}22 \pm 0{,}12. \end{aligned} \tag{213}$$

В безхиггсовских моделях $g_{5L} = g_{5R}$ и нет кинетических слагаемых. В этом случае

$$S = 1{,}15, \quad T = 0, \tag{214}$$

что полностью исключает такую форму модели.

Рассмотрим еще одну поучительную модель из трех безмассовых поколений фермионов. Для фермионов, практически локализованных на планковской бране, можно разложить параметр S по степеням $(R/R')^{2C_L-1} \ll 1$. В лидирующем порядке

$$S = \frac{6\pi}{g^2 \log R'/R}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{(2C_L-1)}{(3-2C_L)}\left(\frac{R}{R'}\right)^{2C_L-1} \log\frac{R'}{R}\right), \tag{215}$$

$U \simeq T \simeq 0$. Эта формула справедлива для $1/2 < C_L < 3/2$. При $C_L > 3/2$ поправки $\sim (R'/R)^2$ и численно малы.

Другой интересный пример возникает при $C_L = 1/2$, т. е. когда профиль локализации фермионов в объеме почти плоский. Тогда в лидирующем порядке

$$S = \frac{2\pi}{g^2 \log(R'/R)}\left(1 + (2C_L-1)\log\frac{R'}{R} + O\big((2C_L-1)^2\big)\right). \tag{216}$$

В плоском пределе $C_L = 1/2$, величина S из (216) подавлена фактором 3 по сравнению со значением S при локализации на планковской бране. Более того, лидирующие члены сокращаются при

$$C_L = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\log(R'/R)} \simeq 0{,}487. \tag{217}$$

При $C_L < 1/2$ параметр S становится отрицательным и большим, и в пределе локализации фермионов на ТэВ-й бране ($C_L \ll 1/2$):

$$S = -\frac{16\pi}{g^2}\frac{(1-2C_L)}{5-C_L}, \tag{218}$$

а в пределе $C_L \to -\infty$:

$$\begin{aligned} T &\to \frac{2\pi}{g^2\log(R'/R)}(1 + \operatorname{tg}^2\theta_W) \simeq 0{,}5, \\ U &\to -\frac{8\pi}{g^2\log(R'/R)}\frac{\operatorname{tg}^2\theta_W}{2+\operatorname{tg}^2\theta_W}\frac{1}{C_L} \simeq 0. \end{aligned} \tag{219}$$

Если выбрать $R \sim 1/M_{\mathrm{Pl}}$, первый КК-резонанс возникает в районе 1,2 ТэВ, для больших R первый резонанс спускается в область менее 1 ТэВа.

Вспомним о дуальном описании AdS-пространства и конформной теории поля (CFT). Тогда $1/R$ — масштаб, на котором теряется конформность CFT, и она, вероятно, становится асимптотически свободной. В этом случае $1/R$ может быть гораздо меньше планковского масштаба.

ГЛАВА 6

НА ПУТИ БОЛЬШОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ

6.1. Введение

Современные экспериментальные данные находятся в очень хорошем согласии с предсказаниями электрослабого сектора стандартной модели. Однако стандартная модель содержит большое число свободных параметров, например, число поколений фермионов и их массы, требует точной настройки (*fine-tuning*) параметров и т. д. Это обстоятельство неизбежно наводит на мысль о существовании физики вне стандартной модели.

Видится, по крайней мере, два пути расширения стандартной модели. Один из них — допущение нового уровня строения вещества — составные фермионы и (или) динамическое нарушение симметрии, заменяющие элементарный механизм Хиггса. Эта идея встречает значительные трудности при построении реалистических моделей. Среди этих трудностей — ненаблюдаемые до сих пор значительные эффекты нейтральных токов с изменением аромата (FCNC), присущие подобным моделям, а также отсутствие аномальных вкладов в вершину $Zb\bar{b}$, новые источники нарушения $SU(2)$-симметрии.

Другой класс расширения стандартной модели связан с объединением взаимодействий на малых расстояниях. В такой схеме не ожидается появления новой физики на ТэВ-м масштабе энергий, за исключением, пожалуй, суперсимметрии.

Из экспериментальных данных с LEP и SLC:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W &= 0{,}2317(3)(2); \\ \alpha_S(M_Z) &= 0{,}127(5)(2); \\ m_t &= 175 \pm 11^{+17}_{-19}\ \text{ГэВ}, \end{aligned} \tag{1}$$

причем центральные значения параметров и первая неопределенность (указанная в первых скобках) относятся к предположению о массе Хиггс-бозона $M_H = 300$ ГэВ. Вторая неопределенность связана с выбором массы Хиггс-бозона от $M_H = 1000$ ГэВ до $M_H = 60$ ГэВ.

Предсказываемые данные по массе t-кварка находятся в хорошем согласии с данными CDF коллаборации: $m_t \simeq 174 \pm 16$ ГэВ. Величина α_s определялась по форме пика Z-бозона. Она хорошо согласуется с величиной $\alpha_S = 0{,}123 \pm 0{,}006$, полученной на LEP при анализе адронных струй, хотя несколько больше, чем получено ранее, например, в глубоконеупругом рассеянии ($\alpha_S = 0{,}112 \pm 0{,}005$).

В суперсимметричных расширениях стандартной модели суперсимметричные партнеры и дополнительные Хиггс-бозоны достаточно тяжелые, и их вклады в радиационные поправки к наблюдаемым величинам пренебрежимо малы. Поэтому не следует ожидать каких-либо отклонений от предсказаний стандартной модели. Однако в этих моделях имеется легкий хиггс (60 ГэВ $< M_H <$ 150 ГэВ). Из-за

сильной корреляции между m_t и M_H в радиационных поправках, следует ожидать

$$\sin^2\theta_W = 0{,}2316(3)(1);$$
$$\alpha_s(M_Z) = 0{,}126(5)(1); \tag{2}$$
$$m_t = 160^{+11+6}_{-12-5}\ \text{ГэВ},$$

где первые значения соответствуют $M_H = M_Z$, а вторая неопределенность — крайним значениям в интервале масс Хиггс-бозона 60 ГэВ $< M_H <$ 150 ГэВ.

6.2. Большое объединение

Основная идея большого объединения сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий на некотором масштабе M_X — найти группу симметрии G, которая проявляла бы себя на масштабах M_X. На масштабе M_X эта симметрия должна нарушаться, приводя к группе стандартной модели $SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)$ при меньших энергиях. Если измерить калибровочные константы при малых энергиях и экстраполировать их на большие масштабы, то они должны объединиться на масштабе M_X. Если не рассматривать объединение с гравитацией, то следует считать, что $M_X \ll M_{\text{Pl}}$, где планковский масштаб масс $M_{\text{Pl}} \simeq G_N^{-1/2} \sim 10^{19}$ ГэВ (G_N — ньютоновская константа). Помимо объединения калибровочных взаимодействий, следует ожидать объединения кварков и лептонов в мультиплеты группы G. Это объединение объясняет квантование электрического заряда и нейтральность атомов — факт, принимаемый, но не объясняемый стандартной моделью. Более того, при таком объединении возникают взаимодействия между кварками и лептонами, приводящие к распаду протона.

Простейший пример объединения — модель Джорджи–Глешоу, основанная на калибровочной группе $SU(5)$. Группа $SU(5)$ на масштабе M_X нарушается до группы $SU(3)\times SU(2)_L\times U(1)_Y$, а на масштабе M_Z нарушается до группы $SU(3)\times U(1)_Q$.

В группе $SU(5)$ фермионы включают три поколения, причем каждое поколение содержит 15 фермионных состояний. Так, например, первое поколение состоит из трех дублетов левых кварков и шести синглетов правых кварков:

$$\begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L,\ u_{iR},\ d_{iR}, \tag{3}$$

а также левого лептонного дублета и правого лептонного синглета:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L,\ e^-_R. \tag{4}$$

Здесь индекс i относится к цвету.

Второе поколение включает c, s, ν_μ, μ; третье — t, b, ν_τ, τ.

Спинор с 15-ю компонентами, вообще говоря, соответствует группе $SU(15)$ с 224-мя векторными бозонами. В группе $SU(5)$ 15 левых частиц распределяются по двум мультиплетам:

$$15 = \overline{5} + 10. \tag{5}$$

В первом поколении квинтет, например, выбирают следующим образом:

$$\tilde{Q}^a_L = (\tilde{d}_r, \tilde{d}_y, \tilde{d}_b, e^-, \nu_e)_L, \tag{6}$$

или

$$Q_{aR} = (d_r, d_y, d_b, e^+, \overline{\nu}_e)_R, \quad a = 1, 2, \ldots, 5, \tag{7}$$

где r, y, b — цветовые индексы.

Декуплет соответствует антисимметризованному произведению

$$D_{ab} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_a Q_b - Q_b Q_a). \tag{8}$$

Действительно, для группы $SU(3)$, например, произведение $3 \times 3 = 6 + \overline{3}$, так и для группы $SU(5)$ $5 \times 5 = 10 + 15$.

Декуплет описывается антисимметричной матрицей

$$D_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{u}^b & -\tilde{u}^y & -u_r & -d_r \\ -\tilde{u}^b & 0 & \tilde{u}^r & -u_y & -d_y \\ \tilde{u}^y & -\tilde{u}^r & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_y & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_y & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Иногда говорят, что каждая из частиц декуплета построена из двух правых квинтетных частиц — квинтонов и гравитино — безмассовой нейтральной частицы со спином 3/2. Такие частицы предсказываются в рамках супергравитации. Фермионы группы $SU(5)$ объединены в два различных мультиплета, и объяснение этому дает группа $SO(10)$.

Вернемся к группе $SU(5)$. Эта группа имеет 24 генератора $(5 \times 5 - 1 = 24)$. Если рассматривать теорию, в которой $SU(5)$-симметрия локальная, то каждому генератору соответствует векторный бозон. Генератором группы будет, например, электрический заряд. Поскольку след генератора равен нулю, то сумма зарядов частиц в $SU(5)$-мультиплете будет равняться нулю. Поэтому

$$Q_{d_r} + Q_{d_y} + Q_{d_b} = Q_e, \tag{10}$$

и при точной цветовой симметрии $Q_d = -1/3$, т. е. $SU(5)$-симметрия объясняет дробность зарядов кварков.

Что касается 24 векторных бозонов, то при точной $SU(5)$-симметрии все они безмассовые. Восемь бозонов, осуществляющих переходы между тремя цветными кварками — глюоны, они относятся к подгруппе $SU(3)_C$. Три бозона, «ответственные» за переходы в лептонном секторе квинтета — W^+, W^- и W^0, связанные с группой $SU(2)_L$. Кроме того, имеется двенадцатый бозон B^0, источниками которого являются гиперзаряды частиц, он соответствует группе $U(1)$. Как и в стандартной модели, фотон и Z-бозон являются ортогональными суперпозициями полей W^0 и B^0. При этом глюоны взаимодействуют как с левыми токами $\overline{d}_{L_i}\gamma_\mu d^k_L$, так и с правыми $\overline{d}_{R_i}\gamma_\mu d^k_R$, т. е. не только с d-кварками, но и с u-кварками. W-бозоны взаимодействуют и с лептонами, и с кварками.

Двенадцать других векторных бозонов представляют собой два заряженных цветовых триплета:

$$X^i_{+4/3},\ \tilde{X}^i_{-4/3},\ Y^i_{+1/3},\ \tilde{Y}^i_{-1/3}, \tag{11}$$

где i — цветовые индексы, а нижние индексы соответствуют электрическим зарядам. Бозоны X и $\tilde{X}$ осуществляют переходы $\tilde{d} \leftrightarrow e^-$, а Y и $\tilde{Y}$ — переходы $\tilde{d} \leftrightarrow \nu$. Если рассматривать переходы в декуплете, обмен X- и Y-бозонами связан с нестабильно-

стью протона. Чтобы обеспечить наблюдаемое ограничение на время жизни протона ($\tau_p \geq 10^{30}$ лет), массы X- и Y-бозонов должны быть очень большими ($\geq 10^{14}$ ГэВ). Очевидно, что $SU(5)$, если она и существовала, очень сильно нарушена, однако некоторые черты симметрии могли сохраниться. В $SU(5)$-модели с минимальным набором частиц время жизни протона $\tau_p \sim 10^{29}$ лет.

Как можно ожидать, при энергиях $\sim M_X$ кварки способны преобразовываться в лептоны путем обмена X- и Y-бозонами. Однако и при имеющихся в настоящее время энергиях возможен обмен виртуальными X- и Y-бозонами. Очевидно, что такие обмены подавлены за счет больших масс в пропагаторах X- и Y-бозонов. Диаграммы, приводящие к распаду протона в объединенной $SU(5)$-теории, представлены на рис. 1.

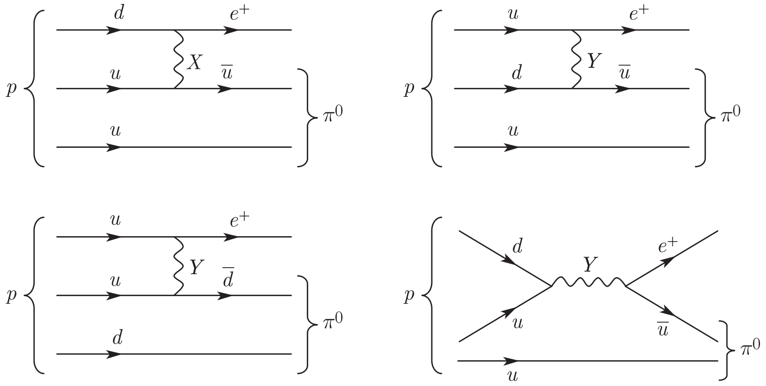


Рис. 1

Аналогично распаду μ-мезона ($\mu \to e\nu_e\overline{\nu}_\mu$), можно ожидать время жизни протона

$$\tau_{p\to e^+\pi^0} = \frac{AM_X^4}{\alpha_{\rm GUT}^2 M_p^5}. \tag{12}$$

Здесь безразмерная величина $A \sim 1$ характеризует вероятность нахождения двух кварков в начале координат. Только тогда очень короткодействующий X-бозон способен осуществить переход $ud \to e^+\overline{u}$. Фактор M_X^4 возникает за счет пропагатора X-бозона, а M_p^5 фактор обеспечивает правильную размерность времени жизни — τ_p. Если $M_X \simeq 3 \cdot 10^{14}$ ГэВ, $\alpha_{\rm GUT} \simeq 1/100$, $A \simeq 1$, то $\tau_p \simeq 4 \cdot 10^{29}$ лет.

Интересно отметить, что в процессах распада $p \to e^+\pi^0$ не сохраняется ни барионное число B, ни лептонное число L, однако разность $B - L$ сохраняется.

Современные экспериментальные данные (установка SuperKamiokande) дают ограничения на время жизни протона $\tau_p > 10^{32}$ лет, и это ограничение исключает простейшую версию $SU(5)$ как группы большого объединения. Хотя следует иметь в виду, что в $SU(5)$-модели с дополнительными хиггсовскими бозонами время жизни протона $\tau_p > 10^{34}$ лет.

6.3. Масштаб объединения

Поскольку в $SU(5)$-модели кварки и лептоны находятся в одних мультиплетах, то можно оценить слабый угол смешивания. Действительно, константы g и g', определяющие $\operatorname{tg}\theta_W = g'/g$, должны быть связаны на масштабах большого объеди-

нения коэффициентами Клебша–Гордона. Рассмотрим диаграмму (рис. 2), характеризующую смешивание Z_0 и γ через фермионную петлю (аналогично смешиванию $K^0 - \overline{K}^0$).

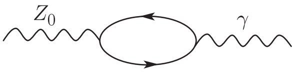


Рис. 2

Поскольку Z_0 и γ являются ортогональными состояниями $\langle Z_0 \,|\, \gamma\rangle = 0$, то после суммирования по всем фермионам в петле (лептонам и кваркам), полная константа связи в переходе $Z_0 \to \gamma$ должна равняться нулю. Константа связи фермионов с Z_0 пропорциональна $I_3 - Q\sin^2\theta_W$, а константа связи с фотоном $\sim Q$.

Для квинтета частиц в $SU(5)$ квантовые числа:

	I_3	Q
ν_e	1/2	0
e^-	−1/2	−1
$\tilde{d}_R$	0	1/3
$\tilde{d}_B$	0	1/3
$\tilde{d}_G$	0	1/3

Так как полная константа связи, просуммированная по всем фермионам в петле, должна обращаться в нуль, то

$$\sum Q(I_3 - Q\sin^2\theta_W) = 0. \tag{13}$$

Отсюда

$$\sin^2\theta_W = \frac{\sum QI_3}{\sum Q^2} = \frac{3}{8}. \tag{14}$$

Тот же результат получается, если суммирование провести по частицам из $SU(5)$-дублета. Поэтому на масштабах объединения

$$e^2 = g^2\sin^2\theta_W = \frac{3g^2}{8}. \tag{15}$$

Заметим, что величина $\sin^2\theta_W$ в выражении (14) гораздо больше, чем наблюдаемое сейчас значение $\sin^2\theta_W$. Однако противоречия нет, поскольку (14) относится к величине g'/g в точке объединения $M_X \sim 10^{15}$ ГэВ. Если обозначить через α_1, α_2, α_3 константы связи групп $U(1)$, $SU(2)$ и $SU(3)$, то на масштабах M_X:

$$\alpha_1(M_X) = \alpha_2(M_X) = \alpha_3(M_X) = \alpha_{\mathrm{GUT}}. \tag{16}$$

В приближении лидирующих логарифмов константы связи ведут себя следующим образом:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + R\alpha(\mu^2)\ln(q^2/\mu^2)}, \tag{17}$$

где $R = -\beta_0 = 11n_b - 4n_f/(12\pi)$, $n_b = 0$, 2 и 3 для групп $U(1)$, $SU(2)$ и $SU(3)$, и число фермионных поколений $n_f = 3$.

Когда в 70-х годах прошлого века впервые экстраполировали измеренные величины α_S, α_{em} и $\sin^2\theta_W$ на большие энергии, то оказалось что α_1, α_2 и α_3 пересекаются в одной точке $M_X \sim 3\cdot 10^{14}$ ГэВ и $\alpha_{\rm GUT} \simeq 1/43$. Этот результат казался очень красивым и в значительной степени стимулировал эксперименты по поиску распада протона. Однако более поздние и более точные измерения $\sin^2\theta_W$ и α_S на масштабах $\mu = M_Z$ показали, что функции α_1, α_2 и α_3 не пересекаются в одной точке (рис. 3).

Если масштаб объединения определяется пересечением α_1^{-1} и α_3^{-1}, то, экстраполируя $\sin^2\theta_W$ к имеющимся энергиям, получаем $\sin^2\theta_W = 0{,}214 \pm 0{,}004$, что значительно меньше измеренного значения $\sin^2\theta_W = 0{,}2313 \pm 0{,}0003$.

Интересная возможность большого объединения имеется в суперсимметричной версии $SU(5)$-модели. Включение новых степеней свободы изменяет коэффициент при $\ln(q^2/\mu^2)$, т. е. величина

$$R_{\rm SUSY} = \frac{9n_b - 6n_f}{12\pi}. \tag{18}$$

В результате масштаб объединения возрастает, и что замечательно, функции α_1, α_2 и α_3 пересекаются в одной точке при $M_{\rm GUT} \simeq 3\cdot 10^{16}$ ГэВ и $\alpha_{\rm GUT} \simeq 1/24$, как показано на рис. 4.

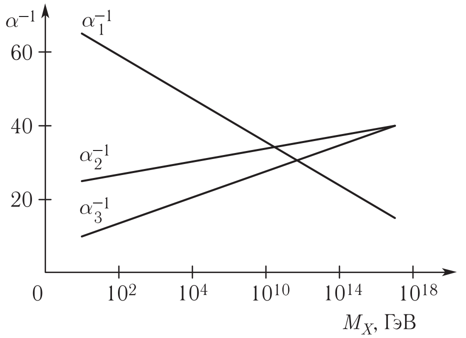


Рис. 3

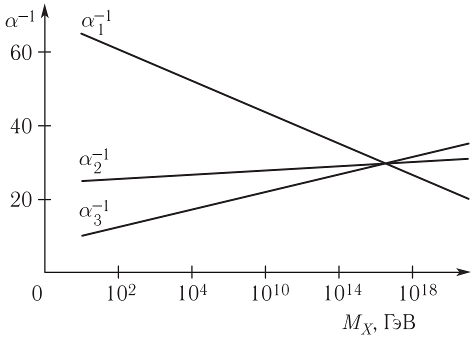


Рис. 4

Подводя итоги рассмотрения группы $SU(5)$ как кандидата на группу большого объединения, можно отметить следующие ее достоинства:

а) кварки несут дробный электрический заряд, поскольку в одном мультиплете с лептонами они имеют три цветовых заряда, а электрон — бесцветен, и для частиц мультиплета $\sum\limits_i Q_i = 0$.

б) Электрический заряд — изначально генератор группы $U(1)$, становится генератором неабелевой группы $SU(5)$. Коммутационные соотношения среди генераторов группы $SU(5)$ допускают лишь дискретные значения электрического заряда, т. е. квантование заряда есть следствие большого объединения.

в) Подобие между лептонными и кварковыми дублетами, проявляющееся в слабых взаимодействиях, например, $(\nu_l, l)_L$ и $(u, d_c)_L$ и соотношение $Q(\nu) - Q(l) = Q(u) - Q(d)$ является естественным следствием лептон-кварковой симметрии.

Однако, как уже отмечалось выше, $SU(5)$-модель в ее простейшем варианте предсказывает «слишком малые» времена жизни протона, уже отвергнутые современным экспериментом. Поэтому вполне правомерен поиск других групп симметрии большого объединения. Группа $SO(10)$ — группа ортогональных вращений в 10-мерном пространстве. В этой группе векторные частицы принадлежат 45-плету, а фермионы

относятся к спинорному представлению. $SO(10)$-спинор имеет 16 компонент, помимо 15 фермионов $SU(5)$-модели, имеется 16-й фермион — левое антинейтрино. Очевидно, что группа $SU(5)$ является подгруппой группы $SO(10)$, а 16-плет фермионов состоит из трех $SU(5)$-мультиплетов: $16 = 10 + \overline{5} + 1$.

Группа $SO(10)$ нарушена, и цепочка спонтанных нарушений выглядит следующим образом:

$$SO(10) \to SU(5) \to SU(3) \times SU(2) \times U(1) \to SU(3) \times U(1). \qquad (19)$$

Возможна и другая последовательность нарушений. Как и в случае $SU(5)$, $SO(10)$-модель в своем простейшем варианте предсказывает для времен жизни протона $\tau_p \simeq 10^{29}$ лет, и следовательно, противоречит эксперименту. Интересно, что кроме распада протона, $SO(10)$-модель дает предсказания для другого процесса с несохранением барионного числа ($\Delta B \neq 0$). Это вакуумный переход нейтрона в антинейтрон, аналогичный осцилляциям $K^0 - \overline{K}^0$, но гораздо более медленный.

Заметим, что в $SO(10)$-модели возникает отличная от нуля масса нейтрино. Действительно, фермионный 16-плет содержит как правые, так и левые нейтринные состояния.

Как мы уже отмечали в главе 1 части I, существуют четыре серии регулярных групп и соответствующих им алгебр:

$$A_l = SU(l+1), \quad B_l = SO(2l+1), \quad C_l = Sp(2l), \quad D_l = SO(2l), \qquad (20)$$

где l — ранг группы. Однако имеется еще пять исключительных групп, ранг которых фиксирован: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 (нижний индекс соответствует рангу). Среди кандидатов на группу большого объединения рассматриваются группы E_6, E_7, E_8.

Группа E_6 содержит $SO(10)$ как подгруппу. Группа E_6 имеет 78 калибровочных бозонов, а фермионы образуют 27-плет. Следует отметить две альтернативные E_6-модели. В первой E_6-модели имеется несколько поколений фермионных 27-плетов, каждый из которых имеет следующий $SO(10)$-состав: $27 = 16 + 10 + 1$. Поэтому кроме 16-ти известных фермионных состояний, каждое поколение имеет еще 11 состояний: синглетный кварк с $Q = -1/3$, синглетный майорановский лептон N^0 и дублет лептонов L^+, L^0. Предполагается, что все они сверхтяжелые. В другой E_6-модели все известные фермионы плюс несколько дополнительных частиц входят в 27-плет, который содержит 2 кварка с $Q = 2/3$ (u, c), 4 кварка с $Q = -(1/3)$ (d, s, b, h), 4 лептона $Q = -1$ (e, μ, τ, λ) и 5 лептонов с $Q = 0$ $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \nu_\lambda, \nu_\rho)$. Таким образом, E_6-модель предсказывает существование еще четырех до сих пор не обнаруженных частиц. Однако среди них нет t-кварка. Кроме того, в этой модели имеются нейтральные токи, изменяющие аромат кварков.

В модели, основанной на группе E_7, содержится 133 векторных бозона, фермионы относятся к 56-плету, включающему 6 цветных кварков, 6 цветных антикварков, 10 лептонов (4 заряженных и 6 нейтральных) и 10 антилептонов. К сожалению, в этой модели $\sin^2\theta_W$ оказывается вдвое больше измеряемой величины.

Модель, основанная на группе E_8 — слишком широкая, в ней 248 фермионов и 248 калибровочных бозонов, а число скалярных частиц превышает тысячу.

6.4. Большое объединение и дополнительные измерения

При ТэВ-х масштабах энергий мы живем в 4-мерном мире, характеризуемом координатами x и калибровочной группой $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ (3-2-1), как показано на рис. 5.

Предположим, что на масштабах объединения $\sim 10^{15} \div 10^{17}$ ГэВ проявляются другие измерения с размером R и характеризующиеся координатами y, а масштаб масс $\sim 1/R$ определяет масштаб объединения. Частицы, движущиеся в y направлении можно рассматривать как частицы, движущиеся в потенциальной яме шириной R, поэтому их импульс квантуется в единицах $1/R$. Для наблюдателя в 4-мерном пространстве частицы с разными p_y проявляют себя как частицы с различными массами. Это состояния Калуцы–Клейна, уже рассматривавшиеся в главе 4 части II. Важным предположением является структура калибровочных симметрий вдоль направления y. Будем считать, что состояния внутри ямы симметричны относительно калибровочной группы G большого объединения, а на границах ямы «выживает» лишь стандартная (3-2-1) калибровочная симметрия.

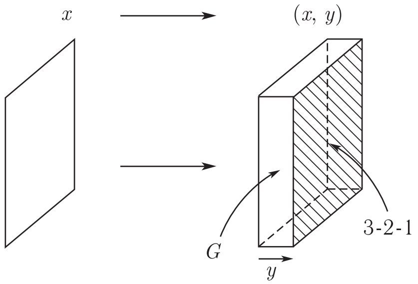


Рис. 5

Поскольку о нашем 4-мерном мире мы кое-что знаем, не будем пока рассматривать координаты x и сосредоточимся на дополнительных измерениях y (на рис. 6 показан случай трех дополнительных измерений).

Конечно, пространство дополнительных измерений объемно, но мы будем рассматривать его как ящик. Размеры дополнительных измерений не обязательно одинаковые. Важно лишь, чтобы калибровочная группа внутри объема дополнительных измерений была G-группой большого объединения, а группа симметрии стандартной модели проявлялась лишь на границах этого объема, имеющих меньшую размерность. На рис. 6 3-2-1 поверхность имеет единичную размерность, однако она может быть и 2-мерной поверхностью, и точкой в углу ящика. В такой картине большинство точек «чувствительно» к полной калибровочной группе G, и лишь «дефекты» на поверхностях меньшей размерности инвариантны относительно 3-2-1 калибровочной симметрии. Таким образом, в отличие от 4-мерного объединения, симметрия нарушается на пространственных «дефектах». Как можно было бы наивно ожидать, такие локальные дефекты не могут привести к наблюдаемому нами миру, где 3-2-1 силы очень различны, а другие взаимодействия, определяемые группой G, чрезвычайно слабые. Как следует из рис. 6, нарушение G носит второстепенный характер. Это действительно так для физики малых расстояний в рассматриваемом объеме дополнительных измерений. Однако это не так для физики больших расстояний. В этом случае важны граничные условия, к ним особенно чувствительны наиболее легкие состояния теории.

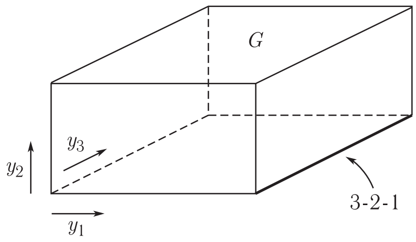


Рис. 6

Как такую картину согласовать с успехами (и неудачами) объединения в пространстве 4-х измерений? Следует считать, что объединение калибровочных констант, квантовые числа кварков и лептонов, отношение масс кварков и лептонов m_b/m_τ связаны с физикой большого объединения и не чувствительны к 3-2-1 дефектам, в то время как легкий хиггсовский дублет и отношение m_s/m_μ нетривиально связаны с таким дефектом.

Каково происхождение 3-2-1 дефекта и почему он локализован на границе объема, а не где-нибудь внутри? Ответ на этот вопрос можно попытаться найти, изучая

эффективную многомерную теорию. Новым по сравнению с 4-мерным случаем является наличие пространственных границ. Если в 4-мерном пространстве параметры калибровочных преобразований зависят от пространственно-временной точки $\xi_a(x)$, то для конечного объема нужно учесть граничные условия для этих параметров. В частности, на границе $y = y_b$ нужно определить различные условия для 3-2-1 калибровочных параметров $\xi_{321}(y_b)$ и остальных калибровочных параметров группы $G\xi_x(y_b)$. Например, если $\xi_x(y_b) = 0$ и $\xi_{321}(y_b) \neq 0$, то калибровочный бозон X большого объединения не имеет взаимодействий на этой границе, а 3-2-1 калибровочные бозоны стандартной модели, наоборот, имеют. Это утверждение проиллюстрировано на рис. 7 для группы $G = SU(5)$ и одного дополнительного измерения.

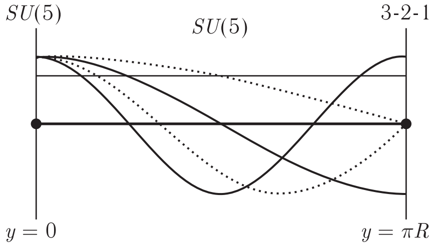


Рис. 7

В пятом измерении пространство представляет собой линию с границами $y = 0$ и $y = \pi R$. Сплошная и штриховая линии — профили параметров калибровочных преобразований ξ_{321} и ξ_x. Поскольку $\xi_x(y = \pi R) = 0$, то на точечном дефекте происходит нарушение $SU(5)$ до $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Этот подход — альтернатива механизму Хиггса спонтанного нарушения симметрии. Нет необходимости в Хиггс-бозоне, так как нарушение симметрии носит не динамический, а геометрический характер. Что происходит с полями $\phi(x, y)$, распространяющимися в таком многомерном пространстве? Геометрия, а также граничные условия определяют нормальные моды. Ситуация вполне аналогична квантованию частицы в ящике, только теперь допустимые значения p_y^2 соответствуют допустимым квадратам масс m^2 для 4-мерного наблюдателя (рис. 8).

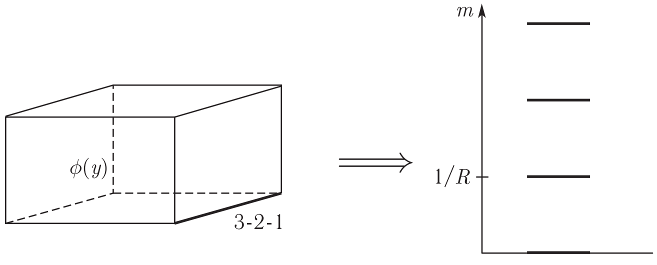


Рис. 8

Масштаб квантования для КК-башен $1/R$ определяется размером ящика, а квантовые числа на каждом уровне — граничными условиями. Важно, что моды, имеющие различные 3-2-1 квантовые числа q_1, q_2, q_3, имеют разные спектры, и это следствие граничных условий, нарушающих G-симметрию. При высоких энергиях дискретность состояний не важна, локальная симметрия G восстанавливается во всем объеме. Однако при низких энергиях дискретность становится существенной. При низких энергиях, как можно ожидать, возбуждаются лишь моды с нулевыми массами, поэтому становится важным вопрос о влиянии граничных условий на квантовые числа нулевых мод. На масштабе объединения мы хотели бы иметь в качестве нулевых мод лишь частицы стандартной модели и их суперпартнеров. Какой геометрии и каким граничным условиям соответствует эта картина? К каким предсказанием относительно объединения калибровочных констант, дублета масс легких хиггсов, распада протона и кварк-лептонных отношений масс приводит рассматриваемый подход?

6.5. Объединение калибровочных констант

Поскольку группа симметрии большого объединения G нарушается граничными условиями, то далеко не очевидно, что происходит объединение калибровочных констант. Действительно, при локальном нарушении симметрии на границе $y = y_b$, объединения калибровочных констант не происходит. Чтобы увидеть это, рассмотрим эффективную полевую теорию на масштабах, больших $1/R$. Поскольку многомерная калибровочная теория неперенормируема, в теорию нужно ввести параметр обрезания M_S и считать, что на этих масштабах рассматриваемая теория трансформируется в более фундаментальную, например теорию струн.

На масштабе M_S наиболее общий вид для действия, включающего калибровочное кинетическое слагаемое

$$S = \int dx\,dy \left[\frac{1}{g_5^2}F^2 + \delta(y - y_b)\frac{1}{\tilde{g}_a^2}F_a^2\right], \tag{21}$$

где первое слагаемое в скобках относится к «внутренности» многомерного объема и G-инвариантно. Второе слагаемое — кинетический оператор, локализованный на $y = y_b$ границе ($a = 1, 2, 3$ соответствуют калибровочным группам стандартной модели). Калибровочные константы g_a стандартной модели в эквивалентной 4-мерной теории получаются путем интегрирования по дополнительным измерениям:

$$\frac{1}{g_a^2} = \frac{R^d}{g_5^2} + \frac{R^{d'}}{\tilde{g}_a^2} \tag{22}$$

для d дополнительных измерений размером R и дефектом размерности $d' < d$. Как видно из (22), g_a зависят от $\tilde{g}_a$, т. е. они неуниверсальны, и поэтому объединения калибровочных констант нет. Однако если дополнительные измерения имеют большой размер, фактор R^d доминирует над $R^{d'}$, и объединение калибровочных констант восстанавливается.

Энергетическая зависимость калибровочных констант представлена на рис. 9.

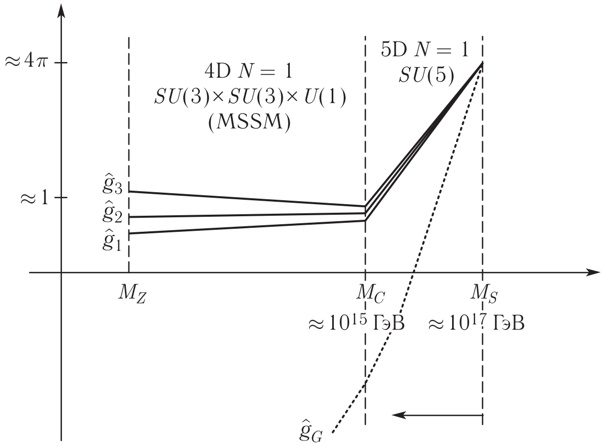


Рис. 9

Оценку масштаба компактификации $M_C \simeq 1/R \sim 10^{15}$ ГэВ и фундаментального масштаба $M_S \sim 10^{17}$ ГэВ для случая 5-мерной теории с группой объединения $G = SU(5)$ мы дадим ниже. Здесь же заметим, что константы связи не объединяются

на масштабе компактификации, они продолжают эволюционировать и на масштабах, на которых физика становится многомерной. Объединение происходит на фундаментальном масштабе M_S.

6.6. Распад протона

В 4-мерной суперсимметричной $SU(5)$-теории большого объединения имеется 2 хиггсовских дублета h_2, $\overline{h}_2$, а также их $SU(5)$-партнеры H_3, $\overline{H}_3$ — цветовые триплеты. В этой модели распад протона связан с обменом тяжелыми цветными хиггсовскими фермионами (рис. 10).

Крестик на внутренней линии означает наличие дираковской массы, связывающей фермионы H_3, $\overline{H}_3$. Что происходит в многомерных объединенных теориях с дефектами, нарушающими симметрию? На первый взгляд, ситуация выглядит довольно плохо: не совсем понятно, почему хиггсовские триплеты тяжелые, а хиггсовские дублеты — легкие. Масса хиггсовских триплетов будет определяться геометрией и должна быть порядка масштаба компактификации $1/R$. Из рассмотрения объединения калибровочных констант следует, что эта масса недостаточно велика, чтобы избежать проблем с распадом протона вследствие обмена H_3 фермионом.

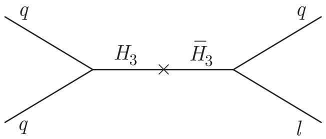


Рис. 10

Происхождение масс КК-мод легко понять, рассматривая волновые функции частиц в ящике с соответствующими граничными условиями. Например, в 5-мерной $SU(5)$-теории кривые на рис. 7 можно интерпретировать следующим образом: сплошная линия соответствует волновой функции хиггсовского дублета, а пунктирная линия — волновой функции хиггсовского триплета. Поскольку $E^2 = p_x^2 + p_y^2$, импульс p_y интерпретируется как масса в пространстве 4-х измерений, поэтому единственными безмассовыми модами являются дублетные хиггсовские моды, имеющие «плоские» волновые функции. Все хиггсовские триплетные моды имеют ненулевые p_y, поскольку граничные условия диктуют зануление волновой функции на 3-2-1 дефектах. В этом случае соответствующие 4-мерные поля имеют массы $\sim 1/R$. В минимальной модели, рассмотренной ниже, $1/R \sim 10^{15}$ ГэВ. Это значение меньше, чем масштаб объединения в 4-мерной теории, поэтому можно ожидать большую амплитуду для распада протона.

В 5-мерной теории массовые члены H_3 и $\overline{H}_3$ фермионов определяются пространственно-временными симметриями. Поскольку наименьшее фермионное представление в 5-мерном пространстве — дираковский фермион, то как H_3, так и $\overline{H}_3$ имеют сопряженных партнеров H_3^C и $\overline{H}_3^C$. 5-мерные кинетические слагаемые для этих фермионов содержат $H_3 \partial_y H_3^C$ и $\overline{H}_3 \partial_y \overline{H}_3^C$. С точки зрения 4-мерного наблюдателя, массы возникают за счет производных ∂_y, поэтому дираковская масса для H_3 связана с H_3^C, а не с $\overline{H}_3$. Поэтому на рис. 10 $\overline{H}_3$ следует заменить на H_3^C. С другой стороны, R-симметрия многомерной суперсимметричной теории подавляет любую связь H_3^C с кварками и лептонами. Поэтому амплитуда распада протона за счет обмена триплетом цветных хиггсовских фермионов в многомерных теориях большого объединения обращается в нуль.

Итак, отсутствие распада протона в теориях с размерностью четыре и пять гарантируется R-симметрией. Следовательно, основной вклад вносит размерность шесть и обмен тяжелым калибровочным X-бозоном с массой $\sim 1/R$.

6.7. Кварк-лептонные массовые соотношения

До сих пор предполагалось, что частицы в объеме многомерного пространства распространяются свободно. Однако вполне возможно, что некоторые частицы «живут» лишь в некоторых подпространствах. Например, кварки и лептоны могли бы распространяться в 3-мерном объеме, на 2-мерной поверхности, на 1-мерной линии или вообще быть ограниченными одной точкой. Кварки и лептоны, которые распространяются на дефектах с более низкой калибровочной симметрией, будут «чувствовать» лишь эту симметрию: они не будут принадлежать к мультиплетам более высокой, объединительной симметрии G. Было бы не совсем удачным поместить кварки и лептоны на 3-2-1 дефекты, так как при этом теряется понимание калибровочных квантовых чисел поколения, задаваемых высокой симметрией. Что отличает одно поколение от другого? Могли бы различные поколения распространяться в разном числе измерений? Это довольно притягательная идея, поскольку она ведет к геометрической трактовке иерархии масс поколений. Кварковые и лептонные массы возникают за счет юкавских констант связи, но юкавские взаимодействия подавлены в пространствах с размерностью, большей четырех. Причина — требования суперсимметрии. Поэтому юкавская связь между фермионом ψ_i и фермионом ψ_j должна быть локализована в точке y_0 на поверхности ящика, где многомерная Лоренц и суперсимметрия нарушены:

$$L_{\text{Юкава}} = \delta^{(d)}(y - y_0)\psi_i\psi_j H(y). \tag{23}$$

Поскольку наблюдаемые нами кварки и лептоны являются модами с нулевыми массами в ящике, они имеют волновые функции с нормировкой $\sim 1/\sqrt{V}$, где V — объем подпространства, в котором они распространяются. Чтобы получить эквивалентную 4-мерную теорию, нужно проинтегрировать по объему дополнительных измерений. Для фермионной массовой матрицы получаем

$$m_{ij} \sim \frac{1}{\sqrt{V_i V_j}}. \tag{24}$$

Это соотношение означает, что наиболее тяжелые фермионы распространяются в малых подпространствах пространства дополнительных измерений. Поэтому можно ожидать, что их юкавские константы связи локализованы не на дефектах, нарушающих G-симметрию, т. е. эти константы проявляют свойства, характерные для объединенной теории. С другой стороны, легкие фермионы «живут» в больших подпространствах, они «чувствительны» к дефектам. Юкавские константы взаимодействий, локализованные на этих дефектах, будут нарушать массовые соотношения, диктуемые объединенной теорией.

Таким образом, массовые соотношения между кварками и лептонами, следующие из объединенной теории, должны быть справедливы лишь для наиболее тяжелого поколения.

6.8. Минимальная модель

До сих пор обсуждались концептуальные преимущества многомерных теорий объединения. Покажем, что они весьма продуктивны при описании физики в интервале энергий от M_S до M_C.

На рис. 11 показаны значения $\alpha_S(M_Z)$ для несуперсимметричных моделей большого объединения α_S^{GUT} и суперсимметричных моделей большого объединения α_S^{SGUT}, а также интервал экспериментальных значений $\alpha_S(M_Z)$.

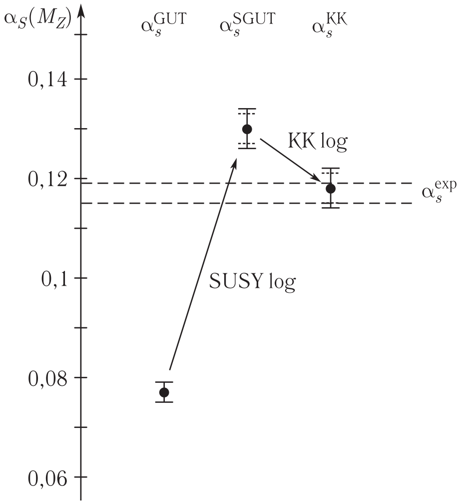


Рис. 11

Можно ли разницу между предсказанием суперсимметричных моделей большого объединения $\alpha_S(M_Z) = 0{,}130$ и экспериментальным значением $\alpha_S(M_Z) = 0{,}117$ отнести на счет виртуальных эффектов, включающих состояния Калуцы–Клейна? Оказывается, если рассмотреть суперсимметричную теорию с d дополнительными измерениями одинакового радиуса, то для $d \geq 3$ за счет мод Калуцы–Клейна не возникает поправок к величине $\alpha_S(M_Z)$. Для $d = 1, 2$ лидирующие логарифмические поправки

$$\delta\alpha_S \simeq -\frac{6}{7n\pi}\alpha_S^2 \ln \frac{M_S}{M_C}, \qquad (25)$$

где $n = 2$ для $d = 1$, а для $d = 2$ $n \geq 2$ — положительное целое число, описывающее геометрию пространства дополнительных измерений. В (25) $\delta\alpha_S$ — разность между вкладом КК-мод и предсказанием суперсимметричной модели большого объединения $\delta\alpha_S = \alpha_S^{\rm KK} - \alpha_S^{\rm SGUT}$.

Результат (25) получается в предположении о том, что хиггсовские дублеты не содержатся в векторном мультиплете. В противном случае знак поправки изменяется на противоположный, и отличие экспериментальных значений α_S возрастает.

На рис. 11 показаны поправки к величине $\alpha_S(M_Z)$ за счет КК-мод. Видно, что результат вполне сопоставим с экспериментальным значением.

6.9. Объединение юкавских констант

Выше уже говорилось, что наиболее тяжелые кварки и лептоны распространяются в подпространствах меньших размерностей. В минимальной теории тяжелое третье поколение должно быть локализовано на границе пятого измерения. Чтобы сохранить понимание $SU(5)$ квантовых чисел, это должны быть «$SU(5)$-границы», а не границы 3-2-1, приводя к «древесному» значению $SU(5)$-масс $m_b = m_\tau$. В несуперсимметричных теориях большого объединения поправки к этому соотношению возникают за счет «бегущих» юкавских констант и могут быть вычислены. Однако имеются еще и поправки от неизвестной физики на масштабе объединения, а также суперсимметричные поправки. В минимальной модели $G = SU(5)$, поэтому для массы b-кварка

имеем

$$\frac{\delta m_b}{m_b} \simeq -\frac{5(4g^2 - y_t^2)}{112\pi^2} \ln \frac{M_S}{M_C}, \quad (26)$$

где g и y_t — 4-мерная калибровочная константа и наибольшая юкавская константа на масштабе компактификации ($g = 0{,}6, y_t \simeq 0{,}6$). Как и в (25), знак минус улучшает согласие с экспериментальными данными.

Поскольку минимальная модель имеет лишь одно дополнительное измерение, массы не всех ароматов можно понять на основе объемных факторов. Однако некоторые из кварков и лептонов будут иметь малые массы, так как для легких фермионов массовые соотношения объединенной теории неприменимы. Например, если правый u-кварк и электрон e распространяются во всем объеме, то они будут нулевыми модами 10-плета $SU(5)$: $T(u, e)$. Однако в этом случае легкий кварковый дублет q принадлежит не этому 10-плету, а другому 10-плету, имеющему граничные условия с противоположным знаком — $T'(q)$. Таким образом, легкие кварки и лептоны не объединяются так, как в 4-мерной $SU(5)$. Чтобы обнаружить отсутствие массовых соотношений, рассмотрим юкавскую связь правого d-кварка и лептонного дублета l, объединенных в 5-плете $F(d, e)$. Тогда массовое слагаемое в лагранжиане возникает за счет различных взаимодействий $TF\overline{H}$ и $T'F\overline{H}$, поэтому очевидно, что $SU(5)$-соотношения между массами отсутствуют. Привлекательной выглядит возможность локализации двух легчайших поколений 5-плетов $F_{1,2}$ на границах, а соответствующие 10-плеты $T_{1,2}$ считать объемными модами. В этом случае нет отличий $F_{1,2}$ по ароматам, поэтому следует ожидать большие углы смешивания нейтрино. Малые массы нейтрино возникают при введении правых нейтрино $N_{1,2,3}$ и рассмотрении «see-saw» механизма.

6.10. Предсказания распада протона

Как отмечалось выше, многомерные суперсимметричные теории обладают $U(1)_R$-симметрией, подавляющей распад протона за счет генераторов размерности пять и обмена цветовым триплетом хиггсовских бозонов. R-симметрия возникает при фазовом вращении в суперпространстве. В 4-мерном пространстве суперсимметричных теорий для избежания нарушения барионного и лептонного числа можно ввести «руками» дискретную симметрию. В многомерных теориях R-четность понимается как подгруппа непрерывной R-симметрии. Предсказывают ли эти теории стабильность протона? Нет, не предсказывают. Тяжелые калибровочные бозоны объединенной теории индуцируют распад протона, поэтому необходимо знать массы и константы связи этих бозонов.

В 5-мерной $SU(5)$ имеются калибровочные бозоны X с массой легчайшей моды $1/(2R) = \pi M_C/2$. Чтобы получить экспериментальное значение слабого угла смешивания, нужно большое значение отношения M_S/M_C, т. е. малые M_C. Из наблюдаемых значений калибровочных констант следует оценка $M_C \simeq 5 \cdot 10^{14}$ ГэВ, т. е. этот калибровочный бозон имеет такую же массу, как и в 4-мерной $SU(5)$-модели Джорджи–Глешоу. Однако мы еще не исследовали константы связи X-бозона в 5-мерной теории. Как уже отмечалось выше, электрон и u-кварк настолько легкие, что они распространяются во всем объеме, и эти состояния описываются двумя 10-плетами $T_1(u, e)$ и $T'(q)$. Это означает, что обычные взаимодействия X-бозона, типа q^+uX, e^+qX, не генерируются объемными калибровочными взаимодействиями в 5-мерной теории (по крайней мере для самого легкого поколения), поэтому в отсутствие СКМ-смешивания между поколениями, протон стабилен. Мода распада,

ожидаемая за счет СКМ-смешивания, $p \to K^+\nu$. Однако скорость подобного распада зависит от структуры ароматов и вряд ли может быть детектируема.

Замечательно, что есть дополнительный источник q^+uX, e^+qX взаимодействий. Подобные взаимодействия возникают за счет вкладов от граничных условий для калибровочных взаимодействий, и поэтому они подавлены объемным фактором M_C/M_S. К сожалению, время жизни точно предсказать нельзя, поскольку калибровочные взаимодействия на границе содержат неизвестную безразмерную константу связи. Если эта константа порядка единицы, то $\tau_p \sim 10^{34}$ лет. При этом все моды распада $e^+\pi^0$, $\mu^+\pi^0$, e^+K^0, μ^+K^0, $\pi^+\nu$ и $K^+\nu$ имеют сравнимые бренчинги. Наиболее обещающей модой является $e^+\pi^0$. Большое смешивание 5-плетов F_1 и F_2 подразумевает

$$\frac{\Gamma(p \to \mu^+\pi^0)}{\Gamma(p \to e^+\pi^0)} \simeq \frac{\Gamma(p \to e^+K^0)}{\Gamma(p \to \mu^+K^0)}, \tag{27}$$

причем это соотношение не зависит от механизма нарушения суперсимметрии, к обсуждению которого мы приступаем. Покажем, что граничные условия способны нарушать как суперсимметрию, так и калибровочную симметрию объединенной теории. В минимальной 5-мерной $SU(5)$-модели имеется единственный способ подобного нарушения. В 5-мерном пространстве есть два независимых суперсимметричных преобразования, образующих дублет $SU(2)$ R-симметрии. Однако границы такого пространства — четырехмерные, и они соответствуют единственному преобразованию суперсимметрии. Таким образом, границы можно рассматривать как дефекты в пространстве преобразований суперсимметрии. Ключевой вопрос: два преобразования суперсимметрии S и S', относящиеся к двум границам, одинаковые или нет (рис. 12)?

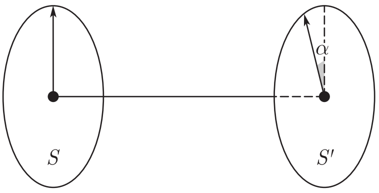


Рис. 12

Очевидно, если $\alpha \to 0$, то $S = S'$, остается одно преобразование суперсимметрии S, которое является симметрией низкоэнергетической 4-мерной теории. Если же $\alpha \neq 0$, то суперсимметрия низкоэнергетической теории нарушена, причем масштаб масс нарушения симметрии $\tilde{m} = \alpha M_C$. Присутствие непрерывного параметра α, описывающего дефекты, — новый элемент по сравнению с нарушением калибровочной симметрии в $SU(5)$-теории, где масштаб нарушения $\simeq M_C$.

В заключение этого раздела следует подчеркнуть, что рассматриваемый подход к объединению сильных и электрослабых взаимодействий основан на трех «столпах» физики вне стандартной модели — гипотезах большого объединения, суперсимметрии и дополнительных измерений.

Приложение. Массы нейтрино в теориях большого объединения

Массы нейтрино и их связь с массами кварков и заряженных лептонов весьма интересны с точки зрения теорий большого объединения. Согласно see-saw механизму, малость нейтринных масс объясняется большими массами майорановских нейтрино, причем масса майорановского нейтрино может быть порядка масштаба большого объединения. Следовательно, экспериментальное обнаружение масс нейтрино и нейтринных осцилляций, пожалуй, впервые обнаруживает влияние физики большого объединения.

Сначала рассмотрим основные идеи теорий большого объединения, основываясь на симметриях стандартной модели, в которой нейтрино — безмассовые частицы. В стандартной модели имеются 4 сохраняющихся на классическом уровне заряда — три лептонных и барионное число:

$$L_e,\ L_\mu,\ L_\tau,\ B. \tag{1}$$

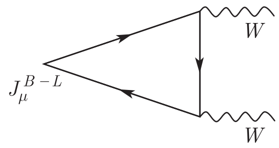


Рис. 1

За счет квантовой аномалии Адлера–Белла–Джекива (рис. 1) остается только три сохраняющиеся величины (заряда), которые можно выбрать следующим образом

$$L_e - L_\mu, \quad L_\mu - L_\tau, \quad B - L, \tag{2}$$

где $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ — полное лептонное число. Соответствуют ли эти заряды глобальным фундаментальным симметриям или являются случайными симметриями низкоэнергетической эффективной теории, подобно слабому изоспину — приближенной симметрии слабых взаимодействий при энергиях, меньших массы W? Массы нейтрино и смешивание нарушают две из этих симметрий: $L_e - L_\mu$ и $L_\mu - L_\tau$. Но является ли $B - L$ фундаментальной симметрией? $B - L$ сохраняется, если нейтрино имеют только дираковские массы, и майорановские массы правых нейтрино обращаются в ноль:

$$m_D = h_\nu \langle H_1 \rangle, \quad M = 0. \tag{3}$$

Это соотношение требует юкавскую константу $h_{\nu 22} \sim 10^{-14}$, чтобы получить $m_{\nu_2} \sim 5 \cdot 10^{-3}$ эВ. Эту возможность нельзя исключить, хотя она может показаться неестественной. $B - L$-симметрия, однако, может быть нарушенной на некотором промежуточном масштабе масс $\Lambda \sim 10^{16}$ ГэВ, где в SUSY-расширении стандартной модели объединяются калибровочные константы. Объединение калибровочных констант предполагает, что калибровочная группа стандартной модели является частью более «широкой» группы

$$G_{SM} = U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_C \subset SU(5) \subset \ldots \tag{4}$$

Простейшая группа большого объединения — $SU(5)$. В этой группе кварки и лептоны принадлежат мультиплетам

$$10 = (q_L, u_R^C, e_R^C), \quad 5^* = (d_R^C, l_L), \quad 1 = \nu_R. \tag{5}$$

Заметим, что в отличие от калибровочных полей, кварки и лептоны не объединяются в одном неприводимом представлении. В частности, правые нейтрино являются калибровочными синглетами, т. е. они могут иметь майорановские массы, не генерируемые

в результате спонтанного нарушения симметрии. Кроме того, имеются три юкавских взаимодействия, связывающие хиггсовские поля $H_1(5)$ и $H_2(5^*)$:

$$L = h_{uij} 10_i 10_j H_1(5) + h_{dij} 5_i^* 10_j H_2(5^*) + h_{\nu ij} 5_i^* 1_j H_1(5) + M_{ij} 1_i 1_j. \tag{6}$$

Массовые матрицы u-, d-кварков, заряженных лептонов и массовая матрица дираковского нейтрино задаются соотношениями $m_u = h_u v_1$, $m_d = h_d v_2 = m_e$ и $m_D = h_\nu v_1$, где $v_1 = \langle H_1 \rangle$ и $v_2 = \langle H_2 \rangle$. $SU(5)$ массовое соотношение $m_d = m_e$ весьма оправдано для третьего поколения, но требует поправок для второго и первого поколений. Майорановские массы M не зависят от механизма Хиггса, т. е. могут быть гораздо больше электрослабого масштаба v.

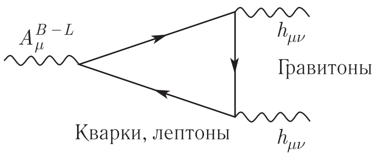


Рис. 2

Поскольку введены правые нейтрино, $B-L$-заряды каждого добавленного поколения дают ноль, т. е. нет смешанной $B-L$-гравитационной аномалии (рис. 2) и $U(1)_{B-L}$-симметрия входит, наряду с группой $SU(5)$, в более общую группу большого объединения.

$$A_\mu^{B-L} h_{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

На этом пути приходим к калибровочной группе $SO(10)$. В этом случае все кварки и лептоны одного поколения содержатся в одном мультиплете

$$16 = (q_L, u_R^C, e_R^C, d_R^C, l_L, \nu_R). \tag{7}$$

Кварковые и лептонные массовые матрицы получаются из структуры взаимодействий фермионных мультиплетов 16_i с хиггсовскими мультиплетами $H_1(10)$, $H_2(10)$ и $\Phi(126)$:

$$L = h_{uij} 16_i 16_j H_1(10) + h_{dij} 16_i 16_j H_2(10) + h_{Nij} 16_i 16_j \Phi(126). \tag{8}$$

При этом нужно предполагать, что два хиггсовских дублета стандартной модели содержатся в 2-х 10-плетах H_1 и H_2. Это предположение приводит к кварковым массовым матрицам $m_u = h_u v_1$, $m_d = h_d v_2$ ($v_1 = \langle H_1 \rangle$, $v_2 = \langle H_2 \rangle$) и лептонным массовым матрицам

$$m_D = m_u, \quad m_e = m_d. \tag{9}$$

В отличие от $SU(5)$, в группе $SO(10)$ массовые матрицы дираковского нейтрино и u-кварка связаны между собой. Отметим также, что все матрицы симметричны. Майорановская массовая матрица $M = h_N \langle \Phi \rangle$, которая тоже «генерируется» спонтанным нарушением симметрии, не зависит от m_u и m_d.

В литературе рассматриваются и более «широкие», по сравнению с $SO(10)$, группы симметрии. Особый интерес вызывает последовательность исключительных групп

$$E_4 = SU(5) \subset E_5 = SO(10) \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8. \tag{10}$$

Последние две группы в этой последовательности могут объединять различные поколения, т. е. ограничивать матрицы юкавских взаимодействий. Эти группы естественным образом возникают в теориях многомерной супергравитации и в струнных теориях.

Что можно сказать о предсказаниях теорий большого объединения, касающихся масс и смешивания нейтрино?

Оказывается, что в этих теориях матрица лептонного смешивания удивительно проста:

$$U = \begin{pmatrix} * & * & \square \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где через «$*$» обозначены матричные элементы, чьи величины изменяются в интервале от 0,5 до 0,8; в то время как для матричного элемента «$\square$» существует лишь верхняя граница $|U_{e3}| < 0{,}16$. В дальнейшем обсудим ограничения на массу нейтрино в простейших моделях большого объединения, основанных на группах симметрии $SU(5)$ и $SO(10)$.

1. Модели, основанные на группе $SU(5)$. В рамках $SU(5)$-теории наблюдаемая иерархия масс кварков и заряженных лептонов основана на механизме Фронати — Нильсена спонтанного нарушения $U(1)_F$-симметрии поколений. Юкавская связь в этой модели возникает за счет неперенормируемых взаимодействий после того, как калибровочное синглетное поле Φ приобретает вакуумное среднее

$$h_{ij} = g_{ij}\left(\frac{\langle\Phi\rangle}{\Lambda}\right)^{Q_i+Q_j}, \tag{12}$$

где g_{ij} — константа связи $\sim O(1)$, Q_i — $U(1)_F$-заряды различных фермионов, причем $Q_\Phi = -1$. Масштаб взаимодействия выбирается достаточно большим, $\Lambda > \Lambda_{\mathrm{GUT}}$.

Заряды Q_i для различных представлений приведены в таблице.

Таблица 1

ψ_i	10_3	10_2	10_1	5^*_3	5^*_2	5^*_1	1_3	1_2	1_1
Q_i	0	1	2	a	a	$a+1$	b	c	d

Юкавская матрица имеет вид

$$h_e, h_\nu \sim \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где параметр $\varepsilon = \langle\Phi\rangle/\Lambda$.

Соответствующие массы u-, d-кварков и заряженных лептонов

$$\begin{gathered} m_t : m_c : m_u = 1 : \varepsilon^2 : \varepsilon^4, \\ m_b : m_s : m_d = m_\tau : m_\mu : m_e \simeq 1 : \varepsilon : \varepsilon^3. \end{gathered} \tag{14}$$

Из подгонки кварковых и лептонных масс на масштабе большого объединения, параметр смешивания $\varepsilon = 0{,}06$.

Массовая матрица легких нейтрино получается с помощью «see-saw»-формулы

$$m_\nu = -m_D \frac{1}{M} m_D^T \sim e^{2a} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

2. Модели, основанные на группе $SO(10)$. Поскольку в модели $SO(10)$ все кварки и лептоны объединены в одном мультиплете, то трудно согласовать большое смешивание нейтрино с малым кварковым смешиванием. Ниже мы проиллюстрируем

эту проблему примером, использующим «see-saw»-формулу между u-кварковой матрицей и матрицей дираковского нейтрино:

$$m_u = m_D, \tag{16}$$

а также экспериментально известными свойствами массовой матрицы u-кварка. При $m_D = m_u$ «see-saw» массовое соотношение

$$m_\nu = -m_u \frac{1}{M} m_u^T. \tag{17}$$

Большое нейтринное смешивание выглядит загадочным, так как кварковое смешивание мало. Оказывается, однако, что вследствие известных свойств массовой матрицы u-кварка, эта загадка вполне разрешима, если массы тяжелых нейтрино удовлетворяют определенным иерархическим соотношениям.

Из экспериментальных данных по слабым распадам следует, что кварковые матрицы имеют следующий вид

$$m_{u,d} \sim \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^3 e^{i\psi} & 0 \\ \varepsilon^3 e^{i\phi} & \rho\varepsilon^2 & \eta\varepsilon^2 \\ 0 & \eta\varepsilon^2 & e^{i\psi} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — параметр, определяющий смешивание ароматов; $\rho = |\rho| e^{i\alpha}$, $\eta = |\eta| e^{i\beta}$ — комплексные параметры $\sim O(1)$. В выражении (18) выбран так называемый «иерархический» базис, в котором недиагональные матричные элементы малы по сравнению с произведениями соответствующих собственных значений $|m_{ij}|^2 \leq O(|m_i m_j|)$. В отличие от обычного предположения об эрмитовости массовой матрицы, $SO(10)$-инвариантность диктует симметричность массовой матрицы. Все параметры для u- и d-кварков могут принимать различные значения. Типичный выбор — $\varepsilon_u \simeq 0{,}07$, $\varepsilon_d \simeq 0{,}2$. Согласие с экспериментом улучшается, если добавить элемент (13) $\sim O(\varepsilon^4)$, который, однако, не важен для дальнейшего анализа.

Нам неизвестна структура майорановской массовой матрицы $M = h_N \langle \Phi \rangle$. Однако в моделях с симметрией поколений эта матрица должна быть подобной кварковой матрице, т. е. ее структура должна быть независимой от хиггсовского поля. В этом случае следует ожидать

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & 0 \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

причем $M_{12} \ll M_{22} \sim M_{23} \ll M_{33}$.

Симметричная массовая матрица M может быть диагонализована унитарной матрицей

$$U^{(N)+} M U^{(N)*} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Используя формулу «see-saw», можно оценить массовую матрицу легкого нейтрино. Поскольку выбор майорановской матрицы M фиксируется базисом правых нейтрино, допустимые значения фаз дираковской массовой матрицы ограничены. В (18) фазы матричных элементов должны быть фиксированными.

Как известно, угол смешивания $\nu_\mu - \nu_\tau$ должен быть большим. Это условие требует, чтобы $m_{\nu_{i,j}} \simeq O(1)$ для $i, j = 2, 3$. Это, в свою очередь, определяет иерархию массовой матрицы тяжелого майорановского нейтрино

$$M_{12} : M_{22} : M_{33} = \varepsilon^5 : \varepsilon^4 : 1. \tag{21}$$

Если $M_{33} \simeq M_3$, $M_{22} \simeq \sigma\varepsilon^4 M_3$, $M_{23} \simeq \xi\varepsilon^4 M_3 \sim M_{22}$ и $M_{12} = \varepsilon^5 M_3$, то для масс и смешиваний в $O(\varepsilon^4)$ порядке получаем

$$M_1 \simeq -\frac{\varepsilon^6}{\sigma} M_3, \quad M_2 \simeq \sigma\varepsilon^4 M_3, \tag{22}$$

причем $U_{12}^{(N)} = -U_{21}^{(N)} = \varepsilon/6$, $U_{23}^{(N)} = O(\varepsilon^4)$ и $U_{13}^{(N)} = 0$.

Заметим, что σ всегда можно выбрать вещественной. Тогда массовая матрица нейтрино

$$m_\nu = -\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon e^{2i\phi} & 0 \\ \varepsilon e^{2i\phi} & -\sigma e^{2i\phi} + 2\rho e^{i\phi} & \eta e^{i\phi} \\ 0 & \eta e^{i\phi} & e^{2i\phi} \end{pmatrix} \frac{v_1^2}{M_3}. \tag{23}$$

Эта матрица имеет ту же структуру, что и матрица (13) в $SU(5) \times U(1)_F$-модели. Поскольку, как и требуется, все элементы матрицы, включающие индексы 2 и 3, составляют $O(1)$, угол смешивания θ_{23} достаточно велик. Угол смешивания θ_{12} тоже велик, если мал детерминант матрицы, включающей индексы 2 и 3. Это условие может быть выполнено без подгонки величин $\sigma, \rho, \eta \simeq O(1)$. Массовую матрицу m_ν снова можно диагонализовать с помощью унитарной матрицы $U^{(\nu)+} m_\nu U^{(\nu)*} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3)$. Вычисление дает $(s_{ij} = \sin\theta_{ij}, c_{ij} = \cos\theta_{ij}, \xi = \varepsilon/(1 + |\eta|^2))$

$$U^{(\nu)} = \begin{pmatrix} c_{12} e^{i(\phi-\beta+\psi-\gamma)} & s_{12} e^{i(\phi-\beta+\psi-\gamma)} & \xi s_{23} e^{i(\phi-\beta+\psi)} \\ -c_{23} s_{12} e^{i(\phi+\beta-\psi+\gamma)} & c_{23} c_{12} e^{i(\phi+\beta-\psi+\gamma)} & s_{23} e^{i(\phi+\beta-\psi)} \\ s_{23} s_{12} e^{i(\gamma+\psi)} & -s_{23} c_{12} e^{i(\gamma+\psi)} & c_{23} e^{i\psi} \end{pmatrix} \tag{24}$$

с углами смешивания

$$\mathrm{tg}\, 2\theta_{23} \simeq \frac{2|\eta|}{1 - |\eta|^2}, \quad \mathrm{tg}\, 2\theta_{12} \simeq 2\sqrt{1 + |\eta|^2}\,\frac{\varepsilon}{\delta}. \tag{25}$$

Массы легких нейтрино

$$m_1 \simeq -\mathrm{tg}^2\,\theta_{12} m_2, \quad m_2 \simeq \frac{\varepsilon}{(1 + |\eta|^2)^{3/2}}\,\mathrm{ctg}\,\theta_{12} m_3, \quad m_3 \simeq (1 + |\eta|^2)\frac{v_1^2}{M_3}. \tag{26}$$

Соотношение между массами соответствует слабой иерархии

$$m_1 : m_2 : m_3 = \varepsilon : \varepsilon : 1, \tag{27}$$

причем $m_2^2 \sim m_1^2 \sim \Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2 \sim \varepsilon^2$. Большое $\nu_\mu - \nu_\tau$ смешивание связано с очень большой иерархией масс (22) тяжелых майорановских нейтрино. Большое же $\nu_e - \nu_\mu$ смешивание возникает за счет выбора параметров $\sim O(1)$. Следовательно, ожидается два больших угла смешивания, но один из них получается путем подгонки.

Чтобы вычислить различные наблюдаемые в нейтринной физике, нужно знать лептонную матрицу смешивания

$$U = U^{(e)+} U^{(\nu)}, \tag{28}$$

где $U^{(e)}$ — матрица смешивания заряженных лептонов. Поскольку $\varepsilon_u < \varepsilon_d$, то для СКМ-матрицы следует ожидать $U^{(e)} \simeq V^{(d)}$, $V = V^{(u)} + V^{(d)} \simeq V^{(d)}$. Отсюда имеем для лептонной матрицы смешивания

$$U \simeq V^{+} U^{(\nu)}. \tag{29}$$

В лидирующем порядке по углу Кабиббо $\lambda = 0{,}2$ нам нужны лишь недиагональные элементы $V_{12}^{(d)} = \overline{\lambda} = -V_{21}^{(d)*}$. Так как матрица m_d комплексна, угол Кабиббо модифицируется фазами $\overline{\lambda} = \lambda \exp\{i(\phi_d - \alpha_d)\}$. В результате лептонная матрица смешивания приобретает желаемую форму (11) со всеми элементами, пропорциональными $O(1)$, за исключением U_{13}:

$$U_{13} = \xi s_{23} e^{i(\phi - \beta + \psi)} - \overline{\lambda} s_{23} e^{i(\phi + \beta - \psi)} = O(\lambda, \varepsilon) \sim 0{,}1. \tag{30}$$

Это значение близко к экспериментальному пределу.

ГЛАВА 7

ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ И ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ

7.1. Введение

Первое свидетельство о существовании темной материи (ТМ) было получено при изучении кластеров галактик. В 1930 году исследовались два соседних кластера Virgo и Cota. Оказалось, что скорости галактик, составляющих кластер, примерно на порядок превышают ожидаемые значения. Такое поведение можно объяснить, предполагая наличие дополнительной массы в галактиках. В 1970 г. Rubin, Freeman, Peebles получили новые свидетельства в пользу «несветящейся» массы в скоплениях галактик. Исходя из распределения светимости звезд, скорость вращения на расстоянии r от центра галактики должны быть $v(r) \sim r^{-1/2}$, наблюдения же показывают $v_{\text{набл.}} \simeq \text{const}$. Для объяснения такого поведения следует предположить существование невидимой (темной) материи, не участвующей ни в каких других, кроме гравитационных, взаимодействиях. Справедливости ради, следует заметить, что возможно и другое объяснение необычного поведения скоростей: гравитационные силы не имеют поведения $\sim 1/r^2$ на галактических масштабах. Но для такого объяснения в настоящее время нет достаточных теоретических оснований.

Темная материя может существовать в двух формах: 1) несветящаяся барионная материя, входящая в состав больших планет или потухших звезд (MACHOS); 2) слабовзаимодействующие элементарные частицы (WIMPS). Астрофизические наблюдения показывают, что MACHOS не способны составлять заметную долю темной материи.

Элементарные частицы — кандидаты на темную материю, в свою очередь, в зависимости от их масс и взаимодействий, разделяют на три категории. К первой категории относятся частицы, находящиеся на ранних стадиях эволюции Вселенной в состоянии термодинамического равновесия. Очевидно, что в процессе расширения Вселенной частицы способны выходить из состояния термодинамического равновесия. Температура выхода из состояния равновесия (температура закалки) зависит от характера взаимодействий рассматриваемого сорта частиц с другими частицами ансамбля — «космологического коктейля». О частицах, которые к моменту формирования галактик оказываются нерелятивистскими, говорят как о холодной темной материи. Если же частицы остаются в эту эпоху релятивистскими, то их относят к горячей темной материи. Пример горячей темной материи — нейтрино малых масс ($m_\nu < 20$ эВ), пример же холодной темной материи — очень тяжелые нейтрино ($m_\nu \simeq 100$ ГэВ), SUSY частицы. Третий тип частиц темной материи — частицы, возникающие при фазовом переходе КХД в остывающей Вселенной. К этому типу темной материи относят газ аксионов.

В случае горячей темной материи возникают серьезные трудности с объяснением формирования крупномасштабных структур Вселенной. Поэтому идея холодной темной материи в настоящее время выглядит предпочтительной.

В космологии массу и энергию во Вселенной измеряют в единицах критической плотности ρ_C, вводя величину $\Omega = \rho/\rho_C$. Если $\Omega > 1$, Вселенная замкнута. Современные астрофизические данные дают для величины $\Omega = 1{,}02 \pm 0{,}02$, т. е. Вселенная практически плоская. Чтобы учесть расширение Вселенной, определяют величину Ωh^2, где h — переопределенная постоянная Хаббла. Величина Ωh^2 поддается непосредственному измерению. Оказывается, что $\Omega_{\text{материя}} h^2 = 0{,}134 \pm 0{,}006$, и эта величина гораздо больше $\Omega_{\text{барион.}} h^2 = 0{,}023 \pm 0{,}001$ для барионной материи. Разница $\Omega_{\text{материя}} h^2 - \Omega_{\text{барион.}} h^2$ приписывается темной материи. На уровне 2σ значения

$$0{,}094 < \Omega_{\text{тем.}} h^2 < 0{,}129. \tag{1}$$

Величина переопределенного значения параметра Хаббла составляет $h = 0{,}73 \pm 0{,}05$. С помощью соотношения (1) можно получить значения величины Ω.

Оказывается, что наша Вселенная содержит $\approx 73\%$ неизвестной темной энергии, 23% — темной материи и только на 4% состоит из барионной материи. Таким образом, на 96% Вселенная состоит из неизвестных нам форм материи и энергии.

Кандидатами на роль ТМ могли бы быть нейтрино, аксионы, гравитино или слабовзаимодействующие массивные частицы (WIMP), а также более экзотические частицы (криптоны, возбуждения Калуцы–Клейна, браноны, существующие в многомерных теориях и т. д.).

Из данных по сверхновой SN 1987A, верхний предел на массу аксиона $m_a \le 10^{-2}$ эВ, и этого явно недостаточно для объяснения ТМ. Что касается кандидатов, возникающих в многомерных теориях гравитации, то предсказания их весьма неопределенны.

Казалось бы, нейтрино способны разрешить проблему недостающей массы Вселенной. Однако экспериментальные данные исключают такую возможность. Если бы нейтрино были безмассовыми, их плотность составляла бы $\Omega = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$, что явно недостаточно. Поскольку нейтрино имеют массы, то их вклад в величину $\Omega_\nu h^2 = \sum\limits_i m_i/92{,}5$. В этой оценке предполагается, что температура реликтовых нейтрино в настоящее время $T_\nu = 1{,}95\ \text{К} = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ эВ. Поэтому нейтрино можно было бы отнести к кандидатам на горячую темную материю (ГТМ). Однако ГТМ не согласуется с численным моделированием образования структур во Вселенной. Кроме того, наблюдательные данные дают $\Omega_\nu h^2 < 0{,}0076$, и эта величина слишком мала для недостающей массы. Не только нейтрино, но и другие кандидаты на ГТМ не согласуются с данными, если их массы $m_X \le 10$ КэВ. Массы же $m_X \ge 100$ КэВ практически неотличимы от масс частиц холодной темной материи (ХТМ). ХТМ вполне допустима, и это один из основных кандидатов на скрытую массу. Кандидаты на ХТМ естественно возникают в суперсимметричных теориях и теориях супергравитации, которые, как ожидаются, являются проявлениями теорий суперструн.

7.2. Состав Вселенной

Вселенная на супергалактических масштабах однородна и изотропна и описывается геометрией Фридмана — Робертсона — Уокера с элементом длины

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{2}$$

В этом выражении $a(t)$ — космологический масштабный фактор. В зависимости от величины k, различают три типа Вселенной со следующими характеристиками:

k	Тип Вселенной	3-мерная кривизна	Пространственный объем
1	замкнутая	$ka^2 > 0$	$2\pi^2 a^3$
0	плоская	0	∞
-1	открытая	$ka^2 < 0$	∞

Скорость расширения Вселенной определяется постоянной Хаббла:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{3}$$

В настоящее время постоянная Хаббла $H = H_0 = 100h_0$ км/(с $\cdot$ Мпс) определяется безразмерной величиной h_0, называемой переопределенной постоянной Хаббла. По наблюдательным данным, $h_0 = 0{,}72 \pm 0{,}05$. Плотность материи-энергии Вселенной связана со скоростью расширения

$$\rho = \frac{3}{8\pi G_N}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right). \tag{4}$$

Критическая плотность

$$\rho_C = \frac{3}{8\pi G_N} H_0^2. \tag{5}$$

Ее значение $\rho_C = 1{,}88 \cdot 10^{-29} h_0^2\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 8{,}1 \cdot 10^{-47} h_0^2$ ГэВ^4.

Из (4) видно, что в зависимости от того, больше ρ чем ρ_C, равно или меньше, реализуется одна из трех возможностей:

$$\rho_0 > \rho_C, \quad k > 0 \text{ — замкнутая Вселенная;}$$
$$\rho_0 = \rho_C, \quad k = 0 \text{ — плоская Вселенная;}$$
$$\rho_0 < \rho_C, \quad k < 0 \text{ — открытая Вселенная.}$$

Астрономические данные свидетельствуют в пользу плоской Вселенной. Полная плотность вещества материи-энергии выражается в долях критической плотности:

$$\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_C}. \tag{6}$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\Omega = \sum_i \Omega_i, \tag{7}$$

где Ω_i соответствует вклад частиц каждого сорта, включая излучения $\Omega_{\text{излуч.}}$ и космологической константы Ω_Λ.

В 1929 г. Хаббл установил, что

$$d_L H_0 = cz. \tag{8}$$

В этом выражении d_L — светимость объекта, z — доплеровское смещение длины испущенного излучения, $1 + z = \lambda_{\text{набл.}}/\lambda_{\text{источн.}}$. Для источника, движущегося со скоростью v и испускающего электромагнитное излучение, $v = cz$. Поэтому соотношение (8) приводит к разбеганию галактик со скоростями

$$v_r = d_L H_0. \tag{9}$$

Наша Вселенная не находится в статическом состоянии, она расширяется.

Заметим, что излучательная протяженность может не совпадать с действительным геометрическим расстоянием между излучателем и приемником, поэтому вводят поток

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \tag{10}$$

Эта величина — энергия, попадающая в единицу времени на единицу площади регистрирующей температуры при «абсолютной» светимости L. d_L совпадала бы с геометрическим расстоянием, если бы Вселенная находилась в статическом состоянии.

В расширяющейся Вселенной

$$d_L = a(t_0) r_1(t_1)(1+z). \tag{11}$$

В этой формуле t_0 — время наблюдателя, t_1 — время испускания сигнала из какого-либо объекта галактики. Функция $r_1(t_1)$ определяется соотношением

$$\int\limits_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int\limits_{t_1}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \tag{12}$$

Наличие $(1+z)$ в (11) уменьшает абсолютную светимость L в (1) на фактор $(1+z)^{-2}$. При этом одна степень $(1+z)^{-1}$ учитывает тот факт, что фотоны испытывают красное смещение, и их энергия E', регистрируемая наблюдателем, в $(1+z)$ раз меньше энергии в момент испускания. Другой же фактор $(1+z)^{-1}$ возникает из-за того, что число фотонов, приходящихся на единицу длины волны, уменьшается при расширении. Вследствие этих двух эффектов, наблюдаемая светимость $L_0 = L/(1+z)^2$, и соотношение (8) переписывается в виде

$$F = \frac{L_0}{4\pi d_G^2}, \tag{13}$$

где $d_L = a(t_0) r_1(t_1)$ — геометрическое расстояние до излучателя в галактике. Космологическое красное смещение определяется следующим образом:

$$1 + z = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t)}, \tag{14}$$

где $\lambda(t_0)$, $\lambda(t)$ — длины волн излучения в настоящий момент t_0 и во время испускания t. Очевидно, что

$$\frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t)} = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \tag{15}$$

Таким образом, длины волн изменяются так же, как масштабный фактор.

Тогда выражение (14) можно записать в виде

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \tag{16}$$

Это соотношение между величиной красного смещения и масштабным фактором позволяет выразить время t как функцию красного смещения z. В настоящее время $z = 0$, но $z = \infty$ при $t = 0$. Используя $H = \dot{a}/a$, получаем

$$t(z) = \int\limits_z^{\infty} \frac{dz}{H(1+z)}, \tag{17}$$

где H как функция z имеет вид

$$H(z) = H_0\Big[\sum_i \Omega_i(1+z)^{3\left(1+\omega_i\right)} + (1-\sum_i \Omega_i)(1+z^2)^{1/2}\Big]. \tag{18}$$

Если величина красного смещения некоторого источника известна из (16), то можно оценить размер Вселенной в момент испускания сигнала. Например, квазары имеют $z = 5{,}82$, поэтому из (16) следует, что Вселенная в момент испускания сигнала этими квазарами была в 6,82 раза меньше.

Длина излучения как функция красного смещения

$$d_L = cH_0^{-1}|\Omega_k|^{-1/2}(1+z)\sin n[\Omega_k]^{-1/2}H_0\int\limits_0^z \frac{dz}{H}, \tag{19}$$

где функция $\sin n(\chi)$ равна $\sin(\chi)$, χ или $\sinh(\chi)$ для $k = 1, 0, -1$.

Предполагая только вклад материи и космологической константы, найдем d_L как разложение по степеням z:

$$d_L = cH_0^{-1}\left[z + \frac{z^2}{2}\left(1 + \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2}\right) + \ldots\right]. \tag{20}$$

Параметр, характеризующий дополнительное ускорение, определяется следующим образом:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{a_0^2}. \tag{21}$$

Если снова предположить существование только материи и космологической константы, то

$$q_0 = -\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_M}{2}. \tag{22}$$

Данные по сверхновым указывают на наличие вклада от Ω_Λ. Причем величина Ω_Λ достигает 70%! Величины Ω_M и Ω_Λ таковы, что параметр $q_0 < 0$, т. е. Вселенная испытывает ускорение при своем расширении.

До сих пор мы считали пространство-время четырехмерным. Картина кардинально изменяется, если предположить наличие дополнительных измерений, «невидимых» при имеющихся энергиях. Как мы уже видели, это весьма привлекательная картина, базирующаяся на теории струн.

В сценариях дополнительных измерений нужно пересмотреть не только наше представление о физике частиц, но и о стандартной космологической модели. Например, для Вселенной, «живущей» на 3-бране, не справедливы уравнения Фридмана. В этом случае хаббловская скорость расширения $H = \dot{a}/a$ уже пропорциональна не плотности ρ, а квадрату плотности. При этом $a(t) \sim t^{1/4}$ и $H \sim T^4$, в отличие от $H \sim T^2$ в стандартной космологии. Поэтому остывание происходит медленнее, и температура закалки T_D отношения числа нейтронов и протонов изменяется с 0,8 МэВ на 3 МэВ. Для нуклеосинтеза Большого Взрыва необходимо иметь $T_D \sim 2$ МэВ. Но поскольку $g_*^{-1/8}M_{(5)} \simeq 3$ МэВ с $M_{(5)}$ — масштабом, характеризующим 5-мерную гравитацию, то это условие не выполняется. Нужно иметь большее число измерений.

7.3. Температурная Вселенная

Еще в 30–40 лет назад составляющими Вселенной считались частицы стандартной модели, а также еще не открытые частицы, находящиеся в состоянии термодинамического и химического равновесия нагретой плазмы. При заданной температуре T плотность энергии частиц определенного сорта, имеющих массу m, можно представить в виде

$$\rho = \frac{\pi^2}{30}(kT)^4 g(T). \tag{23}$$

Функция $g(T)$, вообще говоря, не представима в замкнутой форме. Однако для температур $kT \gg m$ частицы релятивистские, и функция $g(T)$ сводится к константе

$$g = g_s N'_{B,F}. \tag{24}$$

В этом выражении индексы B и F относятся к бозонам и фермионам, $N'_B = 1$, $N'_F = 7/8$, а g_s — число спиновых степеней свободы. В противоположном пределе $kT \ll m$ функция $g(T)$ сводится к больцмановскому выражению:

$$\rho \simeq g_s m \left(\frac{mkT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{kT}\right). \tag{25}$$

В пределе $p \ll \rho$ получаем газ с нулевым давлением.

Вклад фотонов в плотность энергии можно найти из (23), полагая $g(T) = 2$ для безмассовой частицы, имеющей два спиральных состояния. Учитывая, что в настоящее время $T_\gamma = 2{,}7$ K, получаем

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_C} \simeq \frac{2{,}5 \cdot 10^{-5}}{h_0^2}. \tag{26}$$

При $h_0 = 0{,}7$ $\rho_\gamma \simeq 5{,}2 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, плотность энергии фотонов на пять порядков меньше критической плотности. Если нейтрино или антинейтрино безмассовые, то их плотность энергии для каждого сорта

$$\rho_\nu = \frac{7\pi^2}{240}(kT_\nu)^4. \tag{27}$$

Полный нейтринный вклад относительно фотонного вклада:

$$\Omega_\nu = N_\nu \frac{7}{16}\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)^4 \Omega_\gamma, \tag{28}$$

где N_ν — число сортов нейтрино и антинейтрино ($N_\nu = 6$ в стандартной модели). Заметим, что нейтринная температура T_ν отличается от фотонной температуры T_γ. Действительно, нейтрино выходит из равновесия с другими частицами при $kT_D \simeq$ МэВ и затем испытывает свободное расширение. При температурах $kT \sim 2m_e$ фотоны перегреты из-за процесса $e^+e^- \to 2\gamma$, и из соображений сохранения энтропии

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} \simeq \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3}. \tag{29}$$

Тогда с учетом (28) получаем

$$\Omega_\nu \simeq 0{,}115 N_\nu \Omega_\gamma. \tag{30}$$

Итак, плотность энергии безмассовых нейтрино, аналогично фотонам, гораздо меньше критической плотности.

Для массивных нейтрино ситуация иная. Если предположить, что нейтрино (или антинейтрино) имеют массу m_ν, то их плотность энергии при температурах, гораздо больших, чем их массы

$$\rho_\nu \simeq n_\nu m_\nu. \tag{31}$$

Отсюда получаем

$$\Omega_\nu \simeq 0{,}0053 \frac{\sum\limits_\nu (m_\nu/\text{эВ})}{h_0^2}. \tag{32}$$

Суммирование проводится по всем сортам нейтрино и антинейтрино. Для $h_0 = 0{,}7$ имеем

$$\Omega_\nu \simeq \sum_\nu m_\nu/92{,}5. \tag{33}$$

Указание на существование массы нейтрино дает эксперимент SuperKamiokande, регистрирующий осцилляции $\nu_\mu \to \nu_\tau$. В этом эксперименте определена разность масс $m_{\nu_\tau} - m_{\nu_\mu} \simeq 0{,}05$ эВ, свидетельствующая о наличии массы нейтрино порядка несколько эВ.

Однако эти экспериментальные данные не дают возможности установить верхнюю границу на массу нейтрино и, таким образом, исключить нейтрино как кандидата на ТМ. Однако WMAP спутниковые данные в комбинации с данными других источников практически исключают нейтрино как кандидата на горячую или теплую ТМ. Нейтринный вклад оказывается на уровне 10^{-2}.

Как известно, в эволюции Вселенной можно выделить две эпохи, в которых доминируют излучение и материя.

7.4. Радиационно-доминированная эпоха

В эту эпоху энергетическая плотность определяется релятивистскими частицами, чьи температурные свойства (за исключением спина) подобны фотонам. В эту эпоху уравнение состояния $p = \rho/3$, и из сохранения энергии получаем

$$\frac{d}{dt}(\rho a^4) = 0. \tag{34}$$

Отсюда

$$\rho \simeq \frac{1}{a^4}. \tag{35}$$

Тогда из соотношения (4) видим, что член, связанные с плотностью, доминирует над k/a^2. Получающееся уравнение для масштабного фактора легко решить, и мы получаем $a \sim t^{1/2}$. Тогда

$$\rho = \frac{3}{32\pi G_N} t^{-2}. \tag{36}$$

С учетом соотношения (23), получаем

$$T = \left(\frac{16\pi^3 G_N}{45} g(T)\right)^{-1/4} t^{-1/2}. \tag{37}$$

Таким образом, в радиационно-доминированную эпоху масштабный фактор, плотность энергии и температура ведут себя следующим образом:

$$a \sim t^{1/2}, \quad \rho \sim t^{-2}, \quad T \sim t^{-1/2}, \tag{38}$$

а скорость расширения

$$H = \frac{1}{2t} = 1{,}66\sqrt{g(T)}\frac{(kT)^2}{M_{\text{Pl}}}. \tag{39}$$

Содержание $g(T)$, входящей в (37) и (39), различно в разные промежутки времени. Если массивная частица с массой m_i находится в равновесии с космическим «коктейлем», то для температур $kT \gg m_i$ она релятивистская и ее вклад в $g(T)$ составляет либо $(7/8)g_s$ или g_s в зависимости от того, бозон это или фермион. При расширении Вселенной температура падает и оказывается $kT \ll m_i$. В этом случае ее вклад, из-за больцмановского фактора $\exp(-m_i/kT)$ пренебрежимо мал. В табл. 1 представлены величины $g(T)$ при различных температурах, а также радиационное содержание частиц стандартной модели при соответствующих температурах.

Таблица 1

kT	Содержание излучения	g(T)
$< m_e$	$\gamma + 3\times(\nu+\overline{\nu})$	29/4
$m_e - m_\mu$	$\ldots + e^+,\ e^-$	43/4
$m_\mu - m_\pi$	$\ldots + \mu^+,\ \mu^-$	57/4
$m_\pi - \Lambda_c$	$\ldots + \pi^+,\ \pi^-,\ \pi^0$	69/4
$\Lambda_c - m_s$	$\ldots + u,\ \overline{u},\ d,\ \overline{d}$, глюоны	205/4
$m_s - m_c$	$\ldots + s,\ \overline{s}$	247/4
$m_c - m_\tau$	$\ldots + c,\ \overline{c}$	289/4
$m_\tau - m_b$	$\ldots + \tau,\ \overline{\tau}$	303/4
$m_b - M_Z$	$\ldots + W^+,\ W^-,\ b,\ \overline{b}$	369/4
$M_Z - m_t$	$\ldots + Z$	381/4
$> m_t$	$\ldots + t,\ \overline{t}$	434/4
...	...	...

Для температур выше массы t-кварка, нужно добавить вклад частиц вне стандартной модели. Хиггс-бозон стандартной модели вносит (+1) в $g(T)$ для $kT > m_{\text{Хиггс}}$.

7.5. Доминантность полей материи

После радиационно-доминирующей эпохи Вселенная находится в стадии доминантности полей материи. В течение этой эпохи плотность масс была гораздо больше давления $\rho \gg p$. Тогда в уравнении, выражающем сохранение энергии, можно пренебречь слагаемым с давлением, поэтому

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0. \tag{40}$$

Отсюда

$$\rho \sim \frac{1}{a^3}, \tag{41}$$

поэтому уравнение (4) дает

$$a \sim t^{2/3}. \tag{42}$$

Таким образом, во время эпохи доминантности материи масштабный фактор, плотность и температура ведут себя следующим образом:

$$a \sim t^{2/3}, \quad \rho \sim t^{-2}, \quad T \sim t^{-2/3}. \tag{43}$$

Скорость же расширения

$$H = \frac{2}{3t}. \tag{44}$$

Температура T_{EQ}, при которой Вселенной достигает эпохи доминирования материи, составляет $T_{EQ} \simeq 10^4$ К, эквивалентной 1 эВ.

7.6. Эпоха вакуумной доминантности

Поскольку Вселенная расширяется, и ее температура падает, космологический член в (4), если он существует, становится все более значимым. Если темная энергия Вселенной связана с космологическим членом $\Lambda > 0$, то она будет доминировать в течение некоторой эпохи. В этом случае, полагая $p = \Lambda$, получаем

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq \frac{8\pi G_N}{3}\Lambda. \tag{45}$$

Для ускорения имеем

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G_N}{3}\Lambda. \tag{46}$$

Заметим, что в (45) правая часть отрицательная для $\Lambda < 0$, в то время как левая часть положительная. Поэтому в присутствии отрицательной космологической константы Вселенная никогда не достигает режима, в котором космологический член становится доминирующим. Действительно, масштабный фактор достигает своего максимального значения до того, как Вселенная войдет в этот режим. Однако это не так для случая положительной космологической константы. Из соотношения (45) следует

$$a \sim \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3}}t\right). \tag{47}$$

Поскольку $\Lambda > 0$, то $\ddot{a} > 0$, т.е. в эпоху доминантности вакуума Вселенная расширяется. Другими словами, в это время гравитационные силы оказываются отталкивательными. Давление же — отрицательное: $p_{\text{вак}} = -\rho_{\text{вак.}} = -\Lambda$. Современные наблюдательные данные указывают на то, что Вселенная уже вошла в эту стадию. Действительно, как мы видели, параметр, характеризующий дополнительное ускорение (22), отрицательный.

7.7. Темная материя

В горячей Вселенной, заполненной взаимодействующими частицами, существует термодинамическое равновесие. Но в процессе расширения и охлаждения Вселенной некоторые из частиц могут выйти из состояния термодинамического равновесия и «отщепиться» от ансамбля других частиц.

Условие равновесия означает, что длина свободного пробега $l_{\text{своб.}}$ гораздо меньше расстояния, на котором частицы находились в начальный момент времени

$$l_{\text{своб.}} \ll vt. \tag{48}$$

Если это условие выполняется, то частицы взаимодействуют с космическим «коктейлем» и не уходят из этого ансамбля. Длина свободного пробега $l_{\text{своб.}} \simeq 1/(n\sigma)$, где σ — сечение взаимодействия частиц, n — их плотность. Поскольку скорость расширения обратно пропорциональна времени: $H \sim 1/t$, то условие равновесия (48) можно выразить следующим образом:

$$\Gamma > H, \quad \Gamma = \frac{1}{vn\sigma}. \tag{49}$$

Если $\Gamma > H$ в некоторой эпохе и $\Gamma < H$ в более позднее время, то существует температура T_D, для которой $\Gamma = H$. Для $T \leq T_D$ эти частицы уже не взаимодействуют с космическим коктейлем и расширяются свободно. Их полное число после отщепления от ансамбля остается неизменным, а их плотность убывает обратно пропорционально кубу масштабного фактора: $n \sim 1/a^3$.

Примером таких частиц являются нейтрино. Они отщепляются от ансамбля других частиц при температуре Вселенной $\approx$ десять миллионов градусов и составляют в настоящее время очень малую долю энергии Вселенной. Нейтрино взаимодействуют очень слабо и имеют очень малые массы. При температурах $kT < m_\mu$ активными степенями свободы в горячей Вселенной являются фотоны, нейтрино и их античастицы, электроны и позитроны. Сечение взаимодействия нейтрино и антинейтрино с электронами и позитронами

$$\sigma_\nu \sim \left(\frac{G_F}{\sqrt{\pi}}\right)^2 (kT)^2, \tag{50}$$

где G_F — фермиевская константа, kT — энергия нейтрино. Полная плотность нейтрино, антинейтрино, электронов и позитронов, слабовзаимодействующих между собой, $n \simeq (kT^3)$, причем все эти частицы при температурах $T > m_e$ — релятивистские. Их скорости $v \simeq 1$, а величина Γ в выражении (49):

$$\Gamma \simeq \left(\frac{G_F}{\sqrt{\pi}}\right)^2 (kT)^5. \tag{51}$$

При этой температуре скорость расширения

$$H = 1{,}66\sqrt{g^*}\frac{(kT)^2}{M_{\text{Pl}}}, \tag{52}$$

где g^* — значение функции $g(T)$ при этой температуре (из табл. 1 $g^* = 43/4$). Температура закалки нейтрино, как это следует из (51), (52), составляет $kT_D \simeq 2$ МэВ. Для $T < T_D$ нейтрино и их античастицы отщепляются от коктейля и не взаимодействуют с электронами и позитронами. Их можно считать изолированными и находящимися при температуре T_ν, равной фотонной температуре в момент закалки нейтрино. Поскольку они не взаимодействуют с оставшимися частицами (γ, e^+, e^-), их полное число остается неизменным. Когда температура достигает значений $T \sim 2m_e$, электроны и позитроны начинают аннигилировать в фотоны $e^+ + e^- \to 2\gamma$, но фотоны не имеют достаточной энергии для рождения e^+e-пар. Из-за этого температура фотонов возрастает (происходит перегрев фотонов), но они «не чувствуют» нейтрино, поскольку последние не взаимодействуют с коктейлем. Характер возрастания фотонной температуры можно найти из условия сохранения энтропии. Так как нейтрино имеют до перегрева фотонов одинаковую температуру с фотонами, получаем

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma. \tag{53}$$

Поэтому $g(T)$ в первой строчке табл. 1 надо скорректировать. Из-за отщепления нейтрино и фотонного перегрева, вклад нейтрино и фотонов в плотность энергии после перегрева фотонов, пропорционален $2T_\gamma^4 + (21/4)T_\nu^4 \simeq 3{,}36$. При этом функция $g(T) \simeq 29/8$. Как уже отмечалось выше, нейтрино в качестве кандидата на горячую и теплую темную материю можно исключить, поэтому мы ограничимся их обсуждением.

Различные модели физики частиц предсказывают существование слабовзаимодействующих массивных частиц (WIMP), которые давно отщепились от космологического коктейля, и их плотности в настоящую эпоху могли бы давать вклад в ТМ Вселенной. В суперсимметричных теориях из-за сохранения R-четности (см. главу 1 части II) легчайшая суперсимметричная частица стабильна (LSP), например, нейтралино $\tilde{\chi}$ — массивная стабильная и слабовзаимодействующая частица. Существуют также и другие возможности: гравитино, аксино или снейтрино. Их реликтовое содержание можно определить с помощью уравнения Больцмана.

7.8. Реликтовый избыток темной материи

7.8.1. Уравнение Больцмана. Предположим для определенности, что LSP частица — нейтралино, хотя практически все рассуждения применимы для любого другого сорта частиц. Чтобы определить реликтовый избыток этих частиц и сравнить с имеющимися данными, нужно вычислить их плотности в настоящее время, предполагая при этом, что в некоторую эпоху они были в термодинамическом равновесии с космологическим коктейлем. Их плотность убывает только вследствие аннигиляции (LSP предполагаются стабильными). Обозначим плотность в момент времени t через $n(t)$. Тогда $n(t)$ удовлетворяет транспортному уравнению Больцмана:

$$\frac{dn}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}n - \langle v\sigma\rangle(n^2 - n^2_{\text{рав.}}). \tag{54}$$

В этом выражении σ — сечение аннигиляции $\tilde{\chi}$, v — их относительная скорость. Температурное среднее $\langle v\sigma\rangle$ определяется обычным для термодинамики образом. Первое слагаемое в правой части (54) легко понять. Оно отражает тот факт, что плотность изменяется из-за расширения. Если пренебречь взаимодействиями $\tilde{\chi}$ с другими частицами, то полное число $\tilde{\chi}$ остается постоянным, поэтому $na^3 = \text{const}$. Отсюда следует, что при вычислении производной по времени от плотности возникает первый член в правой части выражения (54).

Однако $\tilde{\chi}$ взаимодействуют, и их число уменьшается из-за аннигиляции. Действительно, LSP являются стабильными майорановскими частицами, и они способны аннигилировать в пары частиц стандартной модели. Их число, таким образом, уменьшается вплоть до температуры закалки. При меньших температурах они уже взаимодействуют с другими частицами, и их число не изменяется. Их плотность уменьшается вследствие аннигиляции:

$$\frac{dn}{dt} = -n\Gamma_{\text{анн.}}, \tag{55}$$

где скорость аннигиляции

$$\Gamma_{\text{анн.}} = v\sigma n. \tag{56}$$

С этим связано наличие второго слагаемого в правой части (54).

Однако $\tilde{\chi}$ не только аннигилируют, но и рождаются вследствие обратных процессов. Последнее слагаемое в правой части (54) как раз и отражает этот факт. Заметим, что для $\tilde{\chi}$, находящихся в термодинамическом равновесии с другими частицами

и при высоких температурах, продукты аннигиляции имеют достаточную энергию для рождения $\tilde{\chi}$. В течение этого периода $n = n_{\text{равн.}}$, и последние два слагаемых в правой части (54) сокращают друг друга.

Таким образом, возникает следующая картина: $\tilde{\chi}$ в «начальные моменты» времени находятся в температурном и химическом равновесии. В этот период $\Gamma \gg H$ и $n = n_{\text{равн.}}$. Однако температура уменьшается и достигает значений $kT \sim m_{\tilde{\chi}}$. При таких температурах $\tilde{\chi}$ аннигилируют, но продукты аннигиляции не имеют достаточных энергий для рождения $\tilde{\chi}$. Начиная с этого момента, $\tilde{\chi}$ находятся в термодинамическом равновесии, но не в химическом равновесии. Их плотность, вследствие больцмановского фактора, уменьшается экспоненциально $\sim \exp(-m_{\tilde{\chi}}/kT)$, а величина $\Gamma_{\text{анн.}} = v\sigma n$ уменьшается таким образом, что при некоторой температуре закалки T_f величина Γ становится равной скорости расширения H. Ниже этой температуры $\Gamma < H$, $\tilde{\chi}$ выходят из термодинамического равновесия. Их полное число сохраняется, а плотность меняется за счет расширения. Для $T < T_{\tilde{\chi}}$ их плотность гораздо больше равновесной плотности $n \gg n_{\text{равн.}}$ и поскольку $\Gamma \gg H$, первый член в (54) доминирует, а произведение na^3 остается постоянным.

Температурное среднее от сечения аннигиляции двух частиц 1 и 2, удовлетворяющих статистики Больцмана

$$\langle v\sigma_{12}\rangle = \frac{\int\limits_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds' K_1(\sqrt{s}/T) p_{cm} W(s')}{2m_1^2 m_2^2 K_2(m_1/T) K_2(m_2/T)}, \tag{57}$$

где p_{cm} — импульс каждой частицы в системе центра масс; $K_{1,2}$ — функции Бесселя. Величина W в интеграле связана с полным сечением $\sigma(s)$ соотношением

$$\sigma(s) = \frac{4p_{cm}\sqrt{s}' W(s')}{\lambda(s', m_1^2, m_2^2)}, \tag{58}$$

где кинематическая функция $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$. Выражение (58) можно упростить, если рассмотреть нерелятивистский предел, разложив сечение по степеням относительной скорости

$$v\sigma = a + \frac{b}{6} v^2. \tag{59}$$

В этом приближении температурное среднее

$$\langle \sigma v\rangle = a + \left(b - \frac{3}{2}a\right)\frac{kT}{m_{\tilde{\chi}}}. \tag{60}$$

Нерелятивистское разложение справедливо в области энергий между полюсами и порогами.

Нам нужно решить уравнение (54) и найти плотность $\tilde{\chi}$ при сегодняшних температурах $T_0 \simeq 2{,}7$ K, если известна плотность $n = n_{\text{равн.}}$ задолго до отщепления частиц $\tilde{\chi}$.

Определив величину $Y = n/s$, где s — плотность энтропии и новую переменную $x = T/m_{\tilde{\chi}}$, получаем уравнение

$$\frac{dY}{dx} = m_{\tilde{\chi}} \langle v\sigma\rangle \left(\frac{45 G_N}{\pi} g\right)^{-1/2} \left(h + \frac{x}{3}\frac{dh}{dx}\right)(Y^2 - Y^2_{\text{равн.}}). \tag{61}$$

Функция h, входящая в это уравнение, учитывает эффективную энтропию степеней свободы и связана с плотностью энтропии соотношением

$$s = k\frac{2\pi^2}{45}(kT)^3 h(T). \tag{62}$$

Уравнение (61) можно решить и найти Y при сегодняшней T_γ, а также плотность $\tilde{\chi}$:

$$\rho_{\tilde{\chi}} = n_{\tilde{\chi}} m_{\tilde{\chi}} = m_{\tilde{\chi}} s_0 Y_0 = \frac{2\pi^2}{45} m_{\tilde{\chi}} h^0_{\text{eff}} Y_0 T^3_\gamma, \tag{63}$$

где $Y_0 = Y(0)$, $h^0_{\text{eff}} = h(T_\gamma) \simeq 3{,}918$.

Тогда для реликтовой плотности имеем

$$\Omega_{\tilde{\chi}} h_0^2 = h_0^2 \frac{\rho_{\tilde{\chi}}}{\rho_C} = 0{,}6827 \cdot 10^8 \frac{m_{\tilde{\chi}}}{\text{ГэВ}} h^0_{\text{eff}} Y_0 \left(\frac{T_\gamma}{T_0}\right)^3. \tag{64}$$

В этом выражении мы учли, что критическая плотность $\rho_C = 8{,}1 \cdot 10^{-47} h_0^2$ ГэВ^4. Кроме того, ввели отношение температур T_γ/T_0 и учли, что $T_0 = 2{,}7$ К. Температура реликтового излучения $T_\gamma \simeq 2{,}752 \pm 0{,}001$ К.

7.8.2. Приближенные решения уравнения Больцмана. Приближенные решения уравнения Больцмана находятся в предположении о том, что $Y \ll Y_{\text{равн.}}$ ниже температуры закалки $x_f = T_f/m_{\tilde{\chi}}$ и $Y \simeq Y_{\text{равн.}}$ при температурах, выше T_f. Пренебрегая членом с $Y_{\text{равн.}}$ в (61) и полагая $x = x_f$, получаем уравнение для x_f:

$$x_f^{-1} = \ln\left[0{,}03824 g_s \frac{M_{\text{Pl}} m_{\tilde{\chi}}}{\sqrt{g_*}} \langle v\sigma\rangle x_f^{1/2}\right]. \tag{65}$$

В этом уравнении g^* — эффективное число степеней свободы при температуре закалки $g^* = g(x_f)$. В соотношении (61) мы пренебрегли производной dh/dx.

Температура закалки для WIMP составляет $T_f \simeq m_{\tilde{\chi}}/20$. Для этого x_f можно проинтегрировать (61) от x_f до нуля. При этих же условиях получаем $Y(0)$ и плотность

$$\rho_{\tilde{\chi}} = \left(\frac{4\pi^3}{45}\right)^{1/2} \left(\frac{T_{\tilde{\chi}}}{T_\gamma}\right)^3 \frac{T_\gamma^3}{M_{\text{Pl}}} \frac{\sqrt{g^*}}{J}. \tag{66}$$

В этом выражении величина J задается интегралом

$$J = \int\limits_0^{x_f} \langle v\sigma\rangle dx. \tag{67}$$

Напомним, что $g^* = g(x_f)$. В выражении (66) температура T_f отличается от фотонной температуры:

$$\left(\frac{T_{\tilde{\chi}}}{T_\gamma}\right)^3 = \frac{4}{11} \frac{g(T_\nu)}{g(T_f)} = \frac{3{,}91}{g(T_f)}, \tag{68}$$

где T_ν — температура закалки нейтрино, а T_f — частицы $\tilde{\chi}$.

Таким образом, с помощью (66) получаем для реликтовой плотности

$$\Omega_{\tilde{\chi}} h_\nu^2 = \frac{\rho_{\tilde{\chi}}}{(8{,}1 \cdot 10^{-47}\ \text{ГэВ}^4)} \tag{69}$$

следующий результат

$$\Omega_{\tilde{\chi}} h_0^2 = \frac{1{,}066 \cdot 10^9\ \text{ГэВ}^{-1}}{M_{\text{Pl}} \sqrt{g^*} J}. \tag{70}$$

Заметим, что величина J имеет размерность ГэВ$^{-2}$. Реликтовая плотность оказывается обратно пропорциональной полному сечению, т. е. чем больше сечение, тем меньше реликтовая плотность и наоборот.

Чтобы получить оценку реликтовой плотности нейтралино как LSP, положим $J \simeq x_f \langle v\sigma \rangle_f$ и $\langle v\sigma \rangle_f \simeq \alpha_W / m_\chi^2$, α_W — электрослабая константа связи. Для $x_f \simeq 0{,}1$ и $g^* \simeq 100$ и масс $m_{\tilde{\chi}} \simeq 20$ ГэВ $\div$ 1 ТэВ реликтовая плотность (70) составляет

$$\Omega_{\tilde{\chi}} h_0^2 \simeq 0{,}1 \tag{71}$$

для наиболее интересного значения массы нейтралино $m_{\tilde{\chi}} = 100$ ГэВ. Таким образом, в суперсимметричных теориях реликтовая плотность имеет «правильный» порядок величины, если считать нейтралино кандидатом на темную материю.

До сих пор обсуждался случай, когда стабильные WIMP не вырождены по массам с другими тяжелыми частицами, которые могут распадаться на рассмотренные нами WIMP. Поэтому существовала эпоха в эволюции Вселенной, заполненная частицами стандартной модели и LSP. При этом из-за аннигиляции плотность LSP уменьшалась при температурах, когда частицы стандартной модели уже не имеют достаточных энергий для образования LSP. Однако вполне возможно, что масса LSP частицы массы $m_{\tilde{\chi}}$ не слишком отличается от других частиц массы m_i, которые могут распадаться на $\tilde{\chi}$. Действительно, если $\delta m_i = m_i - m_{\tilde{\chi}} \sim T_f$, то эти частицы с заметной вероятностью присутствуют в космологическом коктейле. Это обстоятельство изменяет вычисления реликтовой плотности LSP. Соответствующий процесс называется ко-аннигиляцией.

Поскольку почти все вырожденные с LSP частицы будут распадаться на них, то нас будет интересовать плотность $n = \sum\limits_i n_i$, n_i — плотность частиц сорта i, суммируется по $i = 1, \ldots, N$. При этом $i = 1$ будет соответствовать LSP, а $i = 2, \ldots, N$ — оставшимся частицам, которые почти вырождены по массе с LSP.

В этом случае уравнение (54) принимает вид

$$\frac{dn}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}n - \sum_{i,j}^{N} \langle v_{ij}\sigma_{ij} \rangle (n_i n_j - n_i^{\text{равн.}} n_j^{\text{равн.}}). \tag{72}$$

Так как критерий ко-аннигиляции частиц с LSP: $\delta m \sim T_f$ и $T_f \simeq m_{\tilde{\chi}}/20$, то массы частиц отличаются от $m_{\tilde{\chi}}$ не более, чем на 5%. Их равновесные плотности

$$n_i^{\text{равн.}} = g_i \frac{T}{2\pi} m_i^2 K_2(m_i/T), \tag{73}$$

где g_i обозначает спиновые степени свободы. Если приближенно считать $\frac{n_i}{n} \simeq \frac{n_i^{\text{равн.}}}{n}$, то уравнение (72) можно записать в виде

$$\frac{dn}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}n - \sum_{i,j} \langle v\sigma_{\text{eff}} \rangle (n^2 - n_{\text{равн.}}^2), \tag{74}$$

где эффективное температурное среднее

$$\langle v\sigma_{\text{eff}} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^{\text{равн}} n_j^{\text{равн}}}{n_{\text{равн}}^2} \langle v_{ij}\sigma_{ij} \rangle. \tag{75}$$

Последнее выражение представляется интегралом

$$\langle v\sigma_{\text{eff}} \rangle = \frac{\int\limits_2^\infty da K_1(a/x) \sum\limits_{i,j} \lambda(a, b_i^2, b_j^2) g_i g_j \sigma_{ij}(a)}{4x (\sum\limits_i g_i b_i^2 K_2(b_i/x))^2}, \tag{76}$$

где $b_i \equiv m_i/m_{\tilde{\chi}}$. Если мы хотим получить приближенное решение, то в момент закалки

$$x_f^{-1} = \ln\left[0{,}03824 g_{\text{eff}} \frac{M_{\text{Pl}} m_{\tilde{\chi}}}{\sqrt{g^*}} \langle v\sigma_{\text{eff}} \rangle x_f^{1/2}\right]. \tag{77}$$

В этом случае g_{eff} определяется следующим образом:

$$g_{\text{eff}} = \sum_i g_i (1+\Delta_i)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta_i}{x_f}\right), \tag{78}$$

где $\Delta_i = (m_i - m_{\tilde{\chi}})/m_{\tilde{\chi}}$. Что касается реликтового избытка, он определяется соотношением (70), в котором величина

$$J = \int_0^{x_f} \langle v\sigma_{\text{eff}} \rangle dx. \tag{79}$$

При этом мы считаем, что все почти вырожденные с LSP частицы распадаются на LSP. В суперсимметричных моделях ко-аннигиляционные каналы включают нейтралино, чарджино и сфермионы.

7.9. Суперсимметрия и ее космологические приложения

Подробно суперсимметрия рассмотрена в главе 1 части II. Здесь же мы кратко сформулируем основные идеи SUSY, имея в виду значимость SUSY частиц для космологии.

В SUSY фермионы и бозоны входят парами, имеющими одинаковые константы связи и массы. При спонтанном нарушении локальной SUSY, происходящем на планковских масштабах, партнер гравитона — гравитино становится массивным ($m_{3/2} \neq 0$). Это так называемый супер-хиггс эффект. При этом вырожденные по массе фермионы и бозоны смещаются по массе на величину M_S. Заметим, что величина параметра M_S зависит от конкретного механизма нарушения SUSY. При гораздо меньшем масштабе энергий $E \ll M_{\text{Pl}}$, достижимом на LHC, если $M_S \simeq O$(ТэВ), теория суперсимметрична, но содержит члены, «мягко» нарушающие SUSY.

Суперсимметричные расширения стандартной модели предсказывают кандидатов на ТМ. Это могут быть нейтралино или гравитино или другие частицы, чей реликтовый избыток находится в космологических пределах.

Наиболее экономным суперсимметричным расширением стандартной модели является минимальная суперсимметричная стандартная модель (MSSM), состав частиц которой (сектор SUSY)

Таблица 2

Частица	**Название**	**Спин**
$\tilde{q}$	скварк	0
$\tilde{l}$	слептон	0
$\tilde{W}^{\pm}$, $\tilde{W}^0$	вино	1/2
$\tilde{B}$	бино	1/2
$\tilde{G}$	глюино	1/2
$\tilde{H}_{1,2}$	хиггсино	1/2

Заметим, что в отличие от стандартной модели, хиггсы $H_{1,2}$ не являются независимыми, и пять хиггсовских фермионов «выживает» после электрослабого нарушения. Частицы MSSM обладают дополнительной симметрией, называемой R-четностью

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2S}, \tag{80}$$

где B, L — барионные и лептонные числа частицы и S — ее спин. $P_R = +1$ для «обычных» частиц и $P_R = -1$ для суперсимметричных частиц. Это квантовое число — мультипликативное, которое сохраняется в теориях, обладающих R-четностью, и запрещает процессы с нарушением барионного и лептонного числа. Вследствие R-четности, легчайшая суперсимметричная частица (LSP) должна быть стабильной. Действительно, в теориях, сохраняющих R-четность, вершины должны содержать четное число суперсимметричных частиц. Таким образом, SUSY частица может распадаться только на нечетное число SUSY частиц и на четное или нечетное число частиц стандартной модели. Для LSP такой распад энергетически подавлен, поскольку она — легчайшая. Если, к тому же она электрически нейтральна и не участвует в сильных взаимодействиях, то ее относят к WIMP.

Ограниченная MSSM (CMSSM) — наиболее исследованная суперсимметричная модель, включающая стандартную модель. Эта модель в значительной степени мотивирована минимальной теорией супергравитации (mSUGRA) и отличается от MSSM универсальными граничными условиями, накладываемыми на скаляр, калибрино и тройные константы связи на масштабе объединения. При этом отношение $\langle H_2\rangle / \langle H_1\rangle$ является единственным произвольным параметром теории. Другие параметры μ, m_3^2, приводящие к смешиванию хиггсовских мультиплетов, определяются условиями электрослабого нарушения симметрии.

7.9.1. Нейтралино. Нейтральные компоненты хиггсино $\tilde{H}^0_{1,2}$, нейтральный вино $\tilde{W}^0$ и бино $\tilde{B}$ слабо взаимодействуют, но они не являются собственными массовыми состояниями. Четыре массовых состояния $\tilde{\chi}^0_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, называемых нейтралино, оказываются линейными комбинациями упомянутых выше частиц. Нейтралино — майорановские фермионы, т. е. частицы совпадают со своими античастицами, они обладают половиной степеней свободы заряженных дираковских частиц (например, электронов).

В MSSM «входными» параметрами для нарушения SUSY являются m_0, $M_{1/2}$, A_0 и $\operatorname{tg}\beta$ (см. главу 1 части II). В этой модели легчайшее из нейтралино, которое обозначим через $\tilde{\chi}$, может быть LSP. Являясь линейной комбинацией хиггсино, вино и бино, состояние $\tilde{\chi}$ можно представить в виде

$$\tilde{\chi} = a_1\tilde{H}^0_1 + a_2\tilde{H}^0_2 + a_W\tilde{W}^0 + a_B\tilde{B}, \tag{81}$$

причем условие нормировки требует $\sum\limits_i |a_i|^2 = 1$. В зависимости от величин a_i, различают два класса состояний

$$\begin{aligned} &|a_1|^2 + |a_2|^2 \gg |a_W|^2 + |a_B|^2 \text{ — хиггсиноподобное нейтралино;}\\ &|a_1|^2 + |a_2|^2 \ll |a_W|^2 + |a_B|^2 \text{ — калибриноподобное нейтралино.} \end{aligned} \tag{82}$$

Для первого класса состояний LSP — главным образом хиггсино, а для второго — калибрино. В CMSSM $\tilde{\chi}$ — калибриноподобное состояние — бино в основной области пространства параметров. Отсутствие наблюдения $\tilde{\chi}$ на современных ускорителях дает нижнюю границу на его массу $m_{\tilde{\chi}} > 46$ ГэВ.

Если $\tilde{\chi}$ — LSP и стабильно в теориях, сохраняющих R-четность, то в некоторую эпоху космологический коктейль содержал как $\tilde{\chi}$, так и частицы стандартной модели. Все другие SUSY частицы к тому времени уже распались на $\tilde{\chi}$ и частицы стандартной модели. После этого число LSP может только уменьшаться из-за их аннигиляции в частицы стандартной модели: $\tilde{\chi}+\tilde{\chi} \to A+B+\ldots$ В MSSM в лидирующем порядке по константе связи происходят аннигиляции в две частицы.

Как уже отмечалось, в минимальном суперсимметричном расширении стандартной модели имеется 4 хиггсовских массовых состояний $H^{\pm}$, H, h, A. Последние три состояния — электрически нейтральны, в отличие от стандартной модели с одним нейтральных хиггсом. Ускорительные эксперименты дают возможность ограничения масс SUSY частиц. Эти данные, наряду с космологическими ограничениями на избыток реликтовой ТМ, существенно сужают пространство параметров рассматриваемых моделей. Данные LEP и Тэватрона дают для массы чарджино нижнюю границу 104 ГэВ, для слептонов же нижняя граница 99 ГэВ. Ограничение LEP на массу Хиггс бозона $m_H \geq 114$ ГэВ. Другие важные ограничения следуют из распада $b \to s\gamma$. Для этого распада бренчинг должен находиться в пределах

$$1{,}8 \cdot 10^{-4} < Br(b \to s\gamma) < 4{,}5 \cdot 10^{-4}. \qquad (83)$$

Брукхейвенский эксперимент E821 получил величину аномального магнитного момента мюона $\alpha_\mu = (g_\mu - 2)/2 = 11659203(8) \cdot 10^{-10}$. Это значение соответствует расхождению с предсказанием стандартной модели $\delta\alpha_\mu = (361 \pm 106) \cdot 10^{-11}$, что составляет отклонение в $3{,}3\sigma$. Этот результат позволяет найти верхние пределы на массы SUSY частиц. Однако теоретические неопределенности, связанные с несоответствием данных по e^+e^- и распаду τ, используемых для вычисления $(g_\mu - 2)$, не позволяют сделать окончательные заключения о вкладе SUSY частиц. В табл. 3 приведены верхние границы на массы SUSY частиц при различных значениях параметра $\operatorname{tg}\beta$.

Таблица 3

$\operatorname{tg}\boldsymbol{\beta}$	$\tilde{\chi}$	χ^+	$\tilde{\tau}$	$\tilde{t}$	**Хиггс**
10	155	280	170	580	116
15	168	300	185	640	116
20	220	400	236	812	118
30	260	470	280	990	118
40	290	520	310	1080	119
50	305	553	355	1120	119
55	250	450	585	970	117

Как видно из этой таблицы, SUSY должна быть наблюдаемой на LHC.

Для детектирования ТМ очень важен процесс рассеяния нейтралино на нуклоне $\tilde{\chi} + N \to \tilde{\chi} + N$. К сожалению, сечение этого процесса $\sigma \simeq 10^{-7} \div 10^{-8}$ пб таково, что пока трудно провести чувствительный эксперимент.

Очень интересно было бы попытаться зарегистрировать аннигиляцию реликтовых частиц в галактическом гало: $\tilde{\chi}\tilde{\chi} \to \bar{p}, e^+, \ldots$; в центре Галактики: $\tilde{\chi}\tilde{\chi} \to \gamma + \ldots$ или внутри Солнца $\tilde{\chi}\tilde{\chi} \to \nu + \ldots \to \mu + \ldots$

7.9.2. Гравитино. Гравитино $g_{3/2}$ — суперпартнер гравитона со спином 3/2, возникающий в теориях супергравитации. Гравитино получает ненулевую массу после спонтанного нарушения локальной суперсимметрии. Гравитино связано с суперсимметричной материей, и если масса $m_{3/2}$ больше, чем у легчайшего нейтралино $\tilde{\chi}$,

то возможен гравитационный распад $g_{3/2} \to \tilde{\chi} + \gamma$. Если же гравитино легче $\tilde{\chi}$, то происходит распад $\tilde{\chi} \to g_{3/2} + \gamma$. В таком распаде возникает электромагнитное излучение, которое способно изменять нуклеосинтез Большого Взрыва. Действительно, электромагнитное излучение разрушает ^{4}D, ^{7}He, ^{7}Li и приводит к избытку ^{6}Li. Наиболее прямой метод измерения отношения плотностей барионов и фотонов $\eta = n_B/n_\gamma$ состоит в регистрации реликтового излучения. Экспериментальное значение $\eta = (6{,}14 \pm 0{,}25) \cdot 10^{-10}$ дает возможность оценить избытки легких элементов (табл. 4).

Таблица 4

Элемент	**Предсказание**	**Наблюдение**
Y_p	$0{,}2485 \pm 0{,}0005$	$0{,}232 \div 0{,}258$
D/H	$2{,}55^{+0{,}21}_{-0{,}20} \cdot 10^{-5}$	$(2{,}78 \pm 0{,}29) \cdot 10^{-5}$
^{3}He/H	$(1{,}01 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-5}$	$(1{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-5}$
^{7}Li/H	$4{,}26^{+0{,}73}_{-0{,}60} \cdot 10^{-10}$	$1{,}23^{+0{,}68}_{-0{,}32} \cdot 10^{-10}$
^{6}Li/H	$(1{,}3 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-14}$	$6^{+7}_{-3} \cdot 10^{-12}$

Как видно из этой таблицы, наблюдаемые значения в пределах погрешностей совпадают с предсказаниями для всех легких элементов, за исключением лития. Действительно, предсказываемые значения ^{7}Li почти в три раза больше астрофизических значений. Однако ^{6}Li предсказывается на три порядка меньше, чем наблюдается. Электромагнитное излучение и адронные ливни в ранней Вселенной способны нарушить процесс формирования ядер и предсказания модели нуклеосинтеза Большого Взрыва. Такое электромагнитное излучение и адронные ливни могут вызываться распадами нестабильных частиц со временами жизни $\tau > 10^2$ с. В теории супергравитации, как уже подчеркивалось выше, возможны распады $g_{3/2} \to \tilde{\chi} + \gamma$ или $\tilde{\chi} \to g_{3/2} + \gamma$. Эти распады вполне способны изменить соотношения между легкими элементами в процессе нуклеосинтеза Большого Взрыва.

Нестабильное гравитино ($m_{3/2} > m_{\tilde{\chi}}$). Ширина распада гравитино

$$\Gamma(g_{3/2} \to \tilde{\chi} + \tilde{\gamma}) = \frac{1}{4} \frac{m_{3/2}}{M_{\text{Pl}}} Q^2_{\tilde{\chi}\tilde{\gamma}}, \tag{84}$$

где $Q_{\tilde{\chi}\tilde{\gamma}}$ — матричный элемент, связывающий массовые собственные состояния $\tilde{\chi}$ и фотино $\tilde{\gamma}$. Предположим, что $\tilde{\chi} = \tilde{B}$, тогда матричный элемент $Q_{\tilde{\chi}\tilde{\gamma}} = \cos\theta_W$. Если другие распады отсутствуют, то время жизни

$$\tau_{3/2} = 2{,}9 \cdot 10^8 \left(\frac{100\ \text{ГэВ}}{m_{3/2}}\right)^3 \text{с}. \tag{85}$$

Для массы гравитино в интервале 100 ГэВ $\div$ 10 ТэВ времена жизни гравитино $\tau_{3/2} = (10^2 \div 10^8)$ с, т. е. это действительно достаточно долгоживущие частицы. С другой стороны, относительная концентрация гравитино, рожденных в термодинамическом ансамбле

$$Y_{3/2} = \frac{n_{3/2}}{n_\gamma} = 1{,}2 \cdot 10^{-11} \left(1 + \frac{m^2_{\tilde{g}}}{12 m^2_{3/2}}\right) \frac{T_R}{10^{10}\ \text{ГэВ}}, \tag{86}$$

где T_R — максимальная температура Вселенной. Для характерных масс глюино $m_{\tilde{g}}$ и гравитино

$$Y_{3/2} = (0{,}7 \div 2{,}7) \cdot 10^{-11} \frac{T_R}{10^{10}\ \text{ГэВ}}. \tag{87}$$

Из модели нуклеосинтеза Большого Взрыва (BBN) следует ограничение на $Y_{3/2}$. Например, для массы гравитино в 100 ГэВ и времени жизни $\tau_{3/2} = 10^8$сек получаем

$$Y_{3/2} \leq 5 \cdot 10^{-14}. \tag{88}$$

Тогда из (87), (88) следует ограничение:

$$T_R < 7 \cdot 10^7 \text{ ГэВ}. \tag{89}$$

Этот предел гораздо меньше температур, предсказываемых инфляционными моделями $T_R \simeq 10^{12}$ ГэВ.

Таким образом, представление о нестабильном гравитино противоречит предсказаниям инфляционных моделей.

Стабильное гравитино ($m_{3/2} < m_{\tilde{\chi}}$). В случае стабильного гравитино, другие SUSY частицы, например, $\tilde{\tau}$ или $\tilde{\chi}$ способны распадаться на гравитино. Для распада нейтралино

$$\Gamma(\tilde{\chi} \to g_{3/2} + \tilde{\gamma}) = \frac{1}{16\pi} \frac{O^2_{\tilde{\chi}\tilde{\gamma}}}{M^2_{\rm Pl}} \frac{m^5_{\tilde{\chi}}}{m^2_{3/2}} \left(1 - \frac{m^2_{3/2}}{m^2_{\tilde{\chi}}}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{m^2_{3/2}}{m^2_{\tilde{\chi}}}\right), \tag{90}$$

где $O_{\tilde{\chi}\tilde{\gamma}} = O_{1\tilde{\chi}} \cos\theta_W + O_{2\tilde{\gamma}} \sin\theta_W$.

Гравитино, как кандидат на ТМ, рождается при распаде следующей SUSY частицы (NSP): NSP $\to g_{3/2} + \gamma$ и имеет реликтовую плотность

$$\Omega_{3/2} h_0^2 = \frac{m_{3/2}}{m_{\rm NSP}} \Omega_{\rm NSP} h_0^2 < \Omega_{\rm NSP} h_0^2. \tag{91}$$

Из BBN ограничений, особенно из данных по ^6Li:

$$\frac{n_{\rm NSP}}{n_\gamma} \leq 5 \cdot 10^{-14} \left(\frac{100 \text{ ГэВ}}{m_{\rm NSP}}\right). \tag{92}$$

Для $\tau_{\rm NSP} = 10^8$ с и $n_B/n_\gamma = 6 \cdot 10^{-10}$ получаем ограничения

$$\Omega_{\rm NSP} h_0^2 < \frac{10^{-2}}{m_{\rm NSP}} \Omega_B h_0^2 < 10^{-2} \Omega_B h_0^2 \sim 2 \cdot 10^{-4}. \tag{93}$$

Подставляя (93) в (91), находим

$$\Omega_{3/2} h_0^2 < 2 \cdot 10^{-4}. \tag{94}$$

Но этого слишком мало по сравнению с 0,1, требующимся космологическими данными. Вообще говоря, значение 0,1 — типичное для суперсимметричных моделей, имеющих нейтралино в качестве LSP. При проведении оценок, приведших к (94), мы считали время жизни NSP: $\tau_{\rm NSP} \simeq 10^8$ с. Для короткоживущих NSP ограничение (94) уже не столь строгое, однако по-прежнему $\Omega_{3/2} h_0^2 < \Omega_{\rm NSP} h_0^2$, и для учета $\Omega_{\rm NSP} h_0^2 \simeq 0{,}1$ нужно привлечь дополнительный механизм рождения гравитино, например, помимо распадов NSP учесть перегрев Вселенной после инфляции.

7.10. Темная энергия и космологическая постоянная

Небарионная темная материя, состав которой неизвестен, но существование несомненно, составляет примерно 1/3 от плотности Вселенной. Оставшиеся 2/3 следует отнести к компоненте с большим отрицательным давлением, называемой темной

энергией (DE). Простейший пример DE — космологическая константа, введенная А. Эйнштейном в 1917 г. Уравнение Эйнштейна имеет вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} + \Lambda g_{ik}. \tag{95}$$

Первоначально Эйнштейн ввел космологическую константу в левую часть уравнения, в последнее время ее включают в правую часть и трактуют как эффективную форму материи. В однородной и изотропной Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, состоящей из пылевидной материи, уравнение для масштабного параметра

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}a\rho_m + \frac{\Lambda}{3}. \tag{96}$$

Это уравнение можно переписать для силы

$$F = -\frac{GM}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}R, \quad (R \equiv a). \tag{97}$$

Из этого соотношения видно, что космологическая константа играет роль отталкивательной силы, чья величина растет с расстоянием. С отталкивательной природой Λ связано ускорение Вселенной (96).

Введенная в 1917 году, Λ оставалась достаточно загадочной величиной до 1960-х годов, когда было установлено, что вакуумные флуктуации должны быть Лоренц-инвариантны, поэтому $\langle T_{ik}\rangle = \Lambda g_{ik}$. Однако вакуумные средние тензора энергии-импульса расходятся как для бозонов, так и для фермионов — это так называемая «проблема космологической константы». Действительно, эффективная космологическая константа, возникающая за счет вакуумных флуктуаций,

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} = \langle T_{00}\rangle_{\text{вак}} \sim \int\limits_0^\infty \sqrt{k^2+m^2}k^2\,dk \tag{98}$$

расходится $\sim k^4$. Даже если выбрать «регуляризованный» $\langle T_{ik}\rangle$, вводя ультрафиолетовое обрезание на планковской шкале, вакуумная энергия оказывается слишком большой $\langle T_{00}\rangle_{\text{вак}} \simeq c^5/(G^2h) \sim 10^{76}$ ГэВ^4. Это значение на 123 порядка величины больше наблюдаемого $\Lambda \simeq 10^{-47}$ ГэВ^4. Если произвести обрезание на КХД-масштабе $\Lambda^4_{\text{КХД}} \simeq 10^{-3}$ ГэВ^4, то полученное значение вакуумной энергии будет на 40 порядков больше наблюдаемого.

В 1970-е годы, после появления идей суперсимметрии, возникла надежда разрешения космологической проблемы за счет различных вкладов в вакуумную энергию частиц и их суперпартнеров. Однако суперсимметрия, если она существует, нарушена при современных температурах и энергиях. Поэтому следует считать, что космологическая константа была равна нулю на ранних стадиях эволюции Вселенной, ненулевое ее значение возникло при температурах T_{SUSY} нарушения суперсимметрии. Это нежелательный сценарий, поскольку теории инфляции требуют больших значений Λ. В отсутствие разрешения космологической проблемы можно рассмотреть следующую возможность, связывающую вакуумную энергию с SUSY и планковскими масштабами.

В некоторых моделях масштаб нарушения SUSY ~ 1 ТэВ, т. е. 10^{-3} эВ $\ll M_{\text{SUSY}} \ll M_{\text{Pl}}$. Предполагаем, что малое значение космологической константы $\Lambda \simeq (10^{-3}$ эВ$)^4$ есть свойство вакуума в теории с фундаментальной массой $M_X = M^2_{\text{SUSY}}/M_{\text{Pl}}$. Тогда $\Lambda \sim M_X^4 \sim (10^{-3}$ эВ$)^4$.

Космологическая константа возникает и в моделях со спонтанным нарушением симметрии. Действительно, рассмотрим лагранжиан скалярного поля

$$L = \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - V(\phi),$$
$$V(\phi) = V_0 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4. \tag{99}$$

Очевидно, что симметричное состояние нестабильно и распадается на два основных состояния $\phi = +\sigma$ или $\phi = -\sigma$, где $\sigma = \sqrt{\mu^2/\lambda}$. При этом нарушается симметрия $\phi \to -\phi$, содержащаяся в лагранжиане. Для $V_0 = 0$ в состоянии с нарушенной симметрией возникает большая отрицательная космологическая константа $\Lambda_{\rm eff} = V(\phi = \sigma) = -\mu^4/(4\lambda)$. Можно попытаться избежать этой ситуации, выбрав величину V_0 так, чтобы скомпенсировать $\Lambda_{\rm eff}$: $V_0 \simeq +\mu^4/(4\lambda)$. Тогда $\Lambda_{\rm eff}/(8\pi G) = V_0 - \mu^4/(4\lambda) \simeq 10^{-47}$ ГэВ^4. Космологические следствия такой «регуляризации» можно сформулировать следующим образом: если $\Lambda_{\rm eff}$ такова, что $\Lambda_{\rm eff}/(8\pi G) < 10^{-43}$ ГэВ^4, то Вселенная за время, меньшее миллиарда лет, начнет коллапсировать. Это время меньше времени формирования галактик и разумной жизни. С другой стороны, если $\Lambda_{\rm eff}/(8\pi G) > 10^{-43}$ ГэВ^4, то ускорение Вселенной приведет к подавлению возникновения структур и разумной жизни. Таким образом, только очень узкое «окно» для величины Λ позволяет надеяться на возможность возникновения жизни. Это предположение лежит в основе антропного принципа. Если «наш» Большой Взрыв — лишь один из многих Больших Взрывов с различными значениями вакуумной энергии, то естественно предполагать, что некоторые из этих Больших Взрывов имеют вакуумную энергию, допускающую формирование галактик и жизни.

Важно подчеркнуть, что неизвестна фундаментальная симметрия природы, которая бы обеспечивала значение $\Lambda = 0$. В этом случае необходимо рассматривать динамические модели темной материи.

Перепишем уравнение (96) при $\Lambda \simeq 0$ в следующем виде

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\sum_i (\rho_i + 3p_i) = -\frac{4\pi G}{3}\sum_i \rho_i(1 + 3w_i), \tag{100}$$

где суммирование производится по все формам материи, присутствующим во Вселенной и имеющим уравнение состояния $w_i = p_i/\rho_i$.

Уравнение (100) совместно с уравнением

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2} \tag{101}$$

полностью описывает динамику Вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера (k/a^2 — гауссова кривизна пространства).

Если Вселенная состоит из одной компоненты материи, то она будет ускоряться при $w < -1/3$. Жидкости с $\rho + 3p \geq 0$ имеют $w \geq -1/3$ и, как говорят, удовлетворяют «сильному энергетическому условию» (SEC).

Таким образом, чтобы темная энергия вызывала ускорение Вселенной, нужно, чтобы она удовлетворяла SEC.

Иногда соотношение (100) переписывают через параметр

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \sum_i \left(\frac{4\pi G\rho_i}{3H^2}\right)(1 + 3w_i) = \frac{(1 + 3w_x\Omega_x)}{2}, \tag{102}$$

где $\Omega_i = 8\pi G\rho_i/(3H^2)$ и сделано предположение о том, что Вселенная плоская ($\Omega_m + \Omega_x = 1$), и $\Omega_x = \Omega_{DE}$. Условие ускоренного расширения ($q < 0$) эквивалентно условию

$$w_x < -\frac{1}{3(1-\Omega_m)}, \tag{103}$$

т. е.

$$\begin{aligned} w &< -\frac{1}{3} \quad \text{для} \quad \Omega_m = 0, \\ w &< -\frac{1}{2} \quad \text{для} \quad \Omega_m = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{104}$$

Уравнение (103) позволяет выразить хаббловский параметр $H \equiv \dot{a}/a$ в терминах космологического красного смещения $z = a_0/a(t) - 1$:

$$H(z) = H_0\left[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_x(1+z)^{3(1+w)}\right]^{1/2}, \tag{105}$$

где $H_0 = H(z=0)$ — значение постоянной Хаббла в настоящее время, $\Omega_m = \dfrac{8\pi G\rho_{0m}}{3H_0^2}$, $\Omega_x = 8\pi G\rho_{0DE}/(3H_0^2)$ описывают безразмерные плотности материи и темной энергии ($w = w_{DE}$). Если $w = -1$, $\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H_0^2)$, то фактор расширения имеет вид

$$a(t) \sim \left(\sinh\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}ct\right)^{2/3} \tag{106}$$

и интерполирует между расширением Вселенной в прошлом ($a \sim t^{2/3}$) и ускоренным расширением в будущем ($a \sim \exp\sqrt{\Lambda/3}t$).

Вселенная ускоряется, и это утверждение следует из наблюдений больших значений красного смещения для суперновых типа 1A. Эти звезды очень яркие, и они являются идеальным «инструментом» исследования свойств Вселенной на больших расстояниях. В пользу ускоряющейся Вселенной свидетельствует и анализ флуктуаций космического микроволнового излучения (CMB). Если темная энергия описывается уравнением состояния $w = p_x/\rho_x$, то имеется переход между замедленным и ускоренным расширением Вселенной. Это происходит при красном смещении

$$(1+z_a)^{-3w} = -(1+3w)\frac{\Omega_x}{\Omega_m}w < 0. \tag{107}$$

Имеются также значения красного смещения, описывающие эпоху, в которой плотность темной материи и темной энергии равны:

$$(1+z_{eq})^{3w} = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_x}\right). \tag{108}$$

Если $\Omega_x = 0{,}7$, $\Omega_m = 0{,}3$, то $z_a \simeq 0{,}73$, $z_{eq} \simeq 0{,}37$.

Оказывается, что ускорение Вселенной — достаточно недавнее явление, и мы живем в эпоху «космического совпадения», когда плотности темной энергии и темной материи равны. Заметим, что это утверждение относится к моделям темной энергии с неэволюционирующими (не зависящими от времени) уравнениями состояния. В этих моделях необходимо так подобрать начальные условия (tuning), чтобы в настоящую эпоху возникла наблюдаемая Вселенная. Это наиболее существенная проблема космологической константы. Так как космологическая константа не зависит от времени, а материя и излучение — зависят ($\rho_m \sim a^{-3}$, $\rho_r \sim a^{-4}$), то малое

современное значение $\rho_\Lambda = \Lambda/(8\pi G) \sim 10^{-47}$ ГэВ^4 подразумевает, что $\rho_\Lambda/\rho_r \sim 10^{-123}$ при планковских временах (когда температура Вселенной была $T \sim 10^{19}$ ГэВ) или $\rho_\Lambda/\rho_r \sim 10^{-55}$ во времена электрослабого перехода ($T \simeq 100$ ГэВ). Поэтому для объяснения соотношения $\rho_\Lambda/\rho_m \simeq 1$ в настоящую эпоху необходима весьма тонкая (fine-tuning) подгонка начальных условий. Интересно, что fine-tuning проблема становится не столь острой, если допустить, что уравнения состояния зависят от времени. Важный класс такого типа моделей образуют скалярные поля, минимально связанные с гравитацией. Например, с лагранжианом и тензором энергии-импульса

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \\ \rho \equiv T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p \equiv -T_\alpha^\alpha = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \end{gathered} \tag{109}$$

причем поля ϕ считаются однородными, а потенциалы — достаточно пологие, удовлетворяющие условию $\Gamma \equiv V''V/(V')^2 \geq 1$. Скалярные поля с такого типа потенциалами эволюционируют к общему состоянию из весьма широкого набора начальных условий.

В этих, так называемых трекерных моделях, плотность скалярного поля (и его уравнение состояния) остается близким к плотности доминирующего фона материи.

Пример трекерного потенциала — $V(\phi) = V_0/\phi^\alpha$. В этом случае отношение плотности энергии скалярного поля к плотности энергии излучения (материи) возрастает $\rho_\phi/\rho_B \sim t^{4/(2+\alpha)}$. Для больших ϕ потенциал $V(\phi) = V_0/\phi^\alpha$ выполаживается, скалярное поле при этом медленно изменяется ($\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$), допуская при этом ускорение Вселенной.

Рассмотрим теперь проблему темной материи в модели бран. Как мы уже обсуждали в главе 5 части II, бранная космология предполагает, что мы живем на 3-мерной бране, погруженной в многомерный (обычно 4-мерный) объем. При этом все поля материи находятся на бране, а гравитон распространяется как на бране, так и в объеме. Уравнение движения для скалярного поля, распространяющегося на бране

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \tag{110}$$

где

$$\begin{gathered} H^2 = \frac{8\pi}{3m^2}\rho\left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\varepsilon}{a^4}, \\ \rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \end{gathered} \tag{111}$$

В этих выражениях ε — постоянная интегрирования, характеризующая воздействие гравитона на брану, а натяжение браны σ связывает 4-мерную (m) и 5-мерную (M) планковские массы:

$$m = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left(\frac{M^3}{\sqrt{\sigma}}\right). \tag{112}$$

Натяжение σ связывает также 4-мерную космологическую константу Λ_4 на бране с 5-мерной (объемной) космологической константой Λ_b:

$$\Lambda_4 = \frac{4\pi}{M^3}\left(\Lambda_b + \frac{4\pi}{M^3}\sigma^2\right). \tag{113}$$

Уравнения (111) содержат дополнительное слагаемое ρ^2/σ, характерное для моделей инфляционного типа.

От природы темной энергии зависит будущее Вселенной. Если темная энергия — это космологическая константа, то Вселенная будет бесконечно ускоряться. Важно отметить, что ускоряющаяся Вселенная формирует горизонт событий, подобно черной дыре. Действительно, рассмотрим событие (r_1, t_1), которое мы хотели бы наблюдать в точке $r = 0$. Полагая квадрат интервала $ds^2 = 0$, получаем

$$\int\limits_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{cdt'}{a(t')}, \tag{114}$$

где $k = \Omega_m/(1-\Omega_m)$.

Любое событие во Вселенной будет наблюдаемым, если интеграл в правой части последнего уравнения расходится при $t \to \infty$. Для степенного закона расширения $a \sim t^p$, $p < 1$ это означает уменьшение скорости расширения. В ускоряющейся Вселенной верно обратное утверждение: интеграл в правой части сходится, сигнализируя о наличии горизонта событий. В этом случае наша цивилизация будет получать сигналы, только от тех событий, которые удовлетворяют условию:

$$\int\limits_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \leq \int\limits_{t_1}^{\infty} \frac{cdt'}{a(t')}. \tag{115}$$

Для де-ситтеровского расширения $a = a_1 \exp H(t-t_1)$, $H = \sqrt{\Lambda/3}$ получаем $r_1 = (c/a_1)H$, т. е. собственное расстояние до горизонта событий $R_H = a_1 r_1 = c/H$.

Если $H \equiv H(t \to \infty) = \sqrt{\Lambda/3} = H_0\sqrt{1-\Omega_m}$, то расстояние до горизонта

$$R_H = \frac{c}{H_0\sqrt{1-\Omega_m}}. \tag{116}$$

Существование горизонта событий подразумевает для каждого момента времени t_0 наличие «сферы влияния» на нашу цивилизацию. Этой сфере можно сопоставить красное смещение z_H, и для небесного тела с $z > z_H$ никакие сигналы нашей цивилизации не способны достичь его как в настоящем, так и в будущем. При $\Omega_1 \simeq 2\Omega_m \simeq 2/3$ $z_H \simeq 1{,}8$. Все объекты с $z > 1{,}8$ лежат за горизонтом событий. Ключевым вопросом для темной энергии является вопрос об уравнении состояния. Справедливо ли равенство $w = -1$ для темной энергии? Иными словами, равно ли единице выражение $a/(aH^3)$? Если будущие наблюдательные данные ответят утвердительно на эти вопросы, то можно будет утверждать, что космологическая константа и есть вакуумная энергия.

В этом случае нужно будет пересмотреть проблему космологической константы, поскольку необходимо понять, почему формально бесконечная величина $\langle T_{ik} \rangle$ фактически оказывается очень малой. С другой стороны, если окажется, что или $w \neq -1$, или плотность темной энергии зависит от времени, то проблему космологической константы следует отделить от проблемы темной энергии.

7.11. Заключение

Суперсимметричная холодная материя является весьма привлекательной с точки зрения «недостающей» массы Вселенной. SUSY теории, как ожидается, будут исследованы на ускорителе LHC. Подтверждение существования суперсимметрии

будет иметь важнейшие следствия для космологии. Нейтралино было бы идеальным кандидатом для объяснения проблем ТМ. Гравитино также весьма привлекательный кандидат. Однако в SUSY теориях в большей части параметрического пространства реликтовая плотность гравитино гораздо меньше, чем требуется астрономическими наблюдениями. В этом случае, помимо распада NSP, надо учесть рождение гравитино в термодинамическом ансамбле.

ГЛАВА 8

СТРУНЫ «С ПТИЧЬЕГО ПОЛЕТА»

8.1. Введение

К концу XX века была создана весьма успешная теория элементарных частиц, описывающая три из четырех фундаментальных сил — электромагнитные, слабые и сильные ядерные взаимодействия. При этом основу теории составляет квантовая теория поля — квантовомеханическая теория локальных полей. Стандартная модель, включающая электрослабую теорию и квантовую хромодинамику, весьма успешна при описании экспериментальных данных. Эксперименты на ускорителях дают возможность исследования материи на расстояниях $\simeq 10^{-18}$ см, и во всех экспериментах стандартная модель «работает» очень хорошо. В квантовой электродинамике точность теоретических предсказаний измеряемых величин составляет $\simeq 10^{-10}$, а в электрослабой теории $\sim 10^{-5}$. В КХД погрешности находятся на уровне, меньшем процента, а для некоторых величин — на уровне 10^{-3}.

Итак, стандартная модель, основанная на квантовой теории поля, — очень хорошая предсказательная теория, и нет оснований в том, чтобы усомниться в ее применимости вплоть до планковских масштабов $\sim 10^{-33}$ см.

С другой стороны, стандартная модель содержит значительное число нерешенных вопросов, многие из которых вытекают из самой модели, но, по-видимому, не могут быть решены в подходе квантовой теории поля. Например, взаимодействия элементарных частиц осуществляются неабелевыми полями Янга–Миллса. Почему поля Янга–Миллса имеют такое «привилегированное» положение? В теории поля существует множество других взаимодействий, но они почему-то не проявляют себя. Почему константы взаимодействий (например, α_{em}) принимают именно такие, вполне определенные значения?

Если посмотреть на семейства кварков и лептонов, то обнаружим, что их три, причем массы и углы смешивания семейств принимают весьма непонятные значения.

Если обратиться к гравитации, то возникает вопрос: как квантовать гравитационное поле? И в пространстве какого числа измерений? Почему пространство трехмерно и действительно ли оно трехмерно?

Попытки получить ответы на эти вопросы постоянно предпринимаются, но без особого успеха. Весьма вероятно, что в рамках стандартной модели (как квантовой теории поля) ответов получить не удастся.

Можно попытаться экстраполировать стандартную модель на все более высокие энергии. Как уже отмечалось выше, разнообразие сил между элементарными частицами определяется неабелевыми полями Янга–Миллса. Но они проявляют себя по-разному при низких энергиях. Сильные взаимодействия очень интенсивны, слабые же и электромагнитные взаимодействия проявляются себя в гораздо меньшей степени. Но в квантовой теории поля все силы зависят от расстояния, и это свойство вакуума — динамической среды, заполненной виртуальными квантами. Сильное взаимодействие, в силу свойства асимптотической свободы, ослабевает на малых расстояниях (больших энергиях). Таким образом, при экстраполяции интенсивности

сильного взаимодействия, оно ослабевает, и при достаточно высоких энергиях может сравняться с интенсивностью сил слабого и электромагнитного взаимодействий. При сверхвысоких энергиях ($\sim 10^{15} \div 10^{16}$ ГэВ) все взаимодействия (сильные и электрослабые) сливаются в рамках теории большого объединения. Масштаб объединения, по сравнению с имеющимися ускорительными энергиями, велик, но это не означает, что ничего интересного нас не ожидает при меньших энергиях.

В последние годы мы узнали много нового об элементарных частицах и их взаимодействиях. Оказывается, что (по крайней мере) один тип нейтрино имеет ненулевую массу и что различные сорта нейтрино смешиваются между собой. Узнали о новых модах CP-нарушения и нарушении T-инвариантности. Но эти явления объяснимы в рамках стандартной модели, наличие же массы у нейтрино можно учесть на пути естественного расширения стандартной модели.

В 2007 г. в ЦЕРН начнет работу ускоритель LHC. Как ожидается, на этом ускорителе будет открыт хиггсовский бозон как проявление динамики спонтанного нарушения электрослабой калибровочной симметрии. Другой важнейшей задачей LHC является открытие суперсимметрии. Суперсимметрия — естественное расширение симметрии специальной и общей теории относительности. Концепция суперсимметрии исторически была предложена в теориях струн, а позднее применена в квантовой теории поля. Представим себе, что пространство–время имеет дополнительные измерения. Если раньше, характеризуя событие, мы говорили, что оно происходит в пространственной точке x в момент t, то в пространстве с дополнительными измерениями положение определяется не обычными, а так называемыми грассмановыми числами. Эти числа антикоммутативны: $\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1$. Обобщением «традиционного» пространства–времени, включающим антикоммутирующие квантовые измерения, является суперпространство. В таком суперпространстве существуют преобразования, переводящие квантовые координаты θ в пространственные координаты x.

В таких суперпространствах можно строить теории квантовых полей. Такие теории называются суперсимметричными. Поля в таких теориях зависят не только от пространственно-временных, но и суперпространственных координат. В суперсимметричной теории у каждой частицы существует суперпартнер. Суперпартнер получается при повороте пространства, переводящего коммутирующую координату, например x, в антикоммутирующую координату. Поэтому кварку соответствует скалярный партнер «скварк», электрону — партнер с нулевым спином «сэлектрон», фотону — фотино и т. д.

Однако до сих пор суперпартнеров к обычным частицам не наблюдалось, и в этом, вообще говоря, нет ничего удивительного. Возможно, что суперсимметрия была спонтанно нарушена уже в первоначальном состоянии Вселенной. Действительно, многие симметрии в природе спонтанно нарушаются. Если масштаб нарушения суперсимметрии «достаточно большой», то это объясняет ненаблюдаемость частиц-партнеров. Если же удастся это сделать на LHC, то это будет прорывом в новые квантовые измерения пространства–времени. Суперсимметрия имеет несколько весьма привлекательных свойств. Она способна объяснить, почему шкала объединения столь велика по сравнению с электрослабым масштабом (проблема иерархий). Если взять стандартную модель, учесть в ней суперсимметрию «минимальным» образом и предположить, что суперсимметрия нарушена на масштабе ~ 1 ТэВ, то все три калибровочные константы сойдутся в одной общей точке.

При низких энергиях гравитация относится к разряду очень слабых взаимодействий. В атомах гравитационное притяжение между электроном и протоном в 10^{40} раз слабее силы электрического притяжения между ними. Поэтому гравитацией вполне можно пренебречь в атомной физике и физике элементарных частиц

низких энергий. Однако сила гравитационного взаимодействия определяется массой, которая, в свою очередь, эквивалентна энергии. Сила гравитационного притяжения растет пропорционально квадрату энергии и объединяется со всеми другими силами, зависящими от энергии логарифмически, на планковских масштабах $\simeq 10^{19}$ ГэВ.

Как известно, в физике все измеряемые величины выражаются в единицах длины, времени и массы. Природа же «использует» такие единицы измерения, как размерные фундаментальные константы: скорость света c, квант действия h и ньютоновская гравитационная постоянная G. Еще М. Планк понял, что для описания всех физических явлений необходимы эти фундаментальные константы. Из этих констант можно построить планковскую длину, массу и планковское время. Масштабы этих величин ничтожны по сравнению с масштабами окружающего нас мира ($l_{\text{Pl}} \simeq 10^{-33}$ см, $M_{\text{Pl}} \simeq 10^{19}$ ГэВ), но именно через эти величины следует выражать все физические наблюдаемые.

Из общей теории относительности следует, что гравитационные эффекты определяются динамикой пространства–времени. Материя и энергия искривляют матрицу пространства–времени. В квантовомеханическом подходе нужно учитывать квантовые флуктуации, т. е. метрика пространства–времени должна быть подвержена этим флуктуациям. Опыт теоретических исследований показывает, что квантовые флуктуации пространства–времени, по-видимому, не описываются квантовой теорией поля. Попытки прямого квантования теории Эйнштейна оказались безуспешными. Совместимы ли вообще квантовая механика и общая теория относительности? Вполне возможно, что теория Эйнштейна представляет собой эффективную, но не полную и окончательную теорию гравитации. Она описывает гравитацию лишь на масштабах, значительно превышающих планковскую длину. Физика на масштабах планковской длины требует новой теории, принципиально отличающейся от квантовой теории поля. Пожалуй, единственным кандидатом на такую теорию в настоящее время является теория струн.

8.2. Общая теория относительности и квантовая теория поля: совместимы ли они?

Стандартная модель — весьма успешная теория, описывающая поведение элементарных частиц на масштабе энергий ~ 100 ГэВ. Но в модели содержится много проблем, о которых мы уже говорили. Какая физика проявляет себя на масштабах, больших сотен ГэВ? На ТэВ-ных масштабах возможны проявления суперсимметрии. При больших энергиях ($10^{15} \div 10^{16}$ ГэВ) ожидается объединение электрослабых и сильных взаимодействий. А что дальше? Очевидно, что на масштабах планковской энергии (массы) $M_{\text{Pl}}c^2 = (c\hbar/G)^{1/2}c^2 \sim 10^{19}$ ГэВ теория должна претерпевать значительные изменения. Этот масштаб определяет энергии, при которых в любой теории следует учитывать эффекты релятивистской квантовой гравитации. На таких масштабах гравитационные взаимодействия становятся сильными, и ими нельзя пренебрегать. Можно ли объединить квантовую теорию поля и стандартную модель с эйнштейновской гравитацией? Теорию струн можно рассматривать как наиболее успешную попытку в этом направлении.

Однако при попытках объединения теории относительности и квантовой теории поля возникает целый ряд серьезных проблем. С точки зрения физика-теоретика, работающего в теории поля, серьезнейшая проблема — нарушение перенормируемости теории. Действительно, сингулярности, связанные с малыми расстояниями, не позволяют использовать известные методы регуляризации. Заменяя точечноподобные

частицы одномерными протяженными струнными и считая их фундаментальными объектами, теория суперструн преодолевает эту трудность.

Физик-теоретик, занимающийся теорией относительности, укажет на целый набор проблем, относящихся к причинной структуре пространства–времени в присутствии квантовомеханических флуктуаций метрики. Важной проблемой являются черные дыры, их термодинамические свойства и теория квантовой причинности. Последняя проблема, в частности, ставит под сомнение основы квантовой механики. Могут ли эти проблемы разрешены в рамках теории возмущений? Очевидно, что ответ на этот вопрос отрицательный. По-видимому, ответы надо искать с привлечением непертурбативных эффектов, о существовании которых нам известно, но этих знаний еще недостаточно, чтобы их можно было применить при построении квантовой гравитации.

Хотелось бы, чтобы вышеупомянутые проблемы были разрешены в новой теории без ревизии основ квантовой механики. Струнная теория возникла в конце 60-х годов прошлого века при попытках описания ядерных сил. В 1971 г. было осознано, что включение фермионов требует введения суперсимметрии. Это привело к развитию пространственно-временной суперсимметрии как основной составляющей согласованных струнных теорий, носящих название суперструны. В 1974 г. струнная теория получила заметное развитие, связанное с идеей рассмотрения струн в контексте эйнштейновской идеи объединения. В частности, безмассовая частица со спином два, которая не находила себе применения в адронных взаимодействиях, была идентифицирована с гравитоном. Одним из «приложений» революции 1974 года была оценка характеристического размера струн $L_{\mathrm{Pl}} = \hbar/cM_{\mathrm{Pl}} \sim (\hbar G/c^3)^{1/2} \sim 10^{-33}$ см, что на 20 порядков величины меньше, чем ожидалось до 1974 г. Согласно современным оценкам, характерный размер струн $L_s \simeq 10^{-31}$ см. В любом случае, существующие (и которые в скором времени появятся) ускорители имеют «пространственное разрешение» $\geq 10^{-16}$ см, поэтому «точечное» приближение квантовых теорий поля вполне оправдано.

Квантовая теория поля — пример нелинейной системы с бесконечным числом степеней свободы. Неудивительно, что до сих пор в ней найдено лишь несколько точных результатов (исключение — двумерные теории). Однако в последние годы, с использованием идей суперсимметрии, найдены целые классы физических величин, вычисляемые аналитическими методами.

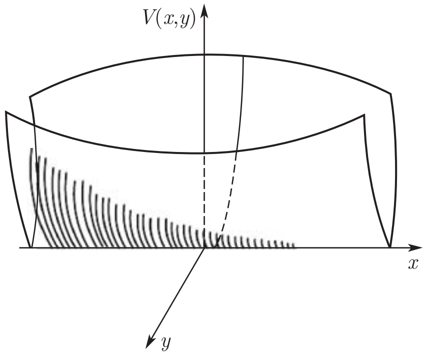


Рис. 1

Важной особенностью суперсимметричных теорий является наличие семейства неэквивалентных вакуумов. У ферромагнетика имеется целый континуум вакуумов, характеризующийся общей ориентацией спинов. Эти вакуумы эквивалентны, т. е. физические наблюдаемые в одном из этих вакуумов точно такие же, как и в любом другом вакууме. Все эти вакуумы связаны определенной симметрией, и система должна выбрать один из них, а это приводит к спонтанному нарушению симметрии. Рассмотрим случай двух степеней свободы x и y и потенциала, изображенного на рис. 1.

Вакуум системы соответствует различным точкам вдоль долины потенциала $y = 0$ и произвольных x. Однако эти точки неэквивалентны — нет симметрии, связывающей их. Потенциал вблизи начала координат достаточно мелкий, однако он становится круче при больших x. Такая случайная вырожденность обычно вызвана

цветовыми эффектами. Например, если система с указанным потенциалом не содержит фермионов, нулевые моды колебаний относительно разных вакуумов будут отличаться. Эти колебания стремятся привести систему в минимум начала координат. Но в суперсимметричной теории энергия нулевых колебаний фермионов в точности сокращает бозонный вклад, и вырождение не снимается. Долина минимумов по-прежнему присутствует. Суперсимметричная система имеет континуум вакуумов. Это семейство или многообразие называется пространством модулей вакуума, а моды системы, соответствующие движению вдоль этих долин потенциала, называют модулями. Анализ суперсимметричных теорий значительно упрощается за счет этих вакуумных многообразий.

Важной особенностью SUSY теорий является электро-магнитная дуальность. Как обычно в физике, при исследовании сложной системы со множеством связанных степеней свободы возникает необходимость упростить задачу и рассмотреть случай со слабосвязанными переменными, тем не менее, в той или иной степени отражающий динамику системы. Например, в физике конденсированного состояния проблема малых расстояний формулируется в терминах взаимодействующих электронов и ядер. Желаемое решение — макроскопическое поведение системы и ее возможные фазы.

В суперсимметричных теориях поля поведение наблюдаемых на больших расстояниях описывается набором слабосвязанных эффективных степеней свободы. Если характеристическая длина становится больше, взаимодействие между эффективными степенями свободы ослабевает, и описание оказывается более точным. Другими словами, в терминах эффективных степеней свободы, теория на «больших» расстояниях становится «тривиальной».

Существуют, однако, такие модели, в которых и на больших расстояниях в теории существенно взаимодействие. Из-за масштабной инвариантности в таких теориях имеются нетривиальные фиксированные точки ренормгруппы. В этом случае возможны два (или больше) дуальных описания физической теории, приводящих к одинаковым результатам на больших расстояниях. Можно отметить несколько причин рассмотрения пары наборов переменных как электро-магнитных величин, дуальных друг к другу. Первоначальные переменные, описывающие поведение системы на малых расстояниях, называют «электрическими» степенями свободы, а другой набор переменных, отвечающий поведению на больших расстояниях, назовем «магнитными» степенями свободы. Когда электрические переменные сильно связаны, они сильно флуктуируют, приводя к сложной динамике. Однако при этом магнитные степени свободы слабо связаны. Они не флуктуируют, и их динамика достаточно проста. В первом классе рассматриваемых теорий поля магнитные степени свободы — макроскопические, они практически свободны на больших расстояниях. Это степени свободы являются безмассовыми и соответствуют связанным состояниям элементарных частиц. Во втором классе теорий поля возможны два типа описаний: электрический и магнитный. Поскольку в обоих случаях имеется взаимодействие, то ни одно из них не приводит к «тривиальному» описанию физики. Однако если «электрические» степени свободы становятся более сильно связанными, то магнитные, наоборот, менее связанные (см. табл. 1).

Таблица 1

степени свободы	электрические	магнитные
связь	сильная	слабая
флуктуации	большие	малые
фаза	конфайнмент	хиггс

Используя электрическую и магнитную дуальность, можно изучать фазовую диаграмму теории. Например, так как электрические степени свободы становятся сильно связанными, то они приводят к конфайнменту. В магнитных переменных это механизм Хиггса, который легко понять в пределе слабой связи.

Электрически-магнитная дуальность квантовой теории поля имеет важные следствия:

а) в теориях, относящихся к первому классу, магнитные степени свободы естественно считать состоящими из электрических степеней свободы. Магнитные частицы включают безмассовые калибровочные частицы новой магнитной калибровочной симметрии. Эти безмассовые составные калибровочные частицы связаны с новой калибровочной симметрией, которой нет в фундаментальной электрической теории. Так как эта калибровочная симметрия не является симметрией первоначальной теории, то калибровочная инвариантность не является фундаментальной.

б) Для теорий второго класса понятие элементарной частицы становится неопределенным. Невозможно инвариантным образом выбрать, какая из степеней свободы элементарная, а какая — составная. Магнитные степени свободы можно рассматривать как состоящие из электрических и наоборот.

8.3. Пертурбативная теория струн

Все теории суперструн содержат безмассовое скалярное поле, называемое дилатоном, относящееся к тому же суперсимметричному мультиплету, что и гравитон. В квазиклассическом приближении это поле определяет плоское направление в пространстве модулей вакуума, т. е. оно может принимать любое значение ϕ_0. Замечательно, что дилатон определяет струнную константу $g_s = e^{\phi_0}$ — безразмерный параметр, по которому можно производить разложение теории возмущений.

Струнная пространственно-временная история описывается функциями $X^\mu(\sigma, \tau)$, которые отображают двумерный мировой лист (σ, τ) на пространство–время X^μ. Существует также другие мировые листы полей, которые описывают другие степени свободы, такие как суперсимметрия и калибровочная симметрия. Удивительно, но классическая динамика струн описывается конформно-инвариантной 2-мерной теорией поля. Важная особенность, отличающая $2d$-теорию от многомерных аналогов — ее перенормируемость. Пертурбативную теорию струн можно сформулировать с помощью фейнмановского суммирования по путям. Это дает возможность ассоциировать ряд h римановой поверхности (замкнутой и ориентированной двумерной поверхности с h ручками) с фейнмановскими диаграммами с h петлями. Привлекательной особенностью этого подхода является то, что в каждом порядке по h имеется только одна диаграмма, которая сводится к конечномерному интегралу.

8.3.1. Пять теорий суперструн. В 1984–1985 гг. были открыты интересные особенности теории суперструн, которые убедили многих физиков в том, что теория суперструн — весьма серьезный кандидат на теорию объединенных взаимодействий. Этот период иногда называют «первой струнной революцией». Оказалось, что существует пять различных теорий суперструн, каждая из которых требует размерности десять (9 пространственных и одно временное измерение), причем для всех возможно пертурбативное разложение. Эти пять теорий обозначают следующим образом: тип I, тип IIA, тип IIB, $E_8 \times E_8$ (или HE) и $SO(32)$ (или HO). Тип II имеет $N = 2$ суперсимметрию в десятимерном случае, а другие основаны на $N = 1$ суперсимметрии. Тип I основан на неориентированных открытых и замкнутых струнах, в то время как другие четыре — на замкнутых ориентированных струнах. Тип I струн может быть

нарушенным, а остальные четыре — ненарушенные. Тип IIA-теории — не киральная теория (т. е. сохраняющая четность), а другие четыре — киральные (т. е. нарушающие четность).

8.3.2. Компактификация дополнительных измерений. Для того чтобы теория была реалистичной, необходимо «свернуть» дополнительные шесть измерений, аналогично теории Калуцы–Клейна. Линейный размер компактифицированного пространства должен быть сравнимым с размером струны L_s. Так как пространственно-временная геометрия определяется (как и в общей теории относительности) динамически, то допустимы оказываются геометрии, удовлетворяющие динамическим уравнениям. Среди таких решений следует отметить особый класс: HE-теория, компактифицированная на многообразии Калаби–Яо. Эта теория при малых энергиях сходна с суперсимметричным расширением стандартной модели. Действительно, фермионы малых масс в этой теории относятся к желаемым представлениям калибровочной группы большого объединения. При этом число поколений определяется топологией многообразия Калаби–Яо. Отметим, однако, что эти успехи достигнуты в пертурбативном подходе, и в лучшем случае являются качественными. Непертурбативные эффекты заведомо важны для понимания нарушения суперсимметрии.

8.3.3. T-дуальность и струнная геометрия. Основную идею T-дуальности можно пояснить, рассматривая компактное пространственное измерение на цикле радиуса R. В этом случае существуют два типа возбуждений. Первый тип, не относящийся к теории струн, связан с квантованием импульса на цикле. Эти возбуждения (Калуцы–Клейна) дают вклад в квадрат энергии, пропорциональный $(n/R)^2$, где n — целое число. Второй тип возбуждений (winding-mode), возникает из-за замкнутости струн, намотанных m раз на этот цикл. Эти возбуждения возникают только за счет струн, хотя имеют и многомерные аналоги. Если обозначить через $T = (2\pi L_s^2)^{-1}$ фундаментальное натяжение струны (энергия, приходящаяся на единицу длины струны), то вклад winding-mode в квадрат энергии $\sim (2\pi RmT)^2$. T-дуальность меняет эти два типа возбуждений путем отображений $m \leftrightarrow n$ и $R \leftrightarrow L_s^2/R$. Это часть точного отображения между T-дуальными парами A и B. Таким образом, основополагающая геометрия неоднозначна: невозможно обнаружить разницу между компактификацией на цикле радиуса R и компактификацией на цикл радиуса L_s^2/R. Эта неоднозначность связана с тем, что объект, используемый для исследования цикла — протяженные струны, которые способны наматываться на цикл. Вследствие отмеченной неоднозначности, на малых расстояниях нарушается обычная геометрическая картина; классическая геометрия заменяется струнной геометрией. Струнная геометрия описывается 2-мерной конформной теорией поля. Отсюда следует обобщение принципа неопределенности Гейзенберга, согласно которому Δx ограничивается не только значением Δp, но и размером струны, который растет с энергией.

Однако в некоторых случаях в качестве пробников предпочтительно использовать непертурбативные объекты, называемые D-бранами.

Другое связанное с топологией явление — зеркальная симметрия. В примере с циклом топология не изменяется при преобразованиях T-дуальности. Преобразуется только размер. При более сложных компактификациях, подобных компактификации на многообразия Калаби–Яо, неоднозначность возникает на уровне основополагающей топологии — невозможно определить, на какие из зеркальных пар многообразий Калаби–Яо осуществляется компактификация. Эту неоднозначность удобно использовать: иногда легче провести вычисления на одном многообразии Калаби–Яо, чем на зеркальном многообразии.

Две пары десятимерных теорий суперструн оказываются T—дуальными при компактификации на цикле: IIA, IIB и HE, HO. Две вершины на рис. 2, обозначенные линиями T, связаны вакуумами путем T-дуальности.

Например, если теория IIA компактифицирована на цикл радиуса R_A (при девяти некомпактных измерениях), то это эквивалентно компактификации IIB-теории на цикл радиуса $R_B = L_s^2/R_A$. Преобразование T-дуальности, связывающее две другие теории (HE и HO), практически то же самое, что и для IIA- и IIB-теорий.

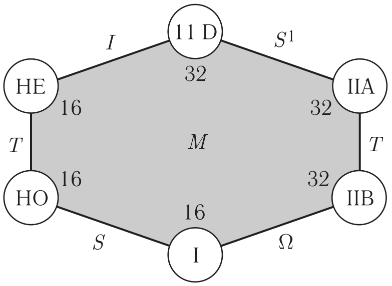


Рис. 2

Имеется и другое соотношение, связывающее теории. Компактификация теории I на цикл радиуса R_I оказывается связанной с определенной компактификацией IIA на линейный интервал с размером, пропорциональным L_s^2/R_I. Линейный интервал можно рассматривать как цикл с идентификацией точек $I = S^1/\Omega$. Поэтому можно сказать, что тип I теории на цикле радиуса R_I получается из типа IIA на цикле радиуса L_s^2/R_I путем действия Ω. Так как T-дуальность IIA-теории на цикле радиуса L_s^2/R_I такая же, как в IIB-теории на цикле радиуса R_I, то при компактификации на цикл теория типа I возникает из IIB-теории при действии Ω. Если $R_I \to \infty$, то это соотношение между теориями справедливо для 10 измерений. Эти соотношения уменьшают число различных суперструнных теорий с пяти до трех или до двух, если использовать преобразование Ω.

8.4. Непертурбативная теория струн

Вторая струнная революция (1994– ... гг.) связана с непертурбативным подходом. Ключевым открытием было обнаружение различных дуальностей, которые показали, что на самом деле пять различных суперструнных теорий являются пятью пертурбативными разложениями единственной основополагающей теории около пяти различных точек в пространстве вакуумных модулей. Сейчас, по-видимому, очевидно, что имеется одна теория с различными вакуумами. Шесть вакуумов содержатся в 11-мерном пространстве-времени Минковского. Кроме того, установлено, что непертурбативные объекты с размерностью, большей единицы (мембраны и высшие p-браны), играют весьма существенную роль. Однако пертурбативное разложение не может быть основано на p-бранах с $p > 1$. Схематическое представление взаимосвязи между пятью суперструнными вакуумами в 10 и 11 измерениях приведено на рис. 2. Идея в том, что существует большое пространство модулей вакуумов единой теории, обозначенное через M. Шесть предельных точек, обозначенных кружочками, являются специальными в смысле (супер)Пуанкаре инвариантности в 10 или 11 измерениях. Буквы на ребрах диаграммы относятся к типу дуальности, связывающему пары приведенных точек. Числа 16 и 32 относятся к ненарушенным суперсимметриями. В 10-ти измерениях минимальный спинор имеет 16 вещественных компонент, поэтому сохраняющиеся суперсимметричные заряды (суперзаряды) соответствуют одному спинору в трех случаях (тип I, HE и HO).

Тип II суперструн содержит два спинорных суперзаряда. В 11-ти измерениях минимальный спинор имеет 32 вещественных компоненты.

8.4.1. S-дуальность. Предположим, что пара теорий (A и B) S-дуальны. Это означает, что если $f_A(g_s)$ обозначает любую физическую наблюдаемую в теории

A (g_s — константа связи), то имеется соответствующая физическая наблюдаемая $f_B(g_s)$ в теории B, такая, что $f_A(g_s) = f_B(1/g_s)$. Дуальность связывает одну теорию в режиме слабой связи с другой теорией в режиме сильной связи. Эта дуальность обобщает уже обсуждавшуюся электрическую-магнитную дуальность в теориях поля. S-дуальность связывает теорию типа I с HO теорией и IIB теорию. Эта дуальность определяет поведение трех теорий в режиме сильной связи в терминах слабосвязанных теорий. Изменение величины струнной константы связи соответствует движению в пространстве модулей вакуума.

«Ребро» диаграммы, соединяющее HO вакуум с вакуумом типа I, обозначено S, поскольку два вакуума связаны S-дуальностью. Было известно, что две теории имеют одну и ту же калибровочную симметрию ($SO(32)$) и суперсимметрию, но оставалось неясным, как они могут быть эквивалентными, так как тип I струн и херотические струны полностью различны. Теперь же понятно: $SO(32)$ херотические струны возникают как непертурбативные возбуждения в теории I типа.

8.4.2. M-теория и одиннадцатое измерение. Изучение поведения двух оставшихся теорий суперструн (IIA и HE) преподнесло сюрпризы. Оказывается, что в обеих теориях содержится 11-е измерение, чей размер R становится большим в пределе сильной связи g_s. Для IIA-теории 11-е измерение — цикл, а для HE — линейный интервал. В пределе сильной связи в любой из этих теорий содержится 11-мерное пространство–время Минковского. Одиннадцатимерное описание основополагающей теории называется M теорией. 11-мерный вакуум, включающий 11-мерную супергравитацию, характеризуется единственным масштабом — одиннадцатимерным планковским масштабом L_{Pl}. Этот масштаб пропорционален $G^{1/9}$, где G — одиннадцатимерная ньютоновская константа. В этом случае тип IIA теории возникает в пределе, когда одно из десяти пространственных измерений оказывается циклом (S^1 на рис. 2) радиуса R. Как уже говорилось, тип IIA струнной теории в 10-ти измерениях имеет безразмерную константу связи g_s, задаваемую величиной дилатонного поля, и масштабом длины L_s. Соотношение между параметрами 11-мерного и IIA-описания задается следующим образом:

$$L_{\text{Pl}}^3 = RL_s^2, \tag{1}$$

$$R = L_s g_s. \tag{2}$$

Значение этих соотношений обсудим позже, сейчас же отметим одну важную особенность. Пертурбативный анализ IIA-теории можно рассматривать как разложение по степеням g_s при фиксированном L_s. Второе соотношение подразумевает, что это разложение осуществляется вблизи $R = 0$. Подобная же связь существует между HE и одиннадцатимерным вакуумом. Разница в том, что компактное пространственное измерение — линейный интервал (обозначенный I на рис. 2) вместо цикла. Те же соотношения (1 и 2) применимы и в этом случае.

8.4.3. p- и D-браны. В дополнение к струнам, теория содержит другие объекты, называемые p-бранами. p-брана — протяженный объект в пространстве с p пространственными измерениями. (Термин p-брана возник от слова мембрана, т. е. 2-брана.) В 11-мерной M-теории имеется два типа бран с $p = 2$ и $p = 5$, называемых $M2$-браной и $M5$-браной. Более простой пример браны имеется в IIA-теории при компактификации 11-мерной теории на цикл. 11-мерные частицы с импульсом на цикле возникают как массивные частицы в 10-мерии, причем их массы пропорциональны $1/R$. Так как это точечные частицы, они относятся к 0-бранам. Из (2) имеем $1/R = 1/L_s g_s$, т. е. в пертурбативном режиме ($g_s \ll 1$) эти частицы гораздо тяжелее, чем обычные

струнные состояния с массой $\sim 1/L_s$. Поэтому струны IIA-типа можно рассматривать как $M2$-браны, «запертые» на компактном цикле.

Эти p-браны весьма существенны для различных дуальностей, обсуждаемых выше.

Специальный класс p-бран — так называемые Дирихле p-браны. Название отражает тип граничных условий, приписанных концам открытых струн. Обычные открытые струны в теории типа I имеют неймановские граничные условия.

D-браны нашли несколько интересных приложений. Одно из них относится к черным дырам. D-бранная техника используется для учета квантовых микросостояний классических черных дыр. Кроме того, D-браны приводят к новым результатам в квантовой теории поля. Открытые струны с концами на D-бранах при низких энергиях описываются локальной квантовой теорией поля, «живущей» на бране. Динамика квантовых теорий поля на различных бранах должна быть связана различными дуальностями.

Заключение

В конце 2007 г. начнет свою работу Большой Адронный Коллайдер (ЦЕРН). На этот ускоритель физики возлагают особые надежды. Прежде всего, эти надежды связаны с уникальной возможностью исследования стандартной модели элементарных частиц, выяснением природы электрослабого нарушения симметрии в ТэВ-ной области энергий. Другого сорта ожидания относятся к возможным проявлениям «новой физики» (SUSY, техницвета, малого хиггса, дополнительных измерений, ...), рассмотренным в этой книге. Кроме того, и это уже было не раз в физике, новый масштаб энергий (расстояний) может преподнести «сюрпризы», пока не предусмотренные теоретиками. Очень бы хотелось надеяться на это, ведь любой достоверный физический результат способен открыть новые направления как теоретических, так и экспериментальных исследований.

Весьма привлекательной выглядит идея о том, что стандартная модель является низкоэнергетическим пределом (эффективной теорией) более общей теории. Что это за теория, на каких принципах она основана? Вероятно, данные LHC и обсуждаемого ускорителя ILC, способны в значительной степени «продвинуть» нас в поиске ответов на эти вопросы.

Не следует, однако, думать, что «новая физика» начнет себя проявлять только при высоких (ТэВ-ных?) энергиях. Вполне возможно, что она присутствует и в низкоэнергетических наблюдаемых. Поэтому мы надеемся на продолжение экспериментов по нейтринным осцилляциям, распаду протона, поиску аномального магнитного момента мюона, ... Не исключены «сюрпризы», более того, мы их ожидаем — из наблюдательной космологии.

В любом случае, ближайшие несколько лет будут временем замечательных достижений в физике элементарных частиц, способных определить направления ее развития на многие годы вперед. Ждать осталось недолго ...

Список литературы

Объем имеющейся литературы по тематике книги огромен. Ниже предпринята попытка выбора пионерских публикаций.

ЧАСТЬ I

Глава 1

Кварковая модель

1. *Gell-Mann M.* // Phys. Rev. — 1953. — V. 92. — P. 833.
2. *Gell-Mann M.* // Nuovo Cimento Suppl. — 1956. — V. 4. — P. 848.
3. *Zweig G.* // CERN-TH-412.
4. *Девитт Б. С.* Динамическая теория полей. — М.: Наука, 1987.

Глава 2

Поля Янга–Миллса, группа $SU(3)_C$

5. *Yang C. N. and Mills R. L.* // Phys. Rev. — 1954. — V. 96. — P. 191.
6. *Fritzsch H., Gell-Mann M. and Leutwyler. H.* // Phys. Lett. B. — 1973. — V. 47. — P. 365.
7. *Greenberg O.* // Phys. Rev. Lett. — 1964. — V. 13. — P. 598.

Асимптотическая свобода

8. *Gross. D. J. and Wilczek F.* // Phys. Rev. Lett. — 1973. — V. 30. — P. 1343.
9. *Politzer H.* // Phys. Rev. Lett. — 1973. — V. 30. — P. 1346.

Бьеркеновский скейлинг

10. *Bjorken J.* // Phys. Rev. — 1969. — V. 179. — P. 1547.
11. *Feynman R.* // Phys. Rev. Lett. — 1969. — V. 23. — P. 1415.

Спонтанное нарушение киральной симметрии

12. *Nambu Y.* // Phys. Rev. Lett. — 1960. — V. 4. — P. 380.
13. *Goldstone J.* // Nuovo Cimento. — 1961. — V. 19. — P. 154.

Кварк-глюонная плазма

14. *Fermi E.* // Progr. Theor. Phys. — 1950. — V. 5. — P. 570.
15. *Feinberg E.* // Nuovo Cimento. A. — 1976. — V. 34. — P. 391.
16. *Shuryak E.* // Nucl. Phys. B. — 1982. — V. 203. — P. 160.

Инстантоны

17. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S. and Tyupkin Yu. S.* // Phys. Lett. B. — 1975. — V. 59. — P. 85.
18. *'t Hooft G.* // Phys. Rev. D. — 1976. — V. 14. — P. 3432.

Правила сумм

19. *Shifman M. A., Vainstein A. I. and Zakharov V. I.* // Nucl. Phys. B. — 1980. — V. 165. — P. 45.

Аксион

20. *Peccei R.*, *Quinn. H.* // Phys. Rev. D. — 1977. — V. 16. — P. 1791.

Глава 3 и Глава 4

Слабые взаимодействия

21. *Fermi E.* // Z. Phys. — 1934. — V. 88. — P. 161.

Модель Вайнберга–Салама–Глэшоу

22. *Glashow S.* // Nucl. Phys. — 1961. — V. 22. — P. 579.
23. *Weinberg S.* // Phys. Rev. Lett. — 1967. — V. 19. — P. 1264.
24. *Salam A.* // Rev. Mod. Phys. — 1980. — V. 52. — P. 525.

Доказательство перенормируемости электрослабой теории

25. *'t Hooft G.* // Nucl. Phys. B. — 1971. — V. 33. — P. 173; — V. 35. — P. 167.

Механизм Хиггса

26. *Higgs P.* // Phys. Lett. — 1964. — V. 12. — P. 132.
27. *Higgs P.* // Phys. Rev. — 1966. — V. 145. — P. 1156.
28. *Englert F. and Brout C.* // Phys. Rev. Lett. — 1964. — V. 13. — P. 321.
29. *Guralnik G.*, *Hagen C. and Kibble T. W.* — 1964. — V. 13. — P. 585.

Обнаружение нейтральных токов

30. *Hasert F. J. et al.* // Phys. Lett. B. — 1973. — V. 46. — P. 138.
31. *Hasert F. J. et al.* // Nucl. Phys. B. — 1974. — V. 73. — P. 1.

Открытие W- и Z-бозонов

32. *Arnison G. et al.* // Phys. Lett. B. — 1983. — V. 122. — P. 103.
33. *Banner M. et al.* // Phys. Lett. B. — 1983. — V. 122. — P. 476.
34. *Bagnaia et al.* // Phys. Lett. B. — 1983. — V. 129. — P. 130.

Глава 5

Радиационные поправки к электрослабой модели

35. *Marciano W.* // Phys. Rev. D. — 1979. — V. 20. — P. 274.
36. *Sirlin A.* // Phys. Rev. D. — 1980. — V. 22. — P. 971.
37. *Marciano W.*, *Sirlin A.* // Phys. Rev. D. — 1983. — V. 27. — P. 552.

Глава 6

See-saw механизм

38. *Mohapatra R. and Senjanovich G.* // Phys. Rev. Lett. — 1980. — V. 44. — P. 912.

Нейтринные осцилляции, осцилляции в веществе

39. *Понтекорво Б.* // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 33. — С. 549.
40. *Wolfenstein L.* // Phys. Rev. D. — 1978. — V. 17. — P. 2369.
41. *Михеев С.*, *Смирнов А.* // Ядерная физика. — 1985. — Т. 42. — С. 1441.

Глава 7

Наблюдение CP-нарушения в K-мезонах

42. *Christenson J.*, *Cronin J. et al.* // Phys. Rev. Lett. — 1964. — V. 13. — P. 138.

Глава 8

43. *Сахаров А. Д.* // Письма в ЖЭТФ. — 1967. — Т. 5. — С. 32.

44. *Dolgov A. D.* // Phys. Rep. — 1992. — V. 222. — P. 309.
45. *Рубаков В. А.*, *Шапошников М. Е.* // УФН. — 1996. — Т. 166. — С. 493.
46. *Кузьмин В. А.* // Письма в ЖЭТФ. — 1970. — Т. 12. — С. 335.

ЧАСТЬ II

Глава 1

Суперсимметрия

47. *Гольфанд Ю. А.*, *Лихтман Е. П.* // Письма в ЖЭТФ. — 1971. — Т. 13. — С. 452.
48. *Gervais J.*, *Sakita B.* // Nucl. Phys. B. — 1971. — V. 34. — P. 632.
49. *Волков Д. В.*, *Акулов В. П.* // Письма в ЖЭТФ. — 1972. — Т. 16. — С. 621.
50. *Wess J.*, *Zumino B.* // Nucl. Phys. B. — 1974. — V. 70. — P. 39.

Глава 2

Техницвет

51. *Weinberg S.* // Phys. Rev. D. — 1976. — V. 13. — P. 974.
52. *Susskind L.* // Phys. Rev. D. — 1979. — V. 20. — P. 2619.
53. *Farhi E.*, *Susskind L.* // Phys. Rep. — 1981. — V. 74. — P. 277.

Глава 3

Маленький Хиггс

54. *Arkani-Hamed N.*, *Cohen A. and Georgi H.* // Phys. Lett. B. — 2001. — V. 513. — P. 232.
55. *Hill C.*, *Pokorski S. and Jing Wang* // Phys. Rev. D. — 2001. — V. 64. 105005.
56. *Arkani-Hamed N.*, *Cohen A. and Georgi H.* // Phys. Rev. Lett. B. — 2001. — V. 86. — P. 4757.

Главы 4 и Глава 5

Дополнительные измерения

57. *Kaluza T.* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.). — 1921. — P. 966.
58. *Klein O.* // Z. Phys. — 1926. — V. 37. — P. 895.
59. *Arkani-Hamed N.*, *Dimopoulos S.*, *Dvali G.* // Phys. Lett. B. — 1998. — V. 429. — P. 263.
60. *Randall L. and Sundrum R.* // Phys. Rev. Lett. — 1999. — V. 83. — P. 4690.

Глава 6

Модели великого объединения

61. *Pati J.*, *Salam A.* // Phys. Rev. D. — 1973. — V. 8. — P. 1240.
62. *Georgi H.*, *Glashow S.* // Phys. Rev. Lett. — 1974. — V. 32. — P. 438.
63. *Fritzsch H.*, *Minkovski P.* // Ann. Phys. — 1975. — V. 93. — P. 193.

Глава 7

Существование темной материи в галактиках

64. *Clowe D. et al.* // astro-ph/0608407.

Проблема космологической постоянной

65. *Weinberg S.* // Rev. Mod. Phys. — 1989. — V. 61. — P. 1.

Глава 8

Теория струн

66. *Green M.*, *Schwarz J. and Witten E.* Superstring Theory I, II. — Cambridge University Press, 1985. Polchinski J. String Theory I, II. — Cambridge University Press, 1999.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

В.М. ЕМЕЛЬЯНОВ
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Физика элементарных частиц» Московского инженерно-физического института

...На Большой Адронный Коллайдер ЦЕРН физики возлагают особые надежды. Прежде всего, будет проверена стандартная модель элементарных частиц и выяснен механизм возникновения массы. Вполне возможно,что наши представления о строении вещества и характере фундаментальных взаимодействий радикально изменятся. Поживем - увидим...

В319
Е601

…МЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА

СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ РАСШИРЕНИЯ

В.М. Емельянов

CERN